IL PROBLEM SOLVING

↓

attività di soluzione di problemi

Anche l'insegnamento è problem solving

L'insegnante deve continuamente:

- Riconoscere problemi
- Prendere decisioni:
  - prima
  - durante
  - dopo

…l'interazione con gli allievi

Anche l’insegnamento è problem solving

⇓

Anche nell’insegnamento l’errore va messo nel conto…

Bruno Bettelheim, *Un genitore quasi perfetto*

[...] per una buona educazione dei propri figli, non bisogna cercare di essere dei genitori perfetti, né tanto meno aspettarsi che lo siano, o che lo diventino, i nostri figli. La perfezione non è alla portata del normale essere umano, e l'accanimento nel volerla raggiungere è inevitabilmente di ostacolo a quell'atteggiamento di tolleranza verso le imperfezioni altrui, comprese quelle dei figli, che, solo, rende possibili rapporti umani decenti.

E' invece alla portata di tutti essere genitori passabili, vale a dire genitori che educano bene i figli. Occorre però che gli errori che commettiamo nell'educarli (errori il più delle volte dovuti semplicemente all'intensità del nostro coinvolgimento emotivo) siano più che compensati dalle molte occasioni in cui ci comportiamo in modo giusto con loro.

Università di Pisa

Dipartimento di Matematica, a.a. 2008-'09

CORSO DI PERFEZIONAMENTO

Difficoltà in matematica.

Dal recupero dei debiti nella scuola superiore
al raccordo con l'università:
problemi, riflessioni, proposte.

1° MODULO :
Il recupero
come progetto d’istituto

29 ottobre
Miti e pratiche del recupero

12 novembre
Un repertorio di interpretazioni

19 novembre
Il problem solving

26 novembre
L’intervento di recupero

1° MODULO :
Il recupero
come progetto d'istituto

29 ottobre
Miti e pratiche del recupero

12 novembre
Un repertorio di interpretazioni

19 novembre
Il problem solving

26 novembre
L'intervento di recupero

Incontro n.1: ***Miti e pratiche del recupero***

Analisi critica dell'approccio tradizionale al recupero, a livello di intervento, ma prima ancora a livello di osservazione e di interpretazione. Le possibili cause del suo frequente fallimento.

Incontro n.2: ***Alcune "opinioni non di lusso"***

Alcuni presupposti teorici per il recupero: le abilità metacognitive, l'apprendimento come attività costruttiva, l'importanza del contesto, i misconcetti, la pragmatica, il pensiero logico e il pensiero narrativo, le convinzioni, il fatalismo.

Incontro n.3: ***Il problem solving***

Il problem solving come strategia didattica per il recupero e la prevenzione di alcune difficoltà in matematica. Il ruolo dell'insegnante nell'attività di problem solving, e le sue decisioni riguardo la struttura matematica del problema, la formulazione del testo, le modalità d'uso, gli obiettivi.

Incontro n.4: ***L'intervento dell'insegnante***

Proposta di un progetto innovativo di intervento di prevenzione / recupero in matematica (possibilmente a livello di istituto), articolato in attività diverse, in risposta alle diverse 'diagnosi' possibili, cioè alle diverse interpretazioni dei comportamenti degli allievi.

Incontro n.1: ***Miti e pratiche del recupero***

Analisi critica dell'approccio tradizionale al recupero, a livello di intervento, ma prima ancora a livello di osservazione e di interpretazione. Le possibili cause del suo frequente fallimento.

Incontro n.2: ***Alcune "opinioni non di lusso"***

Alcuni presupposti teorici per il recupero: le abilità metacognitive, l'apprendimento come attività costruttiva, l'importanza del contesto, i misconcetti, la pragmatica, il pensiero logico e il pensiero narrativo, le convinzioni, il fatalismo.

Incontro n.3: ***Il problem solving***

Il problem solving come strategia didattica per il recupero e la prevenzione di alcune difficoltà in matematica. Il ruolo dell'insegnante nell'attività di problem solving, e le sue decisioni riguardo la struttura matematica del problema, la formulazione del testo, le modalità d'uso, gli obiettivi.

Incontro n.4: ***L'intervento dell'insegnante***

Proposta di un progetto innovativo di intervento di prevenzione / recupero in matematica (possibilmente a livello di istituto), articolato in attività diverse, in risposta alle diverse 'diagnosi' possibili, cioè alle diverse interpretazioni dei comportamenti degli allievi.

In questo incontro

- **Implicazioni per il recupero:**
  - ✓ **Osservazioni generali**
  - ✓ **Materiali ed esperienze:**
  - → Atteggiamenti negativi
  - → Abilità linguistiche e trasversali
  - → Abilità metacognitive
  - → Come si studia la matematica:
    - Definizioni
    - Dimostrazioni

OSSERVA COMPORTAMENTI

DIFFICOLTA'

VALUTA

INTERVENTO DI RECUPERO

INTERVIENE

Fissa gli
OBIETTIVI

Li esplicita
In termini di
COMPORTAMENTI

OSSERVA
COMPORTAMENTI

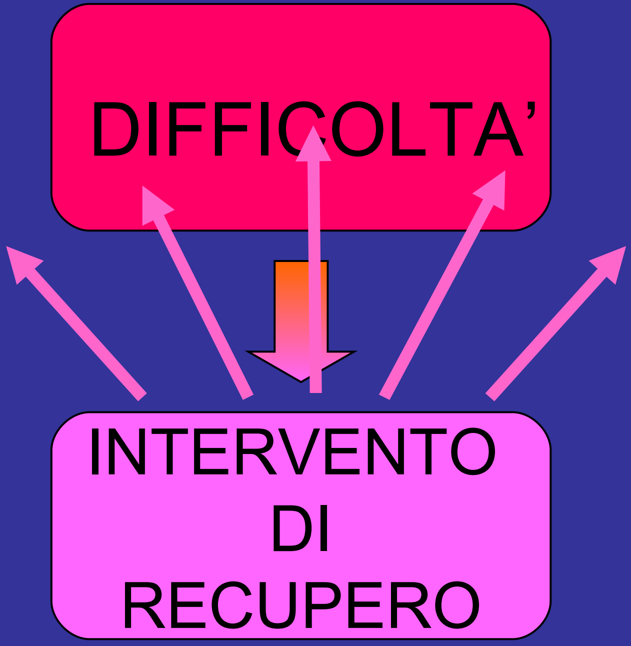
DIFFICOLTA'

VALUTA

INTERPRETA
I COMPORTAMENTI

INTERVENTO
DI
RECUPERO

INTERVIENE



INTERPRETAZIONI DIVERSE

INTERPRETA I COMPORTAMENTI

IN MODO DIFFERENZIATO!!!

INTERVIENE

Implicazioni

- E' improbabile che un docente possa fare il recupero a tutti i suoi studenti (quanti gruppi diversi dovrebbe seguire?)
- Il recupero diventa un'attività di istituto: docenti diversi si 'dividono' i gruppi (misti rispetto alle classi di appartenenza) da seguire
- E' importante che le fasi che precedono il recupero siano:
  - trasparenti
  - condivise

Lacune di base

Atteggiamento negativo

Studio inadeguato

Difficoltà di comprensione

Studio insufficiente

CARENZE METACOGNITIVE

CARENZE LINGUISTICHE

INTERPRETA
I COMPORTAMENTI

INTERVIENE

INTERVENTO
DI
RECUPERO

Lacune di base

Atteggiamento negativo

Studio inadeguato

Difficoltà di comprensione

CARENZE METACOGNITIVE

CARENZE LINGUISTICHE

INTERVENTO DI RECUPERO

INTERPRETA I COMPORTAMENTI

LAVORO A. LINGUISTICHE

LAVORO METACOGNITIVO

Lavoro sulle basi

Lavoro contro
Il fatalismo

Lavoro sul
metodo di studio

Lavoro
'classico'

Lacune di base

Atteggiamento
negativo

Studio
inadeguato

Difficoltà di
comprensione

CARENZE METACOGNITIVE

CARENZE LINGUISTICHE

INTERVENTO
DI
RECUPERO

INTERPRETA
I COMPORTAMENTI

Lavoro ***trasversale*** su:

- LINGUAGGIO
- ATTENZIONE
- CONSAPEVOLEZZA DELLE PROPRIE RISORSE
- PROCESSI DI CONTROLLO
- CONSAPEVOLEZZA DEI PROCESSI DECISIONALI

LAVORO A. LINGUISTICHE

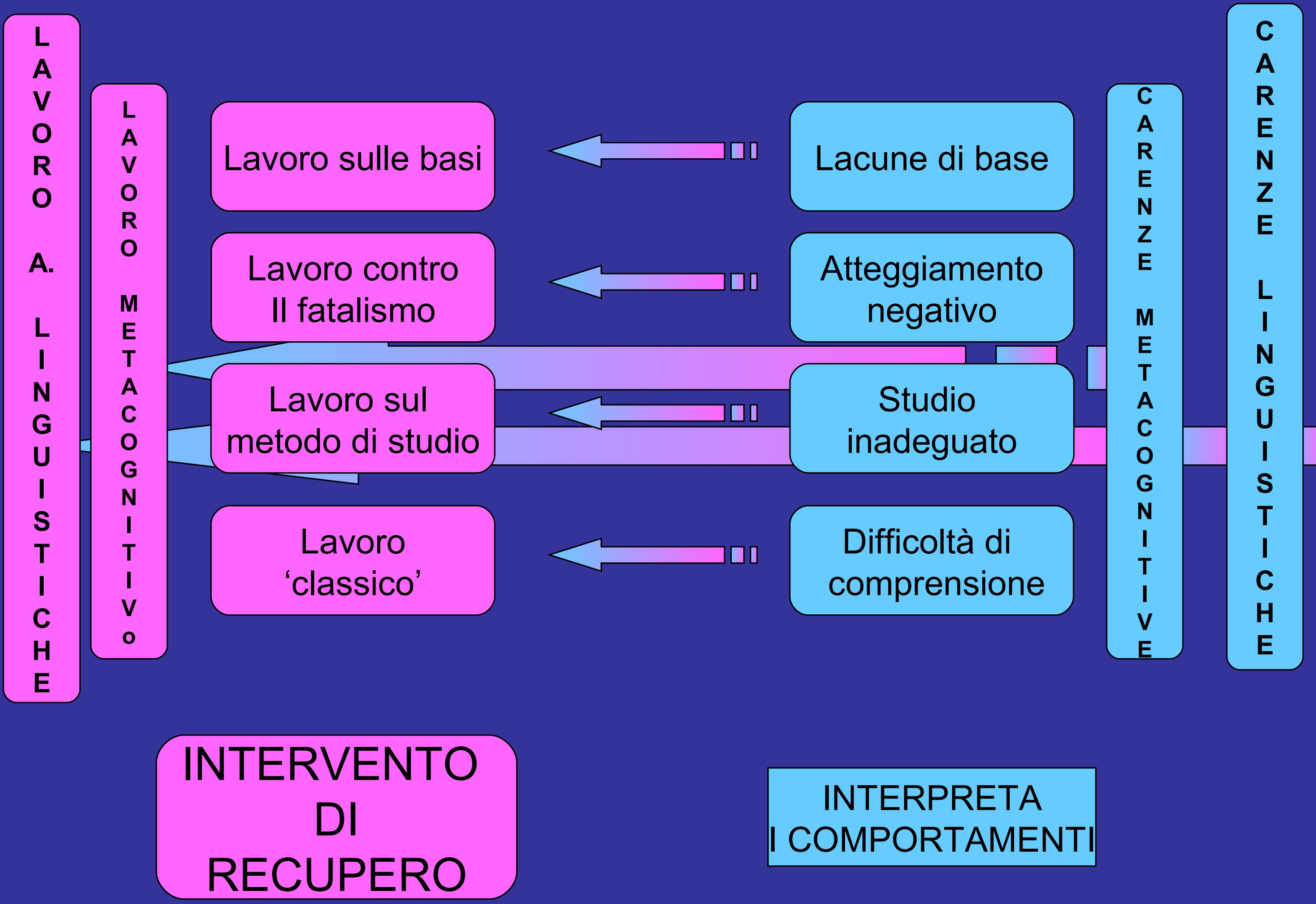
LAVORO METACOGNITIVO

CARENZE METACOGNITIVE

CARENZE LINGUISTICHE

INTERVENTO DI RECUPERO

INTERPRETA I COMPORTAMENTI


LAVORO A. LINGUISTICHE
LAVORO METACOGNITIVO
Lavoro sulle basi
Lavoro contro Il fatalismo
Lavoro sul metodo di studio
Lavoro 'classico'
Lacune di base
Atteggiamento negativo
Studio inadeguato
Difficoltà di comprensione
CARENZE METACOGNITIVE
CARENZE LINGUISTICHE
INTERVENTO DI RECUPERO
INTERPRETA I COMPORTAMENTI

Lavoro sulle basi ← Lacune di base

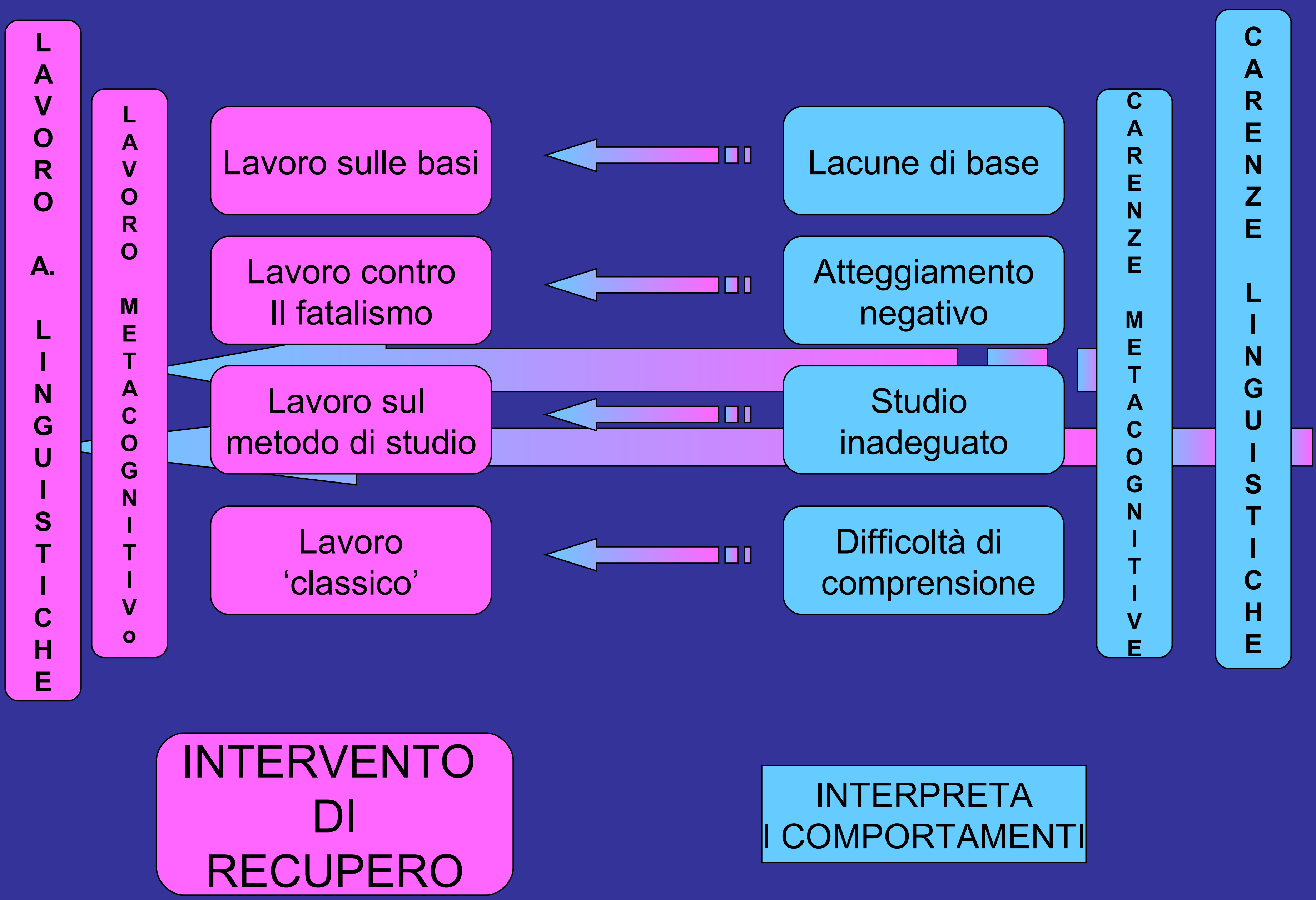
Con attenzione a:

- MISCONCETTi
- CONVINZIONI
- metodologia: lavoro collaborativo…

Lavoro 'classico' ← Difficoltà di comprensione

INTERVENTO DI RECUPERO

INTERPRETA I COMPORTAMENTI

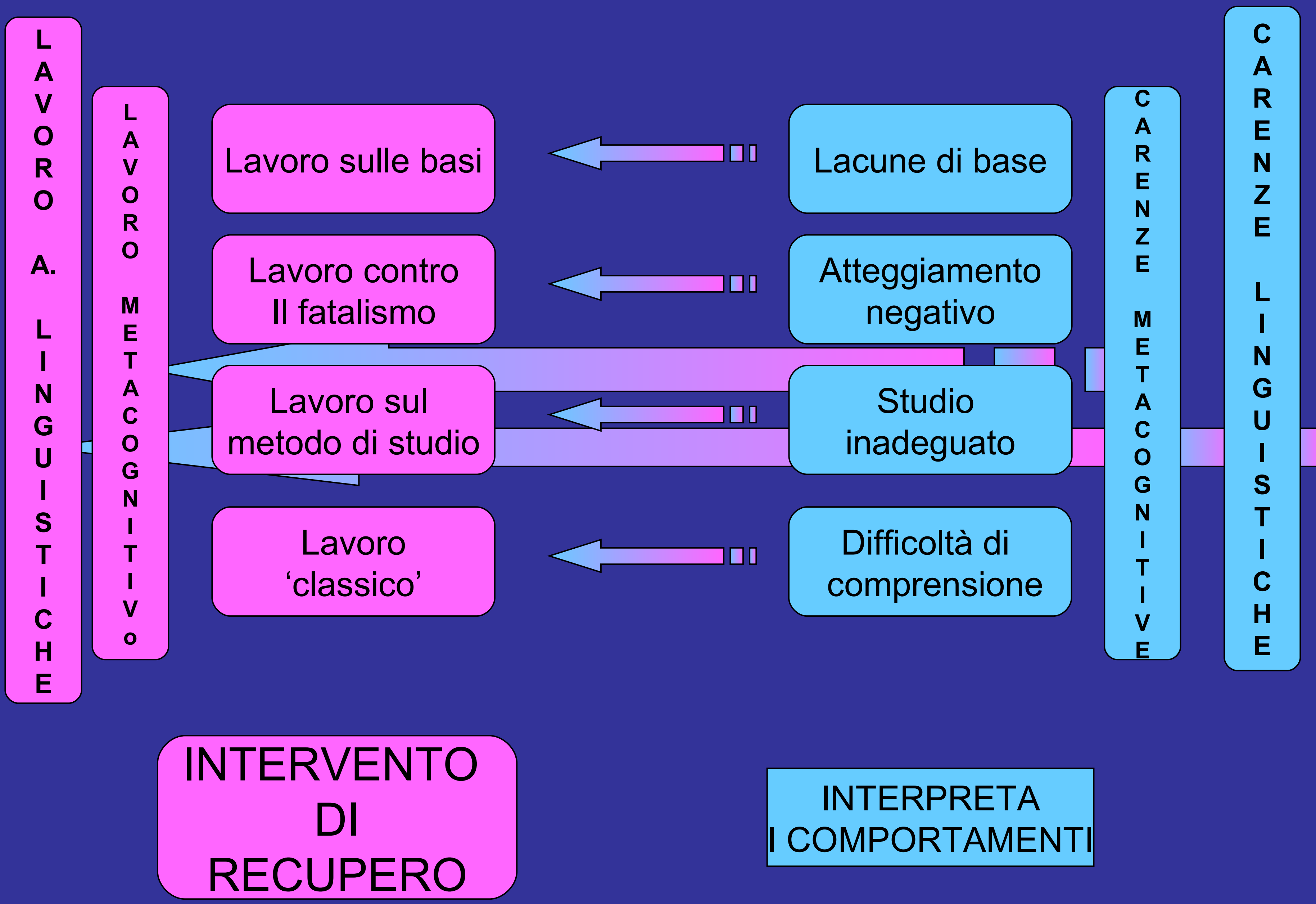

LAVORO A. LINGUISTICHE
LAVORO METACOGNITIVO
Lavoro sulle basi
Lavoro contro Il fatalismo
Lavoro sul metodo di studio
Lavoro 'classico'
Lacune di base
Atteggiamento negativo
Studio inadeguato
Difficoltà di comprensione
CARENZE METACOGNITIVE
CARENZE LINGUISTICHE
INTERVENTO DI RECUPERO
INTERPRETA I COMPORTAMENTI

Lavoro sul metodo di studio

Studio inadeguato

INTERVENTO DI RECUPERO

INTERPRETA I COMPORTAMENTI


LAVORO A. LINGUISTICHE
LAVORO METACOGNITIVO
Lavoro sulle basi
Lavoro contro Il fatalismo
Lavoro sul metodo di studio
Lavoro 'classico'
Lacune di base
Atteggiamento negativo
Studio inadeguato
Difficoltà di comprensione
CARENZE METACOGNITIVE
CARENZE LINGUISTICHE
INTERVENTO DI RECUPERO
INTERPRETA I COMPORTAMENTI

Lavoro contro
Il fatalismo

Atteggiamento
negativo

INTERVENTO
DI
RECUPERO

INTERPRETA
I COMPORTAMENTI

In questo incontro

- **Implicazioni per il recupero:**
  - ✓**Osservazioni generali**
  - ✓**Materiali ed esperienze:**
  - → Atteggiamenti negativi
  - → Abilità linguistiche e trasversali
  - → Abilità metacognitive
  - → Come si studia la matematica:
    - Definizioni
    - Dimostrazioni

Lavoro contro
Il fatalismo

Atteggiamento
negativo

INTERVENTO
DI
RECUPERO

INTERPRETA
I COMPORTAMENTI

Recupero (e prevenzione) di atteggiamenti negativi

Convinzione di

non poter riuscire in matematica

o viceversa convinzione di *non poter avere difficoltà*.

Visione della matematica come insieme di regole e formule da applicare a seconda dei vari casi e quindi approccio meccanico che richiede uno sforzo mnemonico immane.

aspetti affettivi

aspetti cognitivi

Atteggiamento negativo nei confronti della disciplina

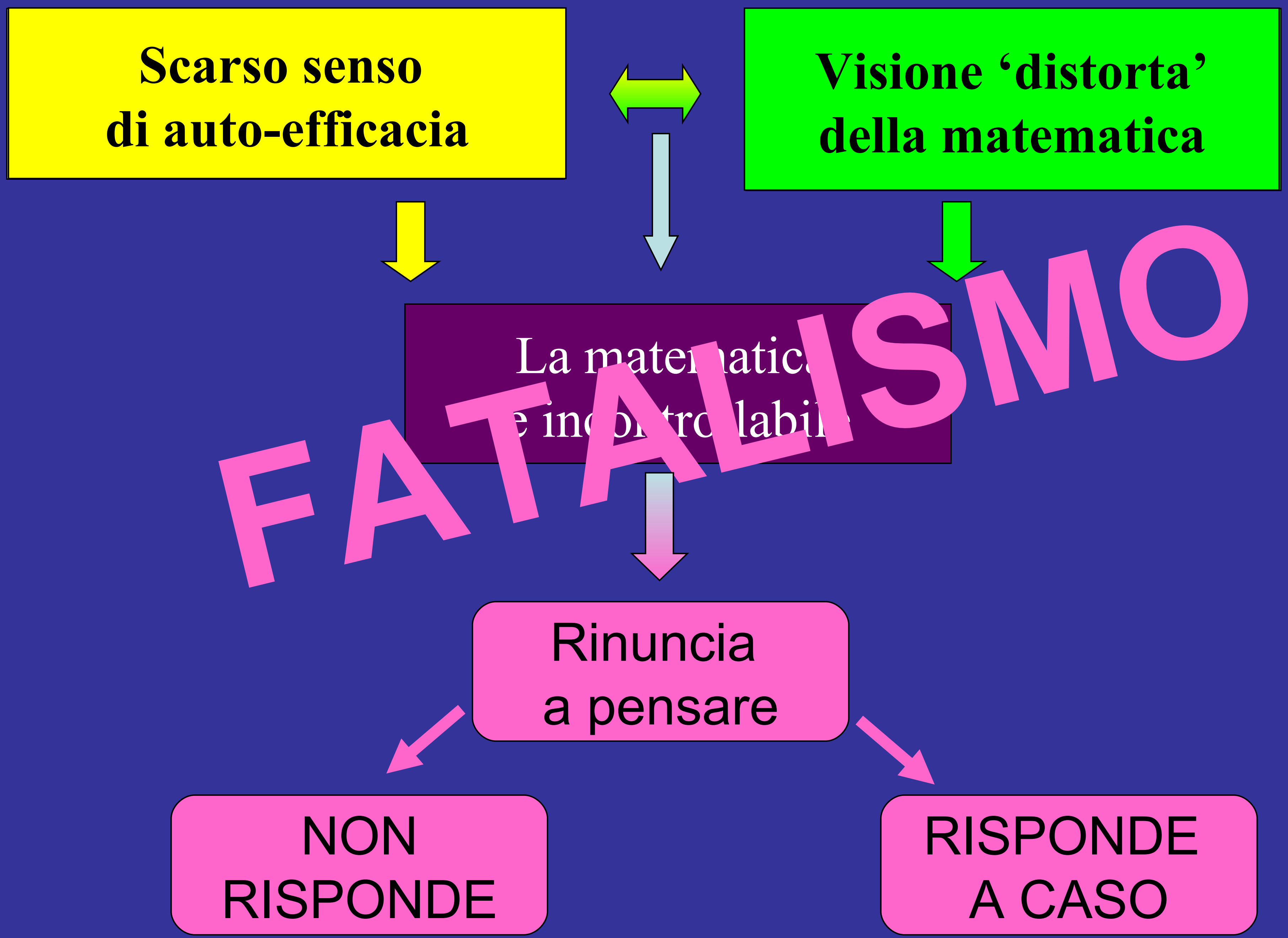
- Partire da problemi.
- Prestare attenzione ai processi.
- Non ignorare (NON CENSURARE) processi o prodotti scorretti.
- Sintetizzare elementi chiave alla fine.
- Favorire sia il lavoro individuale che quello collettivo.
- Favorire la discussione tra gli studenti.

LINGUAGGIO E COMUNICAZIONE

PROBLEM SOLVING

- Partire da problemi.
- Prestare attenzione ai processi.
- Non ignorare (NON CENSURARE) processi o prodotti scorretti.
- Sintetizzare elementi chiave alla fine.
- Favorire sia il lavoro individuale che quello collettivo.
- Favorire la discussione tra gli studenti.

IL PROBLEM SOLVING


Scarso senso di auto-efficacia
Visione 'distorta' della matematica
La matematica è incontrollabile
FATALISMO
Rinuncia a pensare
NON RISPONDE
RISPONDE A CASO

Contro il fatalismo…

…il problem solving:

- Per ricostruire il senso di auto-efficacia
- Per scardinare una visione della matematica distorta (formule da ricordare, esercizi tutti uguali, …)

Scarso senso di auto-efficacia

La matematica è incontrollabile

FATALISMO

Rinuncia a pensare

NON RISPONDE

RISPONDE A CASO

IL PROBLEM SOLVING

IMPEGNO MIRATO

↓

SUCCESSO

↓

SENSO DI AUTO-EFFICACIA

↓

ASSUNZIONE DELLA RESPONSABILITA' DELL'APPRENDIMENTO

Che tipo di problema?

Come usarlo?

Perché?

Scelte didattiche

…l’insegnante!

Scarso senso di auto-efficacia

Struttura matematica

Quali problemi?

Formulazione

Quale metodologia?

Scarso senso di auto-efficacia

Struttura matematica

Quali problemi?

Problemi:

- **che non richiedano prerequisiti scolastici**
- **che permettano l'*esplorazione***

Scarso senso di auto-efficacia

Quali problemi?

Richieste che valorizzino anche le risposte parziali

Formulazione

➢ La formulazione della richiesta

La domanda ha un ruolo cruciale per far sì che la percezione di successo sia associata al lavoro fatto, e non necessariamente alla risoluzione ‘completa’

Esempio

Avendo:

- 3 pantaloni di colore diverso (nero, marrone, blu)
- 4 maglie di colore diverso (giallo, verde, arancione, bianco)
- 2 paia di scarpe diverse (con le stringhe / senza stringhe)

quanti sono i modi diversi di combinare pantaloni, maglie, scarpe?

…per dare la risposta corretta devi trovarli TUTTI!

- Trova alcuni modi diversi di combinare pantaloni, maglie, scarpe
- Riesci a trovarli tutti?
- Come fai ad essere sicuro di averli trovati proprio tutti?

Scarso senso di auto-efficacia

Una metodologia che ‘forzi’ ad assumersi le responsabilità
Ad esempio: lavoro a coppie
E comunque: a gruppi omogenei

Quale metodologia?

Scarso senso di auto-efficacia ⟷ **Visione 'distorta' della matematica**

La matematica è incontrollabile

FATALISMO

Rinuncia a pensare

NON RISPONDE

RISPONDE A CASO

Visione 'distorta' della matematica

La matematica è incontrollabile

FATALISMO

Rinuncia a pensare

NON RISPONDE

RISPONDE A CASO

Che tipo di problema?

Come usarlo?

Perché?

Scelte didattiche

…l’insegnante!

Visione ‘distorta’ della matematica

Quali problemi?

Quale metodologia?

Visione ‘distorta’ della matematica

Struttura matematica

Quali problemi?

Problemi:

- **aperti**
- **che richiedano di formulare congetture**
- **che permettano più processi risolutivi**

➢ La formulazione della domanda

La domanda ha un ruolo cruciale per spostare l’attenzione dai prodotti ai processi

Una strategia…

- Fare in modo che non sia possibile una “ risposta corretta” che prescinda dai processi di pensiero.

  Esempi:

- *Non* chiedere “Trova…”, ma chiedere solo: “Come faresti a trovare…?”
- Eliminare i dati numerici, chiedendo:

  “Quali dati ti servirebbero?”

Visione 'distorta' della matematica

- **Formulare la richiesta: "Come faresti per…"**
- **Non mettere (solo) dati numerici**

Quali problemi?

Formulazione

Visione 'distorta' della matematica

- richiedere la verbalizzazione
- favorire il confronto, la discussione

Quale metodologia?


Scarso senso di auto-efficacia
Visione 'distorta' della matematica
FATALISMO
Rinuncia a pensare
NON RISPONDE
RISPONDE A CASO

Scarso senso di auto-efficacia ⟺ **Visione 'distorta' della matematica**

1. PROPOSTA PER I LABORATORI

1.1 Individuare una serie di problemi adatti per scardinare il basso senso di auto-efficacia (eventualmente riformulando opportunamente la domanda)

1.2 Individuare una serie di problemi adatti per scardinare una visione della matematica come disciplina fatta di regole da memorizzare e applicare

In questo incontro

- **Implicazioni per il recupero:**
  - ✓ **Osservazioni generali**
  - ✓ **Materiali ed esperienze:**
    - → Atteggiamenti negativi
    - → Abilità linguistiche e trasversali
    - → Abilità metacognitive
    - → Come si studia la matematica:
      - Definizioni
      - Dimostrazioni

Abilità linguistiche e trasversali

Abilità linguistiche e trasversali

RAPPRESENTARE

UNO DEI TEST INIZIALI (LA FASE ‘DIAGNOSTICA’)

Qui di seguito ci sono 4 problemi, che tu devi cercare di risolvere.
IMPORTANTE!!!
Cerca di scrivere tutti i tuoi pensieri, tutti i ragionamenti che fai, le impressioni
e le emozioni che provi, le difficoltà che incontri.
E' quello che pensi e che provi che ci interessa, <u>non</u> il risultato!

<u>PROBLEMA 1</u>: Andando a pesca il signor Max ha pescato un grosso pesce;
la sua coda pesa 4 kg, il suo tronco pesa quanto la sua testa e la sua coda insieme;
la sua testa pesa quanto metà tronco più la coda.
Quanto pesa tutto il pesce?

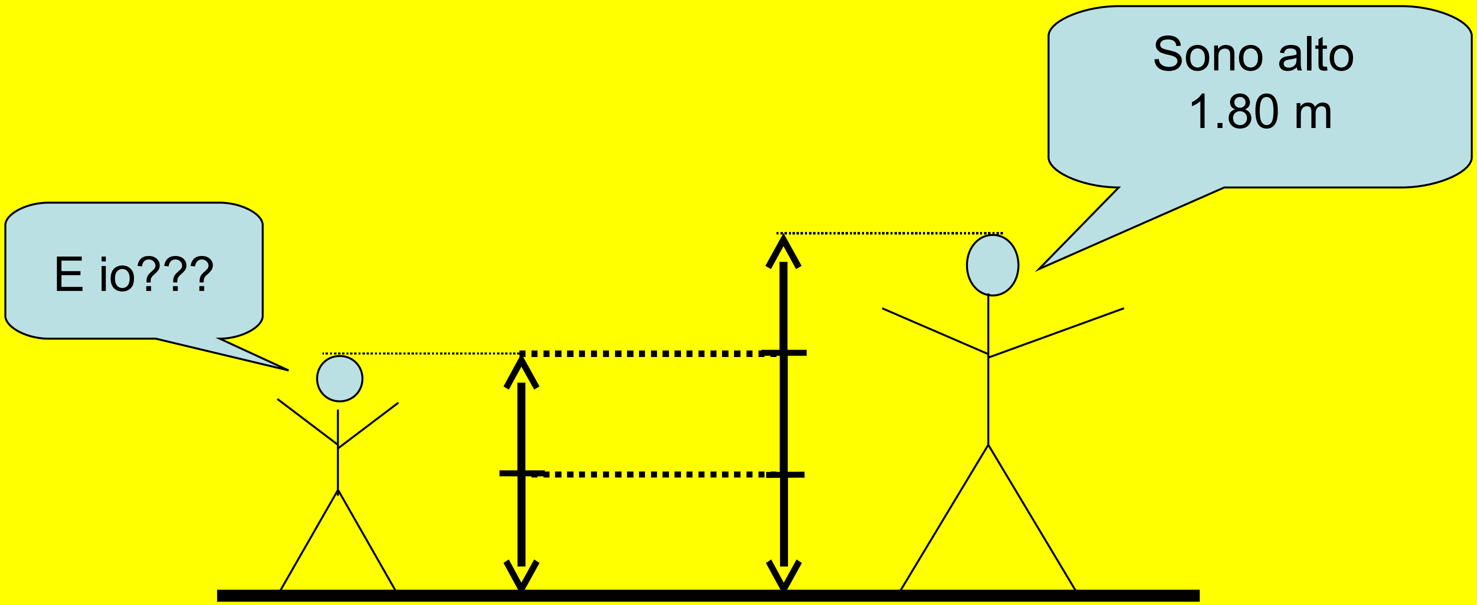
<u>PROBLEMA 2</u>: Un arabo compra un tappeto pagandolo 80 dollari,
e poi lo rivende a 90 dollari.
Dopo un po' di tempo ricompra lo stesso tappeto per 100 dollari, e
poi lo rivende ancora a 110 dollari.
Quanto ha guadagnato?

<u>PROBLEMA 3</u>: In un rettangolo il perimetro misura 112 cm,
e la base è 4/3 dell'altezza.
Calcola l'area del rettangolo.

<u>PROBLEMA 4</u>: Un'automobile percorre 6 km in 4 minuti.
In quanti minuti percorre 7 km?

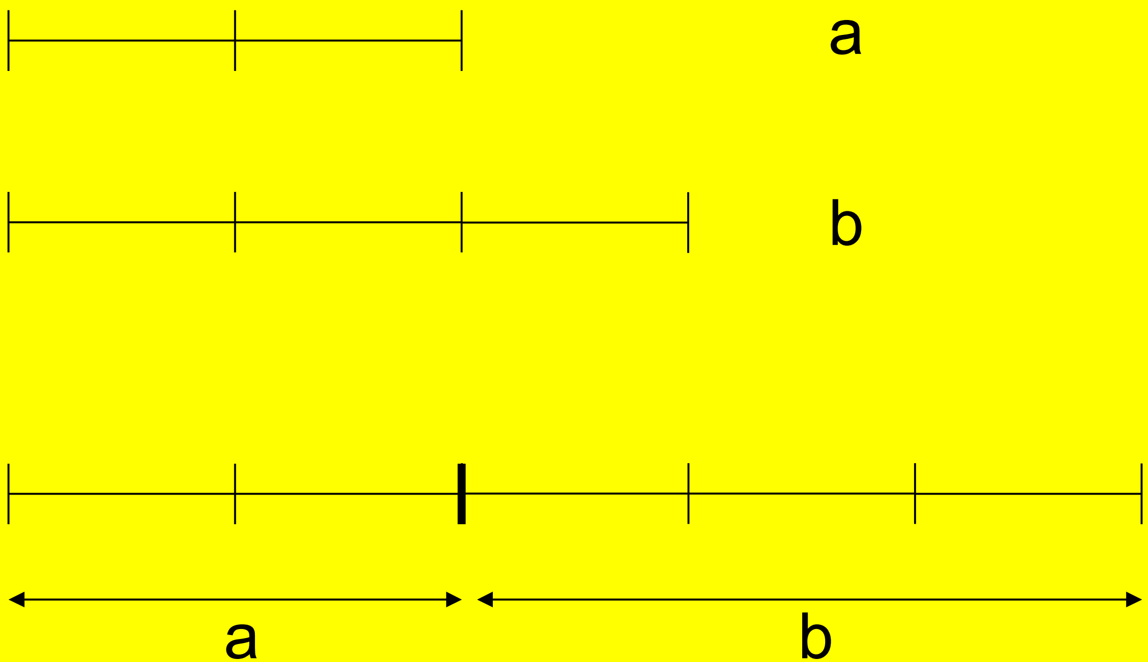
1° INCONTRO: SENZA PAROLE

Ovvero: quando il disegno parla…



1° INCONTRO: SENZA PAROLE

Ovvero: quando il disegno parla…



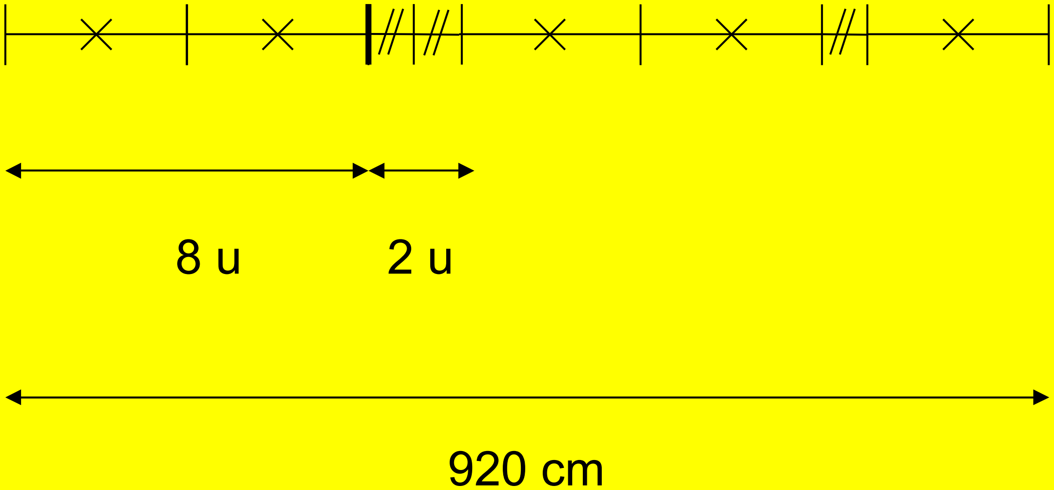
a + b = 20 cm

a = ?

b = ?

1° INCONTRO: SENZA PAROLE

Ovvero: quando il disegno parla…



u = ?

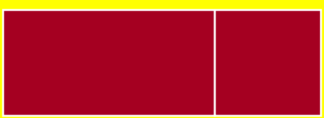
1° INCONTRO: SENZA PAROLE

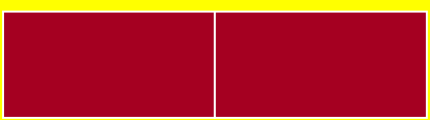
Ovvero: quando il disegno parla…

Quale fra i seguenti disegni corrisponde secondo te al problema:

"Un mattone pesa 1kg più mezzo mattone. Quanto pesa un mattone?"

a] 

b] 

c] 

d]

A proposito, quanto pesa il mattone?

2° INCONTRO, **ovvero:**

CON L'AIUTO DI UN DISEGNO SI POSSONO FARE TANTE COSE...
anche aver la meglio sulle frazioni!

1.

Una torre, alta in tutto 12 mattoncini Lego, è fatta per un pezzo di mattoncini verdi, per l'altro pezzo di mattoncini bianchi. Il piano verde è alto metà del piano bianco.

Quanto sono alti i due piani?

2.

In un'altra torre, alta invece 14 mattoncini, c'è un piano verde, un piano bianco, un piano rosso. Il piano verde è alto metà del piano bianco, e il piano rosso è alto il doppio del piano bianco.

Quanto sono alti i tre piani?

3.

Nell'ultima torre (finalmente!), che è alta 36 mattoncini, ci sono: un piano verde, uno bianco, uno rosso. Il piano verde è alto metà del piano bianco, che è alto 1/3 del piano rosso.

Quanto sono alti i tre piani?

3° INCONTRO

ovvero

SEMPRE PIU' DIFFICILE!

1.

Una torre di mattoncini Lego è fatta di 3 piani di colori diversi: verde, bianco, rosso.

Il 1° piano è alto 1 mattoncino Lego.

Il 2° piano è alto tanti mattoncini Lego quanto il 1° piano e il 3° insieme.

Il 3° piano è alto tanti mattoncini Lego quanto il 1° piano più metà del 2°.

Quanto sono alti i tre piani?

P.S.: vi ricorda niente questo problema?

4° INCONTRO
ovvero
E SE FOSSE GEOMETRIA?

1.

In un rettangolo la base è 4/3 dell'altezza, e il perimetro misura 280 cm.

Qual è l'area del rettangolo?

2.

Un rettangolo e un quadrato hanno lo stesso perimetro: 100 cm.

L'altezza del rettangolo è 3/5 del lato del quadrato.

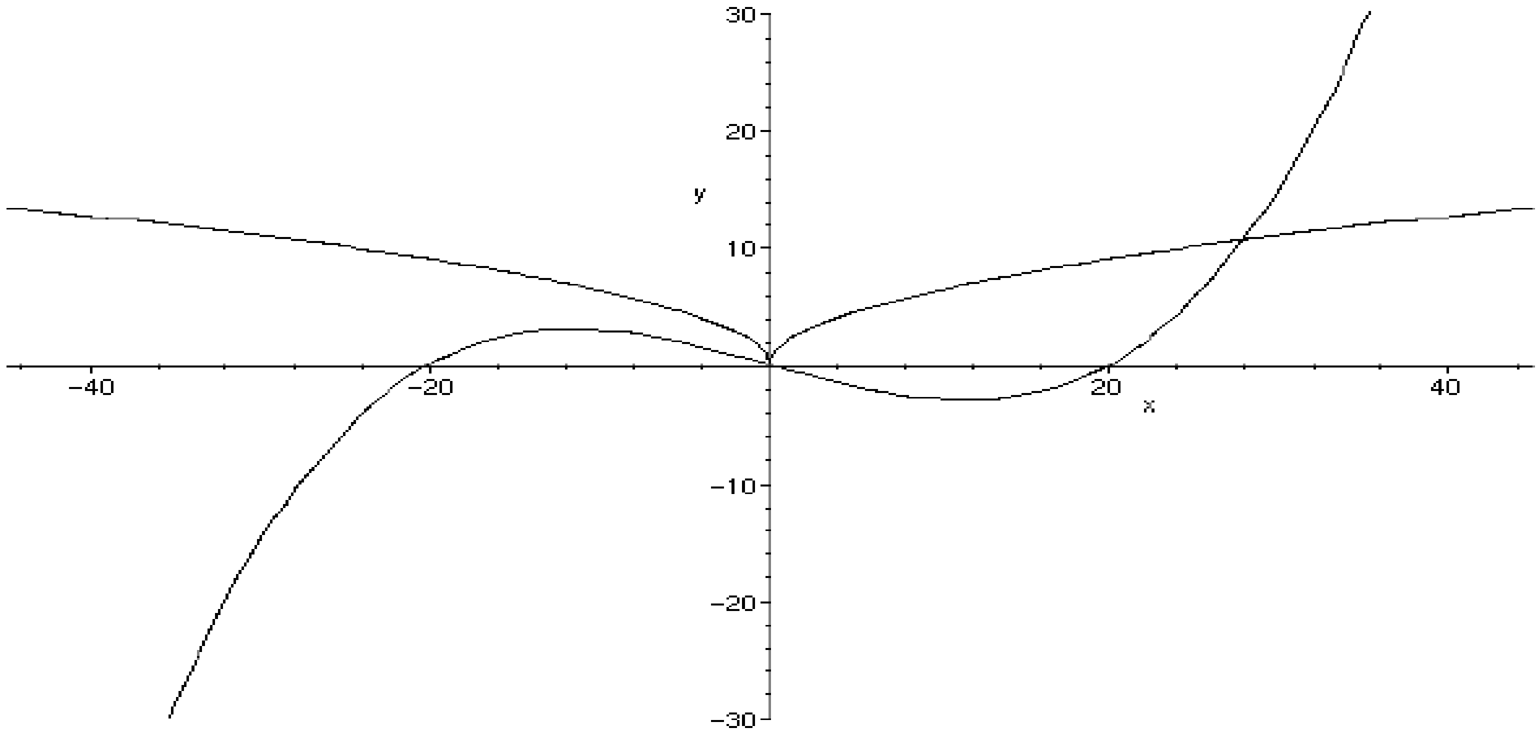
Qual è l'area del rettangolo?

Dal progetto P.O.R.T.A. e dai precorsi della Facoltà di Scienze

Cambio di rappresentazione

- La differenza tra la rappresentazione di un oggetto matematico e l'oggetto stesso.
- Diverse rappresentazioni di un oggetto matematico possono fornire informazioni diverse su uno stesso oggetto.
- Importanza di trattare uno stesso oggetto in diversi sistemi di rappresentazione.
- Importanza di una dialettica tra rappresentazione grafica e algebrico-analitica e il suo ruolo nello studio di equazioni e disequazioni, di funzioni, di curve.

In figura sono rappresentate le curve di equazioni $y = 2\sqrt{|x|}$ (curva $\mathcal{C}_1$) e $y = \frac{1}{1000}(x^3 - 400x)$ (curva $\mathcal{C}_2$).



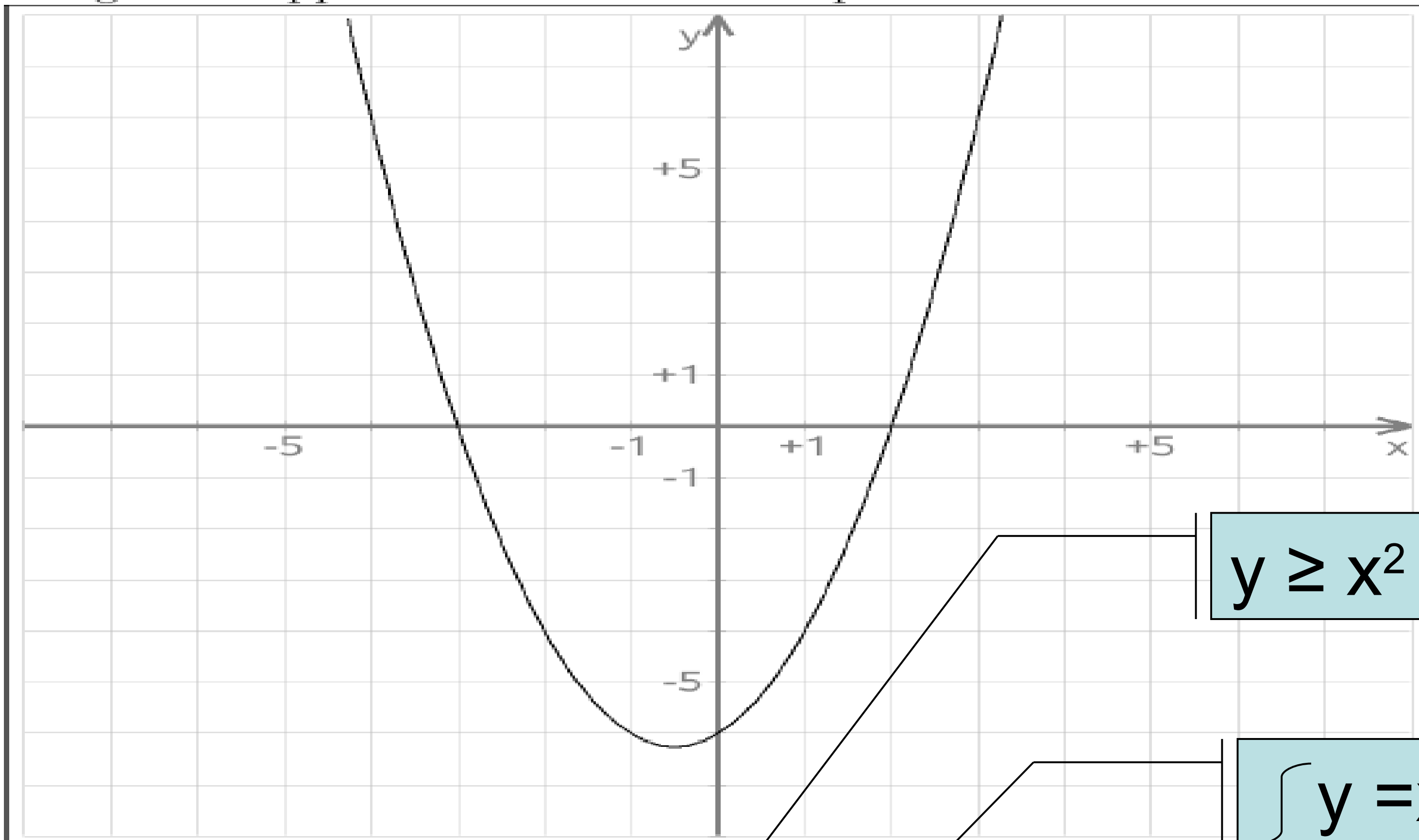
1. L'equazione $2\sqrt{|x|} = \frac{1}{1000}(x^3 - 400x)$ ha soluzione?

   In caso affermativo segna sul grafico (sull'asse x) tutte le soluzioni dell'equazione.

2. La disequazione $2\sqrt{|x|} \geq \frac{1}{1000}(x^3 - 400x)$ ha soluzione?

   In caso affermativo segna sul grafico (sull'asse x) tutte le soluzioni della disequazione.

In figura è rappresentata la curva di equazione $x^2 + x - 6$:



$y \geq x^2 + x - 6$

$$\begin{cases} y = x^2 + x - 6 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

1. Qual è l'insieme di tutte le soluzioni della disequazi

2. Prova a rappresentare sul piano (magari usando colori diversi) l'insieme dei punti (x, y) tali che:

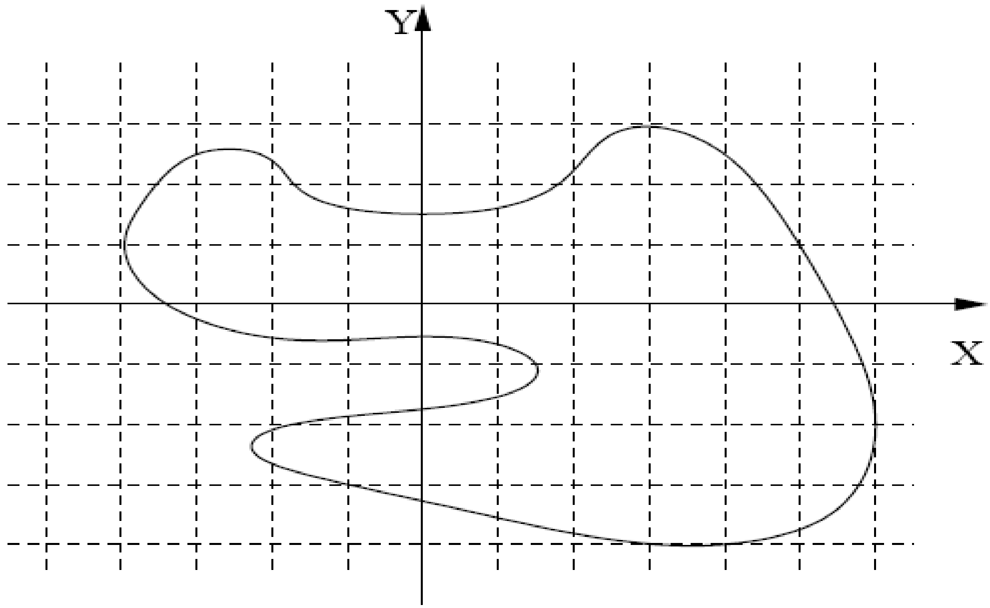
   (a) $y \geq x^2 + x - 6$

   (b) $\begin{cases} y = x^2 + x - 6 \\ y \geq 0 \end{cases}$

   (c) $x^2 + x - 6$

$x^2 + x - 6 \geq 0$

Considera la curva disegnata qui sotto:



- Di un punto del piano sappiamo che ha ascissa 2 e che appartiene alla curva. Quale ordinata può avere?

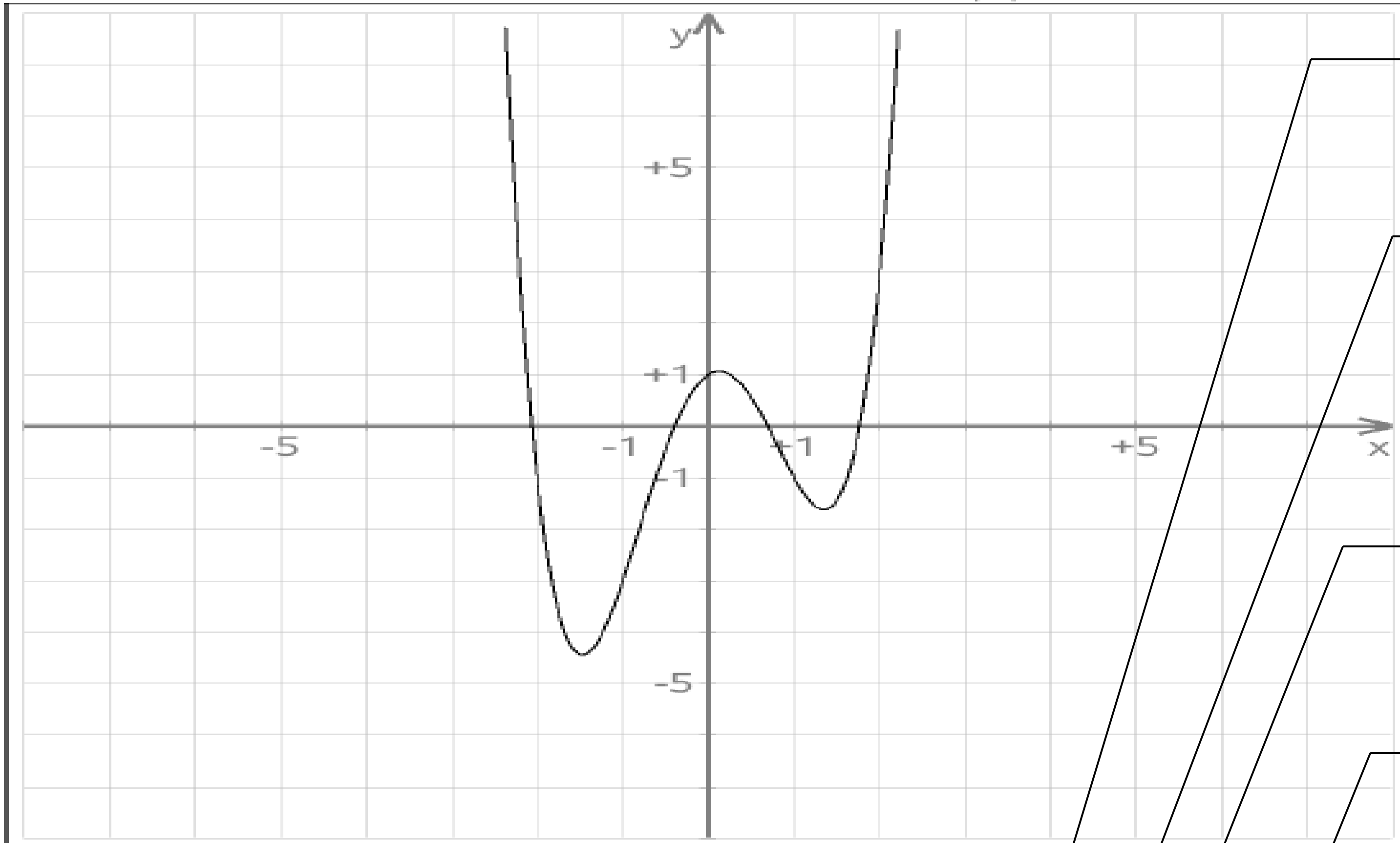
- Un punto del piano di ascissa 3 può appartenere alla curva? Se sì, quale può essere la sua ordinata?

- Un punto del piano di ordinata 1 può appartenere alla curva? Se sì, quale può essere la sua ascissa?

- Quale ascissa possono avere i punti che appartengono alla curva?

- Quale ordinata possono avere i punti che appartengono alla curva?

Considera il seguente grafico della funzione $f(x)$:



$f(x)=k$

$f(x)>k$

$f(x)=x+k$

$f(x)<x+k$

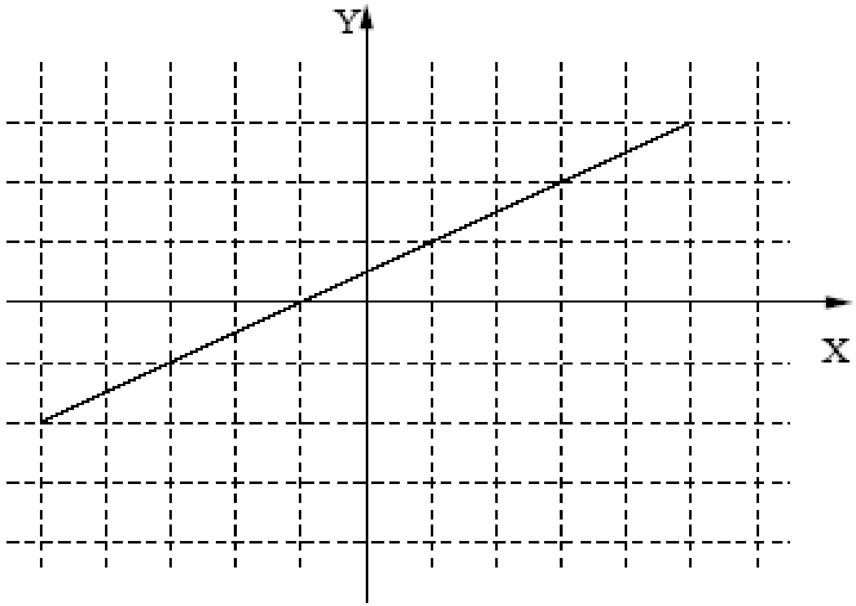
1. Discuti la risolubilità dell'equazione $f(x) = k$ (dove k è un numero reale fissato).

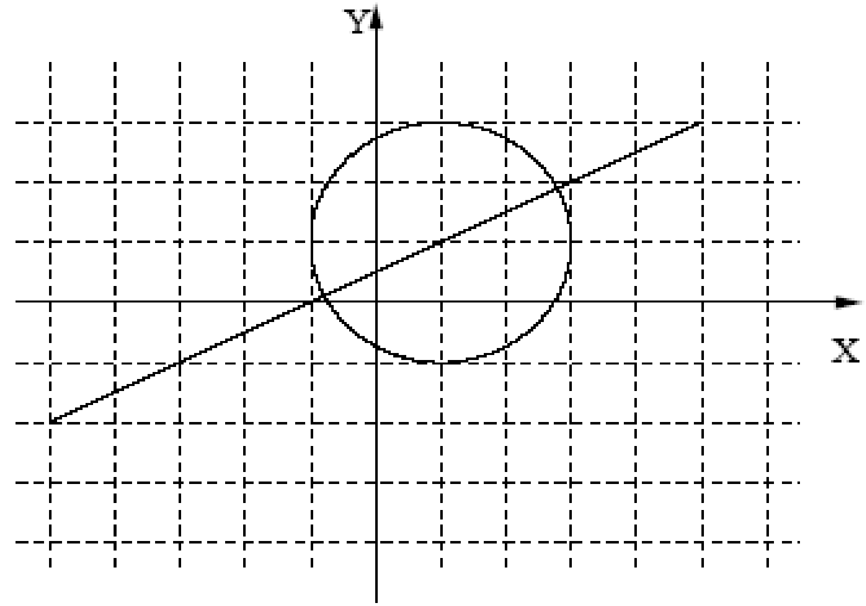
2. Discuti la risolubilità della disequazione $f(x) > k$ (dove k è un numero reale fissato).

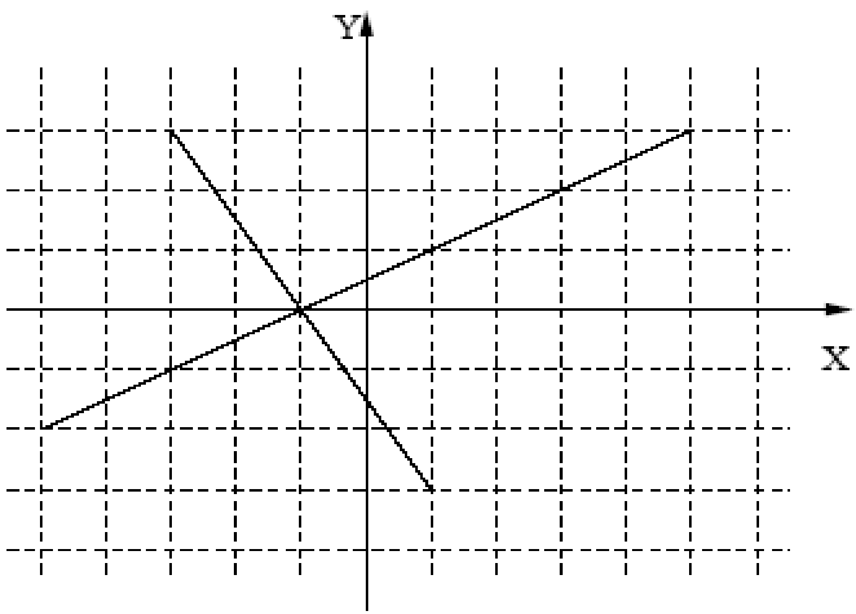
3. Discuti la risolubilità dell'equazione $f(x) = x + k$ (dove k è un numero reale fissato).

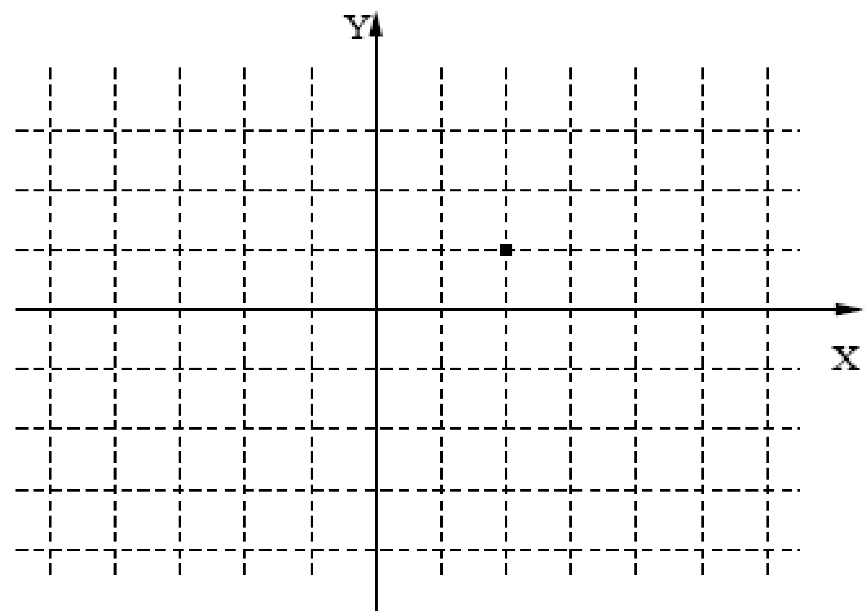
4. Discuti la risolubilità della disequazione $f(x) < x + k$ (dove k è un numero reale fissato).

Prova a scrivere equazioni e disequazioni le cui soluzioni siano proprio i punti del piano che appartengono alle quattro figure rappresentate qui di seguito:









Abilità linguistiche e trasversali

L’ATTENZIONE

Esempi

Sull’attenzione:

- In classe ogni persona che interviene deve ripetere brevemente l’intervento precedente
- Ascolto di un brano (musica, rumori, …)
- Osservazione di un’immagine
- …vedi ‘giochi di Kim’ degli scout e altri
- Gioco sulla comunicazione

Ciao! Da quando hai cambiato sede non ci si vede più!

Come sta tua madre? Mi ha detto Ornella che al consiglio d'istituto di mercoledì non c'eri, perché si era sentita di nuovo male …

Anch'io ho passato un periodo proprio pesante: Alessandro ha avuto la febbre alta per una settimana, e non c'era verso di fargliela calare e di capire cos'aveva. Dicevano un virus… sai quando non capiscono cos'è… Comunque fortunatamente è passata, virus o non virus…ed è già tornato a scuola. Sai com'è lui …

A proposito di scuola, hai sentito cos'è successo ieri? E' caduto un pezzo di intonaco sulle scale. Meno male non era l'orario di entrata o di uscita, e non e' successo niente di grave. A parte che ora la scuola e' chiusa, e si parla di fare i doppi turni nell'altra sede. Al solito c'è chi la prende bene, tutto contento, e chi non sa come organizzarsi… Per me sarà proprio un problema.

Ora *facendo riferimento al vostro testo*, rispondete:

(1) Che lavoro fa chi parla?

(2) Che lavoro fa la persona con cui parla?

(3) Che lavoro fa il marito della persona che parla?

2. PROPOSTA PER I LABORATORI

Costruire dei materiali / attività per un percorso di recupero (interdisciplinare) sugli aspetti trasversali, ad esempio su:

2.1 Attenzione

2.2 Aspetti linguistici

….

In questo incontro

- **Implicazioni per il recupero:**
  - ✓ **Osservazioni generali**
  - ✓ **Materiali ed esperienze:**
  - → Atteggiamenti negativi
  - → Abilità linguistiche e trasversali
  - → Abilità metacognitive
  - → Come si studia la matematica:
    - Definizioni
    - Dimostrazioni

Abilità metacognitive

Una griglia utilizzata per le prove scritte

Prima di cominciare
Leggi gli esercizi.
Quale pensi che ti riesca meglio?
E quale peggio?
Quale pensi che richieda più tempo?
Quale meno?
In quali pensi di poter controllare i risultati,
in modo da essere sicuro di averlo fatto correttamente?
Ora puoi cominciare.

INIZIO ORE: ________

TESTO

FINE ORE: ________
Dopo aver finito
Come pensi di averlo fatto?
Su cosa basi la tua impressione? (hai controllato i passaggi,
ti sembra convincente il risultato, sai di saper fare quel tipo di esercizi, oppure....)
Pensando ad una valutazione di x punti per ogni esercizio,
quale voto pensi di poter prendere?
Eventuali osservazioni:

Un esempio di scheda per l'autovalutazione

Se hai anche un solo errore in un esercizio della casella a sinistra, riguarda l'argomento indicato nella corrispondente casella a destra.

Non procedere con i fogli successivi finché non hai completato correttamente questo!

Se hai fatto errori nell'esercizio ↓	**...riguarda l'argomento ↓**
1	distanza fra 2 punti
2; 3; 4; 5	vettori
6; 7; 8; 9; 10	prodotto scalare
11; 12; 13; 14; 15	equazione di un piano
16	distanza punto - piano
17; 18; 19; 20; 21; 22; 23; 24; 25	equazioni di una retta nello spazio

INSIEMI E LOGICA

Nome e cognome: ERIKA PIACENTINI

PRIMA di studiare	**DOPO aver studiato**
DATA: 19-9-96 ORE: 10:00 Pensi di essere preparato su questo argomento? ☐ sì ☒ poco ☐ per niente ☐ non so	DATA: 20/9/96 ORE: 16:00 Pensi di essere preparato su questo argomento? ☒ sì ☐ poco ☐ per niente ☐ non so Confronta questa risposta con quella che hai dato *quando hai finito* il questionario PRIMA. E' diversa? Sì

0. In questa unità utilizzeremo i seguenti simboli e/o vocaboli:

VOCABOLARIO

insieme appartenenza sottinsieme insieme vuoto unione intersezione
differenza prodotto cartesiano per ogni esiste implica
$\{1, 2, 3, 6,9\}$ $x \in A$ $A \subset B$ $A \cup B$ $A \cap B$ AxB $A \setminus B$ $\varnothing$ $\forall$ $\exists$ $\Rightarrow$

Riporta nel riquadro qui sotto i **simboli e i vocaboli che non conosci:**

PRIMA	**DOPO**
$A \setminus B$ $A \times B$ prodotto cartesiano differenza	

I QUESTIONARI PRIMA/DOPO

1. Sono usati correttamente i simboli nelle seguenti espressioni? (le lettere maiuscole indicano insiemi, le minuscole elementi di tali insiemi)

PRIMA	DOPO
a] $A \in B$ si ☐ no ☐ non so ☐	**a]** $A \in B$ si ☐ no ☐ non so ☐
b] $a \subset B$ si ☐ no ☐ non so ☐	**b]** $a \subset B$ si ☐ no ☐ non so ☐
c] $A \cap B \cap C$ si ☐ no ☐ non so ☐	**c]** $A \cap B \cap C$ si ☐ no ☐ non so ☐
d] $\{a\} \cup B$ si ☐ no ☐ non so ☐	**d]** $\{a\} \cup B$ si ☐ no ☐ non so ☐
e] $a \cap B$ si ☐ no ☐ non so ☐	**e]** $a \cap B$ si ☐ no ☐ non so ☐
Sei sicuro delle risposte che hai dato? Se no, di quali risposte non sei sicuro? Perchè?	Sei sicuro delle risposte che hai dato? Se no, di quali risposte non sei sicuro? Perchè?

2. E' vero o falso?

PRIMA	DOPO
a] $\{1,2,3,4\} = \{1,4,3,2\}$ vero ☐ falso ☐ non so ☐	**a]** $\{1,2,3,4\} = \{1,4,3,2\}$ vero ☐ falso ☐ non so ☐
b] $\{3,3,5,7\} = \{3,5,7\}$ vero ☐ falso ☐ non so ☐	**b]** $\{3,3,5,7\} = \{3,5,7\}$ vero ☐ falso ☐ non so ☐

PRIMA	DOPO
Il questionario è finito.	Il questionario è finito.
Sono le ore: 21:55	Sono le ore: 18:45
Conta quante volte hai risposto "non so": 25	Conta quante volte hai risposto "non so": 1
Conta su quante singole domande hai risposto di "non essere sicuro": 2	Conta su quante singole domande hai risposto di "non essere sicuro": 3
Adesso che hai finito, pensi di essere preparato su questo argomento?	Controlla per ogni domanda quante volte hai dato risposte diverse fra il questionario PRIMA e quello DOPO.
☐ sì ☐ poco ☒ per niente ☐ non so	Conta quante risposte diverse hai trovato: 2
Confronta la risposta che hai dato ora con quella che hai dato all'inizio.	Ti sembra di aver migliorato la tua preparazione? SI
E' diversa? SÌ	Rispondi ancora: pensi di essere preparato su questo argomento?
Se sì, come mai? PENSAVO DI RICORDARE MEGLIO L'ARGOMENTO	☒ sì ☐ poco ☐ per niente ☐ non so
In ogni caso, segna qui di seguito eventuali dubbi, incertezze, domande, che il questionario PRIMA ti ha provocato:	In ogni caso, segna ancora qui di seguito eventuali dubbi, incertezze, domande, che il questionario DOPO ti ha provocato:
CHE COSA SONO I SIMBOLI: ; , CA , xRy	

Il questionario prima / dopo...

➔ *non* è un test d'ingresso

➔ ma uno *strumento di lavoro:*

- per lo studente
- per l'insegnante

↘ prende consapevolezza delle proprie conoscenze

↘ dirige in modo consapevole l'attenzione durante lo studio o la lezione

↘ riconosce i (piccoli) progressi

↘ dopo aver studiato, ha il senso del lavoro fatto

↘ prima della lezione, conosce le convinzioni degli studenti

↘ dopo la lezione, ne controlla gli effetti

↘ può correggere il tiro

↘ riconosce i (piccoli) progressi

↘ ha il senso del lavoro fatto

3. PROPOSTA PER I LABORATORI

Costruire dei materiali / attività per un lavoro sugli aspetti metacognitivi, eventualmente da inserire / coordinare con altri percorsi nel contesto della matematica.

In questo incontro

- **Implicazioni per il recupero:**
  - ✓ **Osservazioni generali**
  - ✓ **Materiali ed esperienze:**
  - → Atteggiamenti negativi
  - → Abilità linguistiche e trasversali
  - → Abilità metacognitive
  - → Come si studia la matematica:
    - Definizioni
    - Dimostrazioni

Come si studia la matematica

Lavoro sul metodo di studio

Studio inadeguato

INTERVENTO DI RECUPERO

INTERPRETA I COMPORTAMENTI

Dal progetto P.O.R.T.A. e dai precorsi della Facoltà di Scienze

LINGUAGGIO E COMUNICAZIONE

PROBLEM SOLVING

Incontro:	CONTENUTI	ABILITA' TRASVERSALI
1	**NUMERI**	Definire. Dimostrare
2	**EQUAZIONI E DISEQUAZIONI**	Definire. Dimostrare.
3	**Trigonometria**	**SEGUIRE UNA LEZIONE PRENDERE APPUNTI**
4	Multiplo, funzione, funzione monotona	**DEFINIRE**
5	Aritmetica, …	**DIMOSTRARE**

Precorso: i 5 incontri

Definizioni

- Concept definition
- Concept image

In genere quando l'allievo deve richiamare / utilizzare / ricordare una definizione, fa riferimento all'immagine che ne ha costruito, e non alla definizione rigorosa.

Esempio: definizione di multiplo

Leggi attentamente la seguente definizione di multiplo di un numero intero tratta da un libro di testo universitario:

Se a,b sono elementi di Z, diremo che b è un multiplo di a se esiste un intero c tale che: $b = a \cdot c$

Ti sembra di aver capito la definizione?

Se non l'hai capita:

- Ci sono simboli che non conosci? Quali?
- Ci sono termini che non conosci? Quali?
- Ci sono espressioni che non conosci? Quali?

Rileggi la definizione e scrivi qui di seguito tutto quello che vorresti chiedere al professore che potrebbe aiutarti a capire.

Andrea dice: -6 è multiplo di 2 perché $2 \cdot (-3) = -6$

Barbara dice: no, perché -6 è più piccolo di 2 e quindi non può essere suo multiplo.

A chi dai ragione e perché?

Valerio dice: 3 non è multiplo di 2 perché $2 \cdot 0 = 0$, $2 \cdot 1 = 2$, $2 \cdot 2 = 4$, $2 \cdot 3 = 6$, ecc…

Riccardo dice: 3 è multiplo di 2 infatti: $2 \cdot 3/2 = 3$.

A chi dai ragione e perché?

Consideriamo i due insiemi

A= {1,2,3,4,5}

B= {0,1,2,3,4,5,6}

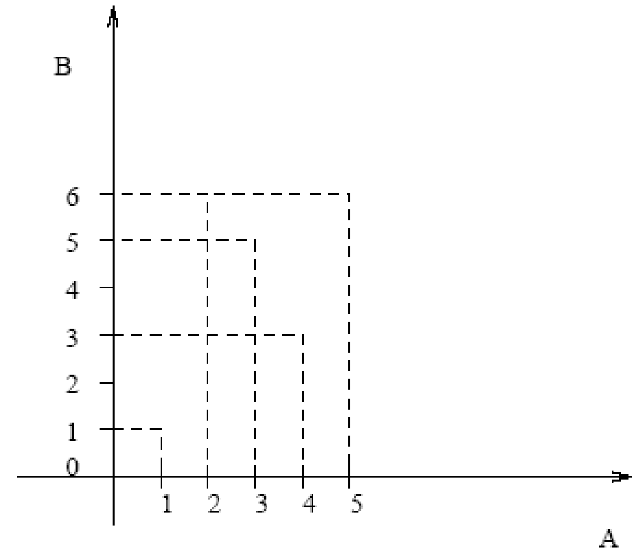
Quali dei seguenti grafici, tabelle, diagrammi, espressioni può rappresentare una funzione di A in B secondo la definizione data?

1.

se x è un elemento di A

$f(x) = x^3 + x + 1$

2.



3.

x	g(x)
1	4
2	2
3	0
4	3
5	3

4.

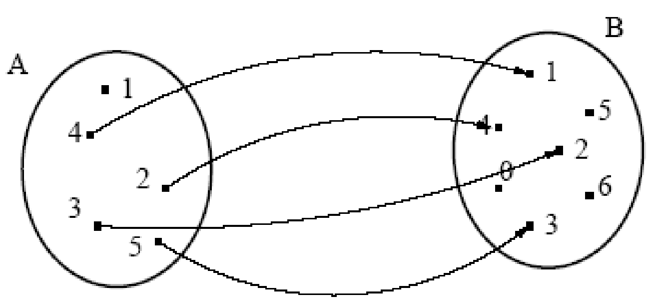
A \ B	0	1	2	3	4	5	6
1	×						×
2			×				
3					×		
4		×					
5				×			

5.

se x è un elemento di A

$$h(x) = \begin{cases} 2x+1 & se\ x \leq 2 \\ 1 & se\ x = 3 \\ x-1 & se\ x \geq 4 \end{cases}$$

6.



PROGETTO TRIO REGIONE TOSCANA

- http://www.progettotrio.it
- CATALOGO CORSI
- AREA: SCUOLA E FORMAZIONE
- Preparazione corsi di laurea universitari
- Titolo: Introduzione alla matematica. Lavorare con le definizioni
- 1381-TRL-W

Dimostrazioni

Analizzare una dimostrazione, ricostruire una dimostrazione, confrontare argomentazioni, analizzare la consistenza di argomentazioni.

Contesto matematico: aritmetica – multiplo di un intero, irrazionalità di $\sqrt{2}$.

TEOREMI E DIMOSTRAZIONI: l'irrazionalità di $\sqrt{2}$

Dimostriamo che il numero $\sqrt{2}$ è irrazionale, cioè non si può scrivere come rapporto tra due numeri interi.

Leggi attentamente

Perché (vedi3) si può supporre che *m* e *n* siano primi tra loro?

1) Dimostriamo *per*

2) Se $\sqrt{2}$ fosse razio i interi m e n tali che:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \qquad (*)$$

Perché (vedi5) se *m*² è pari anche *m* è pari?

3) Osserviamo che si può sempre supporre c la frazione $\frac{m}{n}$ sia ridotta ai minimi termini.

4) Dall'uguaglianza (*) segue che $m^2 = 2n^2$.

5) Poichè m^2 è pari, anche m è pari e quindi n deve essere dispari.

6) D'altra parte se poniamo $m = 2k$ abbia

In quale punto avevamo dedotto che *n* è dispari?

7 $^2 = 2k^2$.

8 ^{2} è pari.

In cosa consiste l'assurdo?

9) Quindi anche n è pari.

10) Ma avevamo n dispari.

11) Quindi siamo arrivati ad un assurdo.

Rispondi ora alle seguenti domande:

a) Cosa vuol dire dimostrare per assurdo?

b) Ti ricordi altre dimostrazioni per assurdo?

c) Perchè (vedi 3) si può supporre che m e n siano primi tra loro?

d) Perchè (vedi 4) si può scrivere $m^2 = 2n^2$?

e) Perchè (vedi 5) se m^2 è pari anche m è pari?

f) Perchè (vedi 6) si può porre $m = 2k$?

g) Da cosa si ricava (vedi 7) che $2n^2 = 4k^2$?

h) Perchè (vedi 8) allora n^2 è pari?

i) Perchè (vedi 9) allora n è pari?

j) Hai già usato nella dimostrazione il ragionamento al punto precedente?

k) Al punto 10 si ricorda che n è dispari. In quale punto l'avevamo dedotto? Perchè?

l) In cosa consiste l'assurdo?

m) Perchè il teorema è dimostrato?

Considera il seguente problema:
Sappiamo che $M = 3^5 \cdot 5^4 \cdot 7^{24} \cdot 13^{18}$. *È vero o no che* $M + 5$ *è multiplo di* 10*?*
La risposta alla domanda è sì e qui di seguito trovi un testo in cui sono riportate le dimostrazioni di questo fatto di due studenti. Le frasi dei due studenti sono state mescolate a casaccio tra loro. Sei in grado di ricostruire i due ragionamenti originari, sapendo che erano diversi ed entrambi matematicamente accettabili?

- Un numero che finisce per 0 è divisibile per 10.
- Quindi $M + 5$ è il prodotto di 5 per un numero pari.
- Se aggiungiamo 5 a un numero che finisce con un 5, la sua ultima cifra diventa 0.
- Quindi $M + 5 = 5(K + 1)$.
- Quindi è multiplo di 10.
- Possiamo scrivere $M = 5K$.
- $K + 1$ è pari, dato che K è dispari.
- M è dispari e multiplo di 5, quindi la sua cifra di destra è un 5.

Qui di seguito sono riportati ENUNCIATO e DIMOSTRAZIONE di un teorema, leggi entrambi molto attentamente:

Teorema: La somma di due numeri dispari consecutivi è un multiplo di 4.

1. Siano n e m due numeri dispari consecutivi,
2. possiamo supporre $n < m$,
3. e quindi $m = n + 2$.
4. Possiamo inoltre porre $n = 2k + 1$,
5. quindi $m = 2k + 3$.
6. Allora $n + m = (2k+1)+(2k+3)=4(k+1)$.
7. Il teorema è quindi dimostrato.

L'enunciato del teorema è chiaro? Pensi di aver capito la dimostrazione data? Eventualmente quali passi non sono chiari? Scrivi cosa chiederesti per capire meglio il teorema.

Il teorema di Rolle

1. Scrivi l'enunciato del teorema.

2. Quali sono le ipotesi?

3. Qual e' la tesi?

4. L'ipotesi che la funzione sia continua in un intervallo chiuso e' necessaria?

Perche' ? Cosa succede se si suppone che f sia continua nell'intervallo aperto?

5. L'ipotesi che f(a)=f(b) e' necessaria?

Perche'?

6. L'ipotesi che f sia derivabile nell'intervallo aperto e' necessaria?

Perche'?

7. In quali punti della dimostrazione viene utilizzato il fatto che f e' continua in [a,b] ?

8. In quali punti della dimostrazione viene utilizzata l'ipotesi che f e' derivabile in (a,b) ?

9. In quali punti della dimostrazione viene utilizzata l'ipotesi che f(a)=f(b)?

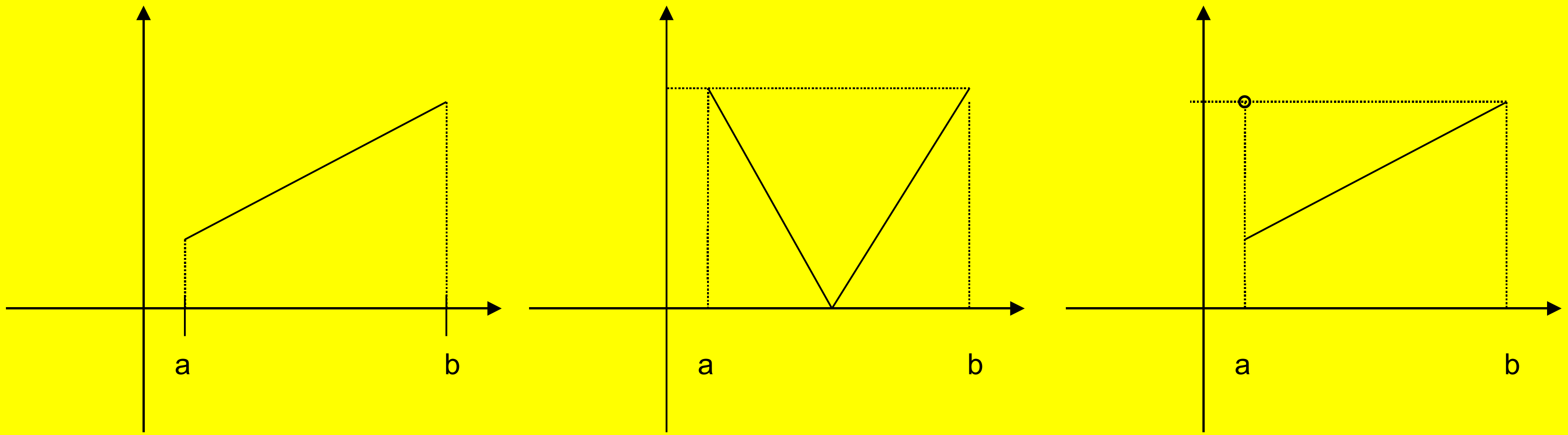
Il teorema di Rolle

10. La dimostrazione e' diretta o e' per assurdo?

11. Quali teoremi si sfruttano nella dimostrazione?

12. In quali teoremi successivi viene utilizzato il teorema di Rolle?

13. Osserva le seguenti figure: cosa ti suggeriscono, in relazione al teorema di Rolle?



Dimostrazioni: i commenti degli studenti

"L'incontro sulle dimostrazioni è stato il più interessante perché non avevo mai fatto un'attività del genere!"

"L'incontro che mi è piaciuto di più è stato quello sulla dimostrazione di teoremi perché mi affascinavano i ragionamenti."

"L'incontro sulle dimostrazioni è stato il più interessante perché dovevamo porci in prima persona davanti a domande di ragionamento e questo ha reso la lezione anche più divertente."

4. PROPOSTA PER I LABORATORI

Costruire dei materiali / attività per un lavoro sullo studio della matematica.

5. PROPOSTA PER I LABORATORI

Costruire dei materiali / attività per un lavoro di recupero:

5.1 sulle ‘basi’

5.2 sui contenuti

FINE