Riflessioni sull' insegnamento dell'Algebra

Nicolina A. Malara
Dipartimento di Matematica
Università di Modena & Reggio E.

Uno dei problemi didattici più delicati nel biennio della scuola secondaria superiore riguarda

le difficoltà che gli studenti incontrano nell'

approccio all' algebra

Le ragioni principali di queste difficoltà risiedono essenzialmente *nella pesante caduta di significato avvertita dagli studenti:*

il perchè occorra imparare a semplificare espressioni algebriche, a risolvere (dis)equazioni e sistemi, a tracciare grafici di funzioni rimane per loro oscuro.

Questo comporta negli studenti disaffezione e distacco e, di riflesso, negli insegnanti frustrazione e senso di impotenza.

Classici studi sulle difficoltà di apprendimento dell'algebra evidenziano come gli studenti:

- difettino di appropriate strutture aritmetiche dalle quali generalizzare;
- non abbiano consapevolezza di procedure e relazioni in aritmetica e del modo in cui esse nascono

non possiedano una base concettuale sulla quale costruire le loro conoscenze algebriche

Altri studi documentano che anche

allievi capaci di trasformare con facilità espressioni simboliche

non sono in grado di:

- tradurre relazioni in linguaggio algebrico
- sviluppare ragionamenti in termini formali

L'algebra non viene insegnata

nel rispetto della sua evoluzione storica

introducendola come:

- **linguaggio adatto a descrivere la realtà**
- **potente strumento di ragionamento e di previsione**

attraverso:

- ***la messa in formula***

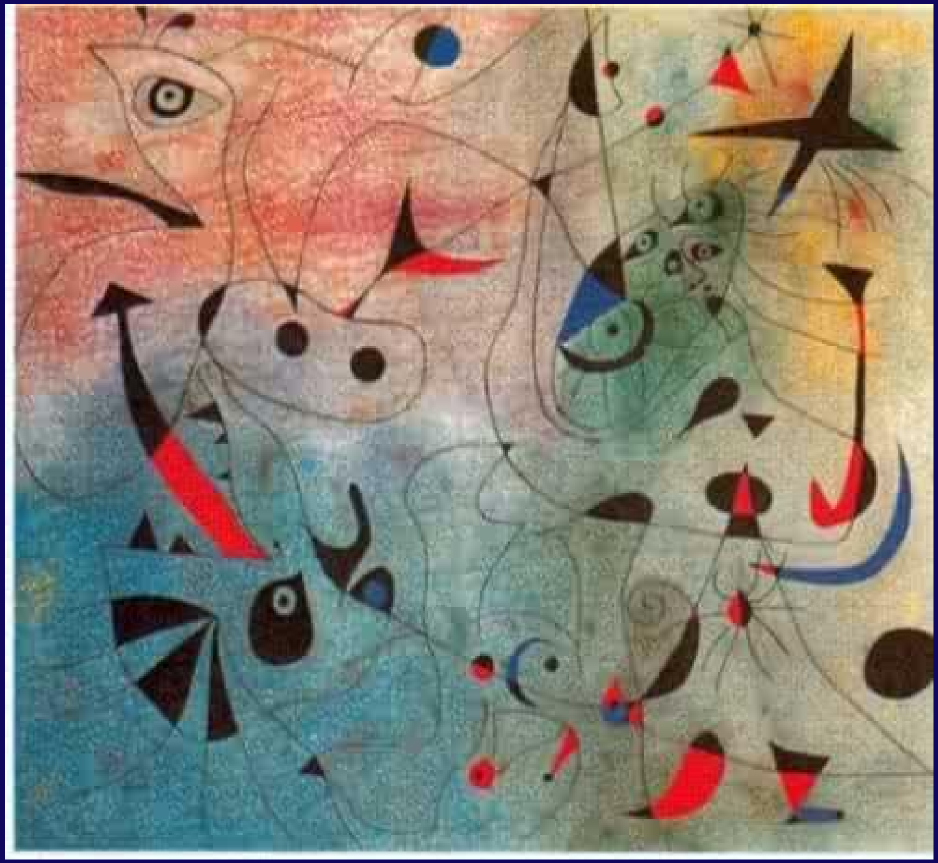
di conoscenze (o di ipotesi) sui fenomeni

- ***la derivazione di nuove conoscenze***

sui fenomeni stessi

mediante trasformazioni consentite dal formalismo algebrico

Le indicazioni della ricerca



Sin dai primi anni 80 la ricerca ha indicato una strada per la modifica di tale situazione sottolineando l’opportunità di promuovere

- un nuovo insegnamento dell’aritmetica, di tipo pre-algebrico, proiettato verso l’osservazione di regolarità, la generalizzazione e il riconoscimento di analogie,

- un’iniziazione all'algebra come linguaggio per la rappresentazione di situazioni problematiche al fine di evidenziare relazioni e/o elaborare informazioni

Durante il congresso ICME 8 (1992, Laval-Quebec), in seno al working group sui

Problemi di insegnamento-apprendimento dell’algebra

si è convenuto circa l’opportunità

di *‘algebrizzare’* sin dalla scuola elementare *l’insegnamento dell’aritmetica* gettando le basi dell’

Early algebra

come area disciplinare

e si è sottolinenato come l'insegnamento dell'algebra vada attuato in una

prospettiva linguistica e

metacognitiva

privilegiando

l'esplorazione di situazioni,

la rappresentazione delle informazioni

l' elaborazione delle rappresentazioni e la loro interpretazione in riferimento alla situazione considerata

I programmi

In molti paesi di influenza culturale nord-europea per la didattiac dell'algebra sono di prassi attività di

esplorazione,

osservazione di regolarità

generalizzazione

In Italia **cominciano ad apparire** nei libri di testo, ma in modo episodico e **non valorizzate nelle loro potenzialità**

C'è da ricordare tuttavia che tali attività entrano nel nostro insegnamento già con i programmi del '79 per la scuola media

In tali programmi

- vengono esaltati gli aspetti relazionali e strutturali dell' aritmetica
- viene proposto un approccio all'algebra come linguaggio per :
    - ➢ la modellizzazione di situazioni (sia tratte dal reale sia interne alla matematica)
    - ➢ l'elaborazione di informazioni

Questa diversa visione dell'algebra si proietta nel biennio delle superiori con i programmi del piano nazionale dell'informatica (1986) e quelli 'Brocca' (1991) apparendo persino nei programmi nella scuola elementare (1987).

viene promosso ad ogni livello scolare

lo studio delle relazioni

perché si attivino negli allievi atteggiamenti di

- ***osservazione***
- ***riflessione***
- ***Generalizzazione***

idonei ad un corretto approccio all'algebra

Nelle proposte di programma elaborate dalla commissione UMI-CIIM e MIUR (ex rif. Berlinguer)

Matematica 2001,
Matematica 2003, 2004

Le relazioni

costituiscono

uno dei nuclei fondanti

Nelle proposte di programma elaborate
dalla
commissione preposta nell'ambito
della riforma Moratti

Le relazioni

sono pervasive nello sviluppo del tema

Introduzione al pensiero razionale

Il trend è confermato nelle

indicazioni per i curricoli (min. Fioroni)

Matematica 2001 - 2003 - 2004

Nuclei fondanti

- Numeri ed algoritmi;
- Spazio e Figure;
- Relazioni e Funzioni;
- Dati e Previsioni;
- Argomentare, Congetturare, dimostrare
- Misurare;
- Risolvere e porsi problemi

Laboratorio di Matematica

(le interazioni tra le persone nel laboratorio)

Matematica 2001 - 2003 - 2004

Appaiono espliciti elenchi di "attività sconsigliate"

In 'numeri ed algoritmi' (Mat. 2003)

si sconsiglia di

- **calcolare espressioni numeriche eccessivamente complesse**
- **trasformare espressioni contenenti radicali (es. razionalizzazione del denominatore)**
- **Introdurre i monomi e poi i polinomi. L'oggetto matematico fondamentale è il polinomio**
- **Sottolineare eccessivamente la regola di Ruffini: è invece importante il teorema (II biennio)**

Matematica 2001 - 2003 - 2004

attività sconsigliate in ‘Relazioni e Funzioni (Mat 2003)

- ***Presentare le relazioni, in particolare le relazioni d’ordine, come argomento a sé***; **esse vanno riconosciute e considerate durante l’esame di proprietà dei vari insiemi numerici e delle funzioni elementari, come concetti che nascono generalizzando proprietà note**

- ***Introdurre precocemente simboli e formalismi non necessari***; **al contrario per rendere comprensibile ed apprezzabile l’uso dei simboli e delle formule conviene costruire e proporre, gradualmente, situazioni in cui siano evidenti i vantaggi di un linguaggio formale**

- ***Ridurre lo studio delle equazioni a pure tecniche manipolative per ottenere le soluzioni.*** **Lo studente innanzi tutto dovrà riconoscere e costruire equazioni lineari equivalenti e intenderne il significato**

I trend dal test internazionale di valutazione P.I.S.A.

P.I.S.A (dal 2000)

Programme for International Student Assessment

Punta a misurare le competenze dei quindicenni

Lettura - Matematica - Scienze - Problem Solving

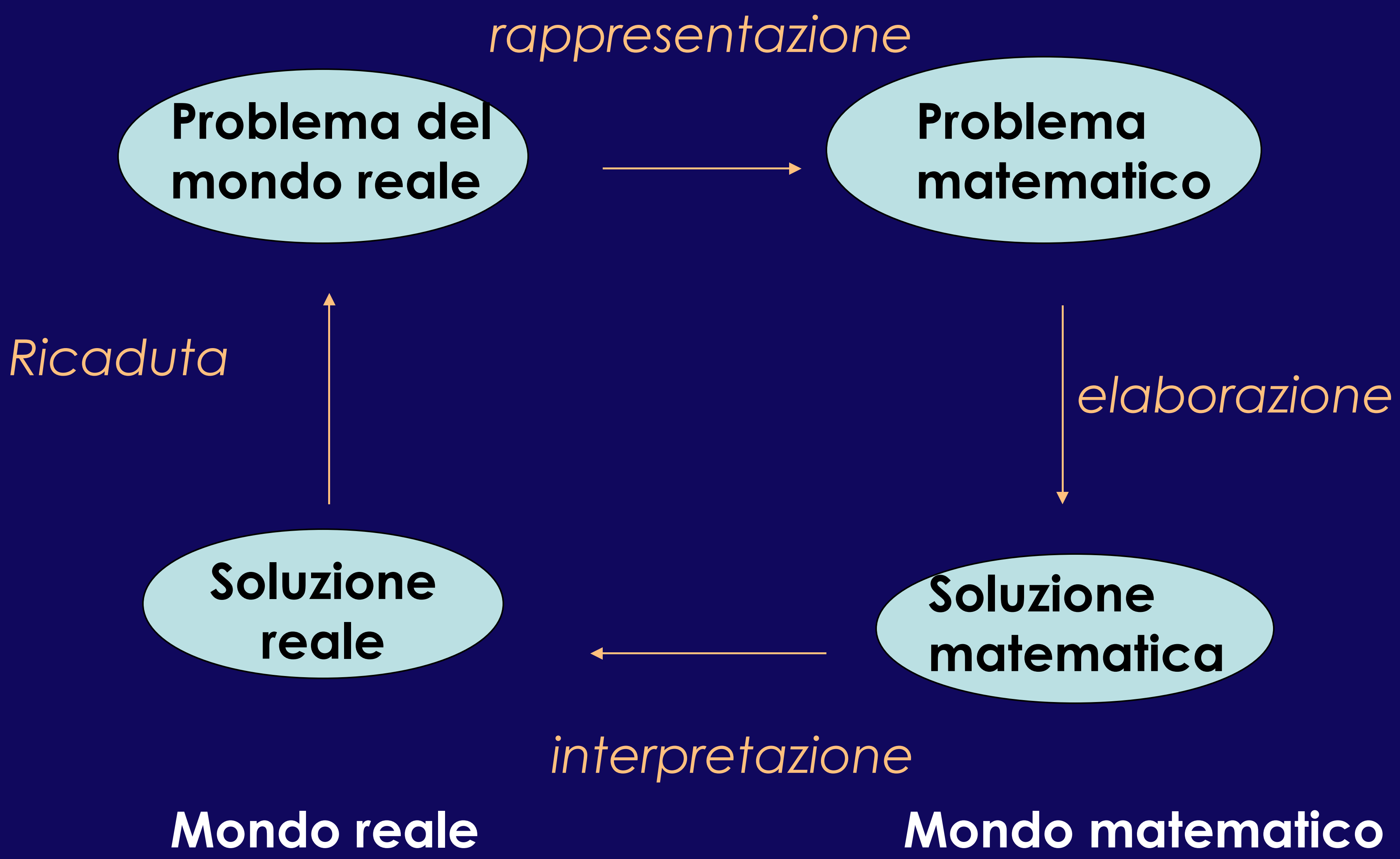
Aree di contenuto chiave per la Matematica

Quantità; Spazio e forma;

***cambiamento e relazioni*, incertezza;**

La filosofia educativa dei nostri programmi è rispondente al quadro teorico del test

Enfasi sul processo di matematizzazione



Le competenze matematiche

- Pensiero e ragionamento
- *Argomentazione*
- Comunicazione
- *Modellizzazione*
- *Formulazione e Risoluzione di problemi*
- *Rappresentazione*
- *Uso del linguaggio simbolico, formale e tecnico e delle operazioni*
- Uso di sussidi e strumenti

Raggruppamenti delle competenze

Riproduzione

Rappresentazioni e definizioni standard

Calcoli di routine

Procedure di routine

Analisi e soluzione di problemi di routine

Connessione

Modellizzazione

Analisi e soluzione di problemi standard, traduzione e interpretazione

Uso di molteplici metodi ben definiti

Riflessione

Formulazione, analisi e soluzione di problemi complessi

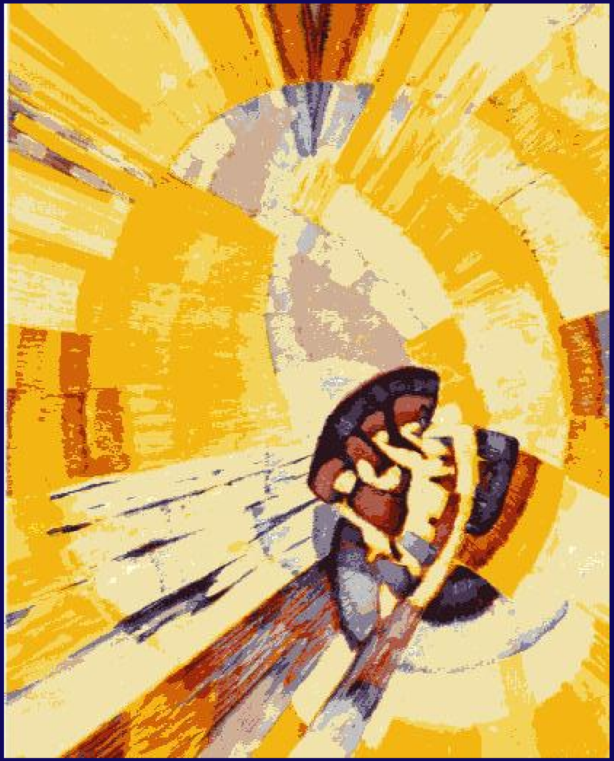
Riflessione e intuizione

Approccio matematico creativo

Uso di molteplici metodi complessi

Generalizzazione

Tipologie di attività per un più appropriato e produttivo approccio all'algebra



GENERALIZZAZIONE

Tipologie di attività

Studio di problemi verbali coinvolgenti una o più incognite, modellizzabili con (dis)equazioni

Esplorazione di situazioni coinvolgenti più variabili **per l'identificazione di relazioni funzionali binarie**

Esplorazione di successioni figurali e numeriche soggiacenti a **leggi da individuare e modellizzare**

Esplorazione numeriche per l'individuazione di proprietà, **formulazione di congetture e dimostrazione**

Modellizzazione

Trattamenti Sintattici ragionati

Cambiamenti di frame concettuali

Giochi di interpretazione

Pensieri di anticipazione

I problemi algebrici

Lo studio dei PVA dovrebbe essere proposto *prima* della introduzione formale delle equazioni

- E' importante
  portare gli studenti a '*generare*' equazioni attraverso la rappresentazione delle relazioni che intercorrono tra i dati *noti e incogniti* di un problema cosi che questi possano comprendere l'opportunità e la significatività dello studio autonomo delle equazioni, viste come 'oggetto matematico'

Elementi chiave nel processo di modellizzazione (traduzione nel codice algebrico)

1. L'analisi del ... i vista linguisti... inform...

2. Il biso... (impor... raverso la quale e...

3. La r... di rel... ere ugu... nze)

E' bene separare il problema della traduzione nel codice algebrico dal problema della ricerca di una soluzione

Prima rappresenta poi risolvi

1. La struttura del testo

Una grossa difficoltà che si incontra nel tradurre in linguaggio algebrico è dovuta alla sequenzialità del linguaggio verbale, che induce a seguire automaticamente l'ordine del testo

Un esempio classico è il problema 'Studenti & Professori' (Clement & Al. 1981).

La frase

'In una università ci sono sei volte tanti studenti quanti professori'

è usualmente tradotta

$$6s = p$$

Il problema

In una fattoria vi sono tre volte tanti tacchini quanti conigli. Tutti insieme sono 224. Quanti sono i tacchini e quanti i conigli?

Induce l'errore di inversione e la percentuale di errore è molto maggiore rispetto al problema 'S&P'.

Altri frequenti errori

Molti studenti inter

ci sono tre volte t ***me:***

le lettere t , c sono usate come 'etichette di qualità'

"*tre tacchini e un coniglio* **3t+c**

" *tre tacchini per ogni coniglio*" e scrivono 3t=1c

2. Il problema del ‘naming’
(rappresentazione di dati incogniti mediante lettere)

‘dare nome’ ad una quantità incognita

non è un’idea spontanea per gli studenti

L’ uso delle lettere non dovrebbe essere imposto dagli insegnanti

Questi devono portare gli studenti a‘ *concepirlo*’ ed a ‘*metterlo in atto*’

la strategia consiste nel lavorare focalizzandosi sulle

rapresent

E’ un percorso lungo e delicato che deve partire sin dalla scuola dell’obbligo

dando spazio ad

Attività di confronto di rap
diverse attuate dagli allievi
Reflettendo assieme sulla loro correttezza, efficacia ed economicità

Problemi con due o più incognite

Molti problemi presentano più incognite legate da differenti relazioni

E' importante educare gli studenti a rappresentare le relazioni in modi differenti, scegliendo di esprimerle attraverso incognite differenti.

Gli studenti possono confrontare le frasi algebriche (espressioni) che costruiscono fino ad acquisire nel tempo l'abilità di prevedere la '*forma*' della espressione che si ottiene in relazione ad una certa incognita

Un primo compito per promuovere negli studenti la comprensione della questione

Rina è 4 anni più giovane di Sara, Eva è 3 anni più grande di Sara. Tutte insieme hanno 38 anni. Esprimi il totale attraverso: l' età di Rina; l' età di Sara, l' età di Eva

(1) Attraverso l' età di Rina

$$r + r+4 + r+7 = 38$$

(2) Attraverso l' età di Sara

$$(s-4) + s + (s+3) = 38$$

(3) Attraverso l' età di Eva:

$$(e-3 - 4) + (e-3) + e = 38$$

Richiede un cambio di ... composizione

...nversione

Richiede una composizione ed un cambio di soggetto

Confronto di trasformazioni sintattiche

il p... ...esentato da tre equazioni:

...s-1 = 38 ; 3e - 4 = 38

Confronto del tipo di equazioni

La questione della conversione di relazioni in termini di uguaglianza

Diversi studi hanno evidenziato che quando studenti novizi devono tradurre relazioni quali

'… è più grande/maggiore di …' ('… è più piccolo/minore di …'

Attivano rappresentazioni letterali usando i simboli '>' o '<'

Per esempio

Il numero p è 8 unità più grande del numero q

è spesso tradotta come

"p8>q " oppure "8p > q"

La corretta traduzione richiede la conversione della relazione nella parafrasi

"p è uguale alla summa dei numeri 8 e q"

Altre difficoltà sorgono per ambiguità interpretative dei predicati esprimenti le relazioni

I predicati

" ... è tot volte ..."

" ... è tot volte più di ..."

Sono spesso considerati sinonimi

E' importante che gli studenti:

- **divengano consapevoli della differenza semantica di predicati simili**
- **esprimano in termini di uguaglianza un'ampia gamma di relazioni**

Una frase famosa (Clement & A. 1981)

Al ristorante di Mindy per ogni quattro persone che ordinano cheesecake ve ne sono cinque che ordinano strudel. Usa C per indicare il numero di cheesecake ed S per indicare il numero di strudel ed esprimi la relazione tra le due quantità

Matricole universitarie

Risposte Corrette : 12%

Esplorazione di situazioni di approccio alle funzioni

Un esempio da un testo spagnolo (di J. Deulofeu)

Cubetti e cubi

Abbiamo disponibili tantissimi cubetti di legno di spigolo 1 cm.

Costruiamo cubi più grandi con spigolo 2 cm, 3 cm, 4 cm, .., n cm, … etc.

Coloriamo di rosso la superficie di tutti questi cubi.

Scomponiamo i cubi.

Per ogni cubo otteniamo cubetti con 3 facce rosse, 2 facce rosse, 1 faccia rossa, 0 facce rosse.

C'è una relazione tra la lunghezza dello spigolo del cubo grande ed il numero dei cubetti con un dato numero di facce rosse ottenuti?

Per ogni cubo otteniamo cubetti con 3 facce rosse, 2 facce rosse, 1 faccia rossa, nessuna faccia rossa.
Per ogni cubo raccogliamo questi dati in tabella e cerchiamo eventuali legami tra i vari casi.
(può essere interessante evidenziare le strategie di conteggio)

Num facce rosse	Cubo 2 x 2	Cubo 3 x 3	Cubo 4 x 4	Cubo 5 x 5	Cubo n x n	Corrispondenza tra: n= "taglia" del cubo $f_r(n)$ = n°cubetti con dato numero di facce colorate
3	8	8	8	8	...	
2	0	12	24	36	...	
1	0	6	24	54	...	
0	0	1	8	27	...	

Num fac ce rosse	Cubo 2 x 2	Cubo 3 x 3	Cubo 4 x 4	Cubo 5 x 5	Cubo n x n	Corrispondenza tra: n= "taglia" del cubo $f_r(n)$ = n°cubetti con r facce colorate (r = 1,2,3)
3	8	8	8	8	…	$f_3(n) = 8$
2	0	12	$2 \bullet 12$ $(4-2) \bullet 12$	$3 \bullet 12$ $(5-2) \bullet 12$	$(n-2) \bullet 12$	$f_2(n) = (n-2) \bullet 12$
1	0	6	24 $6 \bullet 2 \bullet 2$	54 $6 \bullet 3 \bullet 3$	$6 \bullet (n-2)^2$	$f_1(n) = 6(n-2)^2$
0	0	1 1^3	8 2^3	27 3^3	$(n-2)^3$	$f_0(n) = (n-2)^3$

f_3 costante - f_2 lineare - f_1 quadratica - f_0 cubica

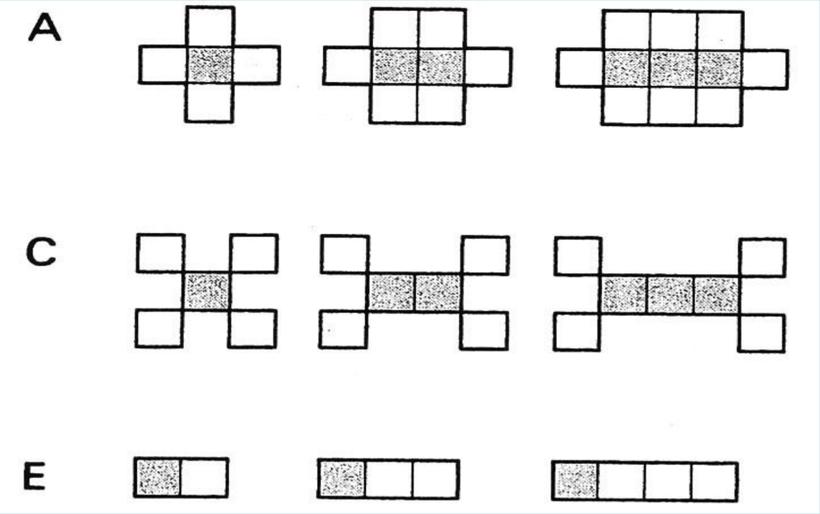
Da un testo Inglese (di E. Harper)

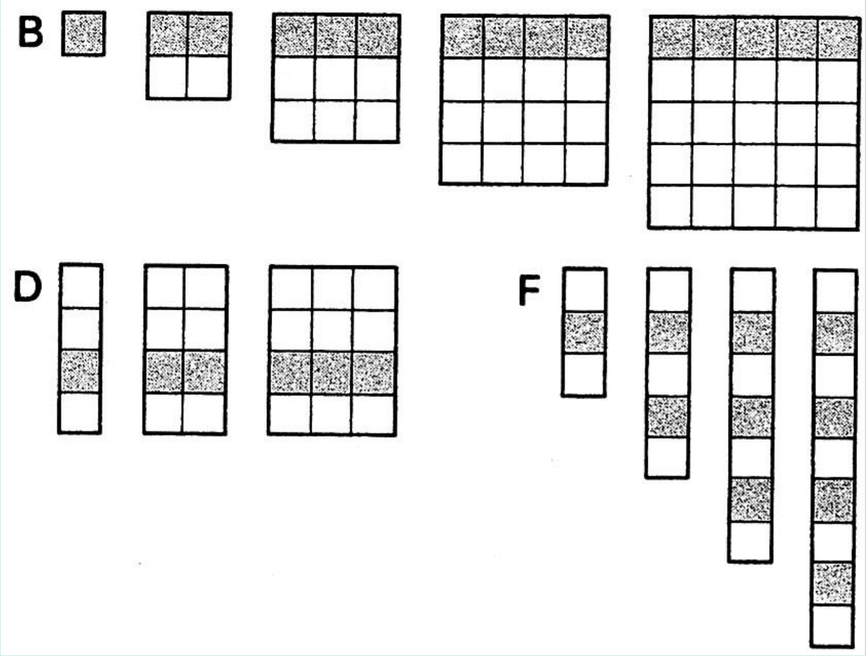
Think it through ... .

Here are some sets of geometric patterns, graphs and rules.

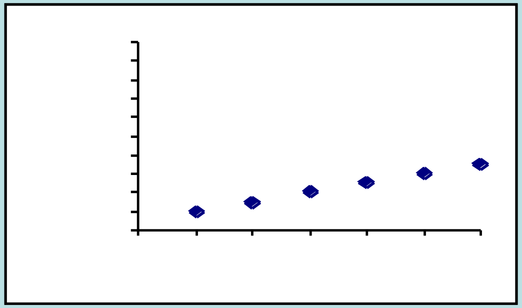
Find the correct match.

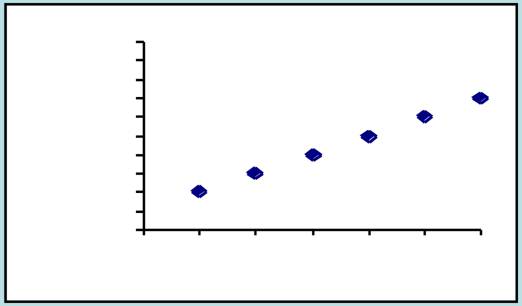
<u>Geometric patterns</u>

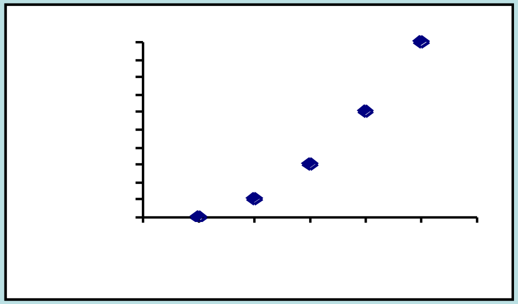


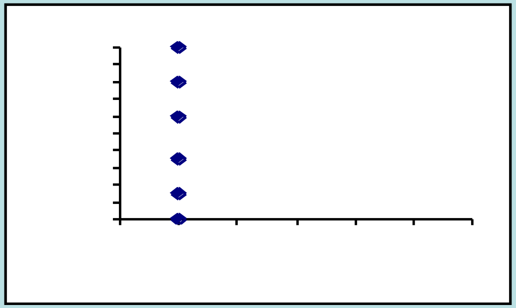


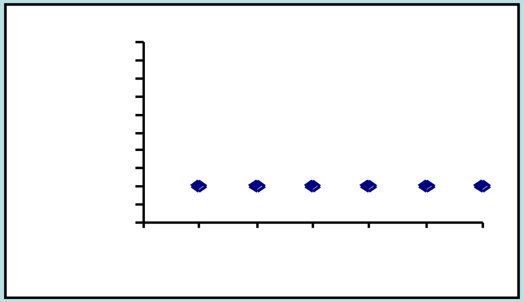
Graphs

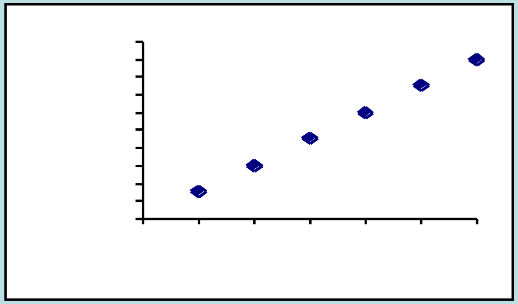












Rules

1) N° of white tiles = N° black tiles + 1

2) N° white tiles = N° black tiles x 3

3) N° white tiles = 4
No matter how many black tiles.

4) N° black tiles = 1
No matter how many white tiles.

5) N° white tiles = (N° black tiles x 2) +2

6) N° white tiles = N° black tiles x (N° black tiles – 1)

Rules and letters

a) $m = (n \times 2) + 2$

b) $m = 4$

c) $m = n \times (n - 1)$

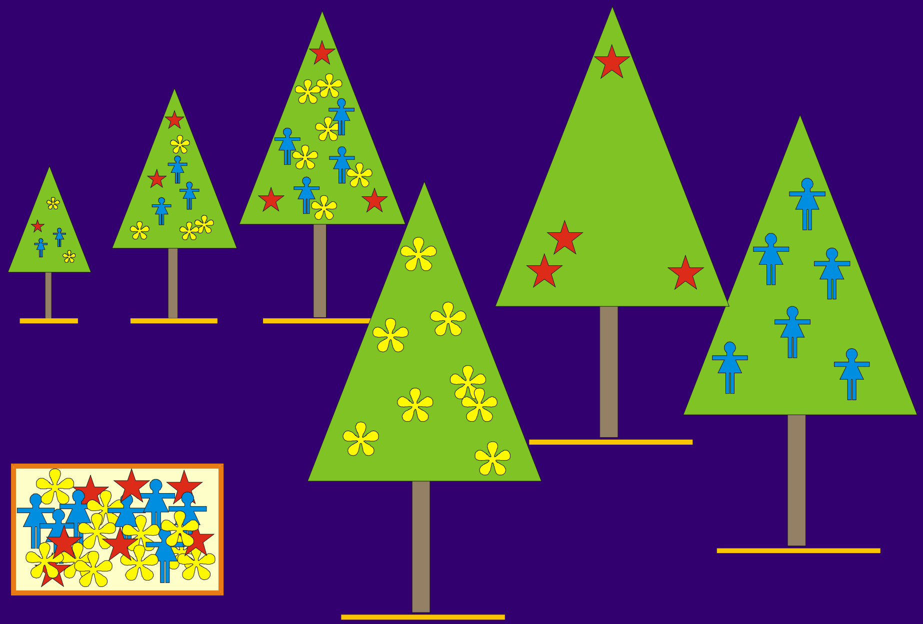
d) $m = n \times 3$

e) $n = 1$

f) $m = n + 1$

Dal testo Italiano “Verso le funzioni” di Fiorini, Marchi Nasi, Stefani

E’ natale.
Gianni lavora in un negozio di allestimenti.
Egli ha il compito di completare gli alberi grandi
Aggiungendo le decorazioni mancanti.

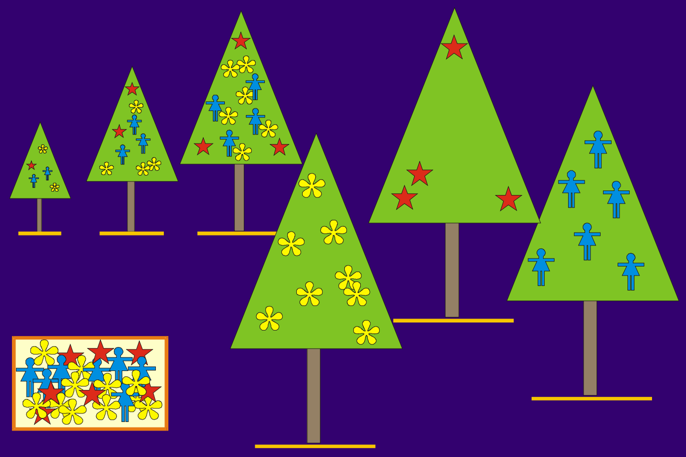


Il suo principale, che ha decorato gli alberi più gli dice solo:
« Continua. Rispetta le regole e non ti sbagliare. »
Gianni è un po’ confuso.

♦ Aiutalo tu.

Dal testo “Verso le funzioni” di Fiorini e altri

E gli viene un’idea …



In un cassetto della scrivania, il suo principale ripone foglietti in cui appunta le regole scelte per le decorazioni.
« Forse lo ha fatto anche quest'anno » pensa Gianni ottimista.
Apre il cassetto e trova 5 foglietti.
Questi.

$f = s+2$	$f = 2p-2$	$f = 2s$	$f = s+1$	$f = s : 2$
$p = 2s-1$		$p = s+1$	$p = 2s$	$S = p-1$

«Ma quali sono le regole giuste?», si chiede.
Confronta le relazioni che hai trovato con quelle scritte sui foglietti e cerca di capire se ci sono anche i foglietti di quest’anno.

Successioni come funzioni

✣ ✣ ✣ ❖ ❖ ✣ ✣ ✣ ❖ ❖ ✣ ✣ ✣ ❖ ❖ ✣ ✣ ✣ ….

✿✿✿✾✿✿✿✾✿✿✿✾✿✿✿✾✿✿✿✾✿✿✿✾✿…

☯ ☯ ☯ ● ● ☯ ● ● ☯ ☯ ☯ ● ● ☯ ● ● ☯ ☯…

Considerata una progressione, es esempio

5, 7, 9, 11, 13, 15, …

Di fronte ad essa gli allievi riconoscono quasi subito che un termine ed il successivo differiscono di 2 unità ma hanno difficoltà ad individuare la corrispondenza

‘numero di posto - numero che vi figura’

Per avviare l'indagine conviene chiedere loro di:

- esplicitare la corrispondenza posto- termine; nel nostro caso: $1 \rightarrow 5$; $2 \rightarrow 7$; $3 \rightarrow 9$; $4 \rightarrow 11$; $5 \rightarrow 13$; $6 \rightarrow 15$, …

- esprimere *in più modi* ciascun termine della sequenza in funzione del numero di posto ed indagare se vi siano rappresentazioni analoghe

Si tratta di rappresentare:

- 5 in funzione di 1 (o di 2) ;
- 7 in funzione di 2 (o di 3) ;
- 9 in funzione di 3 (o di 4) ;
- 11 in funzione di 4 (o di 5), ecc.

Gli allievi

se educati a rappresentare
un numero in più modi

potranno scrivere disordinatamente varie rappresentazioni

Ma nel momento di condividere ciò che si è prodotto occorrerà darsi dei

criteri di raccolta delle espressioni

questo processo di

organizzazione e armonizzazione

renderà evidenti

analogie e regolarità

tra le rappresentazioni

una organizzazione come questa:

$$5 = 2+3 = 1+2\times2 = 2\times3-1$$

$$7 = 4+3 = 1+3\times2 = 2\times4-1$$

$$9 = 6+3 = 1+4\times2 = 2\times5-1$$

$$11 = 8+3 = 1+5\times2 = 2\times6-1$$

$$13 = 10+3 = 1+6\times2 = 2\times6-1$$

$$15 = 12+3 = 1+7\times2 = 2\times8-1$$

renderà evidente, in vari modi, il legame tra le coppie corrispondenti

Si indurrà per questo negli allievi

una riflessione

sui legami tra

numero di posto - numero che vi figura

Basterà chiedere loro di individuare

- ***ciò che varia***
- ***ciò che rimane costante***

nei vari termini

Prendendo in esame le scritture

$$1 \to 5 = 2+3$$
$$2 \to 7 = 4+3$$
$$3 \to 9 = 6+3$$
$$4 \to 11 = 8+3$$
$$5 \to 13 = 10+3$$
$$6 \to 15 = 12+3$$

si osserva_

- **l'invarianza dell'addendo 3**
- **la variabilità regolare dell'altro addendo:** ***risulta sempre il doppio del numero di posto***

La corrispondenza si può allora leggere in termini di:

numero di posto → numero di posto moltiplicato per 2 più 3

Sarà cura dell'insegnante guidare gli allievi nella ***contrazione della rappresentazione*** *introducendo* ***la lettera n come indicatrice del generico numero di posto*** e giungendo alla codifica simbolica della corrispondenza:

$$n \rightarrow 2 \cdot n + 3$$

Prendendo in esame le scritture:

$$1 \rightarrow 1 + 2 \cdot 2;$$

$$2 \rightarrow 1 + 3 \cdot 2;$$

$$3 \rightarrow 1 + 4 \cdot 2;$$

$$4 \rightarrow 1 + 5 \cdot 2;$$

$$5 \rightarrow 1 + 6 \cdot 2;$$

$$6 \rightarrow 1 + 7 \cdot 2;$$

Si osserva che quello che varia è

il primo fattore dell'addendo pari

che è

il successivo del numero di posto

Indicando con n il generico numero di posto la corrispondenza si riassume in

$$n \rightarrow 2 \cdot (n+1) + 1$$

Analogamente prendendo in esame le scritture $1 \rightarrow 2 \cdot 3 - 1$

$$2 \rightarrow 2 \cdot 4 - 1$$
$$3 \rightarrow 2 \cdot 5 - 1$$
$$4 \rightarrow 2 \cdot 6 - 1$$
$$5 \rightarrow 2 \cdot 7 - 1$$

si osserva che ciò che varia è sempre il secondo fattore dell'addendo pari, ma questa volta è dato da:

il numero di posto + 2

Indicando con n il generico numero di posto la corrispondenza si riassume in

$$n \rightarrow 2 \cdot (n+2) - 1$$

Si farà riflettere gli allievi su quali siano le proprietà delle operazioni aritmetiche che garantiscono che le tre scritture

$$n \rightarrow 2 \cdot n + 3$$

$$n \rightarrow 2 \cdot (n+1) + 1$$

$$n \rightarrow 2 \cdot (n+2) - 1$$

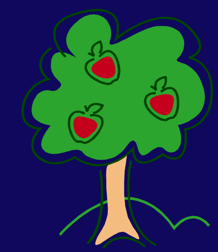
rappresentino, qualunque sia n, lo stesso numero naturale

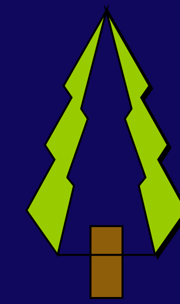
In questo caso le proprietà

- **distributiva**
- **associativa**

ESPLORANDO TRA MELI & CONIFERE

Dal Test P.I.S.A. 2000

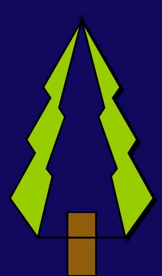




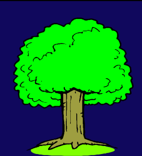
Un agricoltore pianta degli alberi di mele in modo da formare un quadrato.

Per proteggere questi alberi dal vento pianta poi delle conifere intorno ai meli.

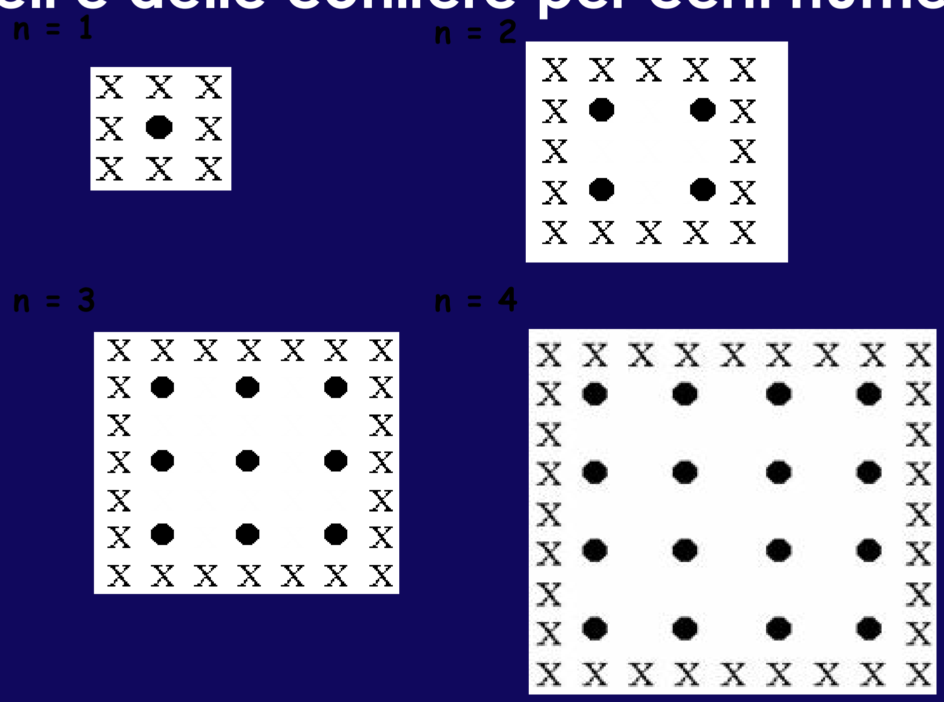
Qui sotto puoi vedere uno schema che rappresenta la disposizione dei meli e delle conifere per certi numeri di filari di meli

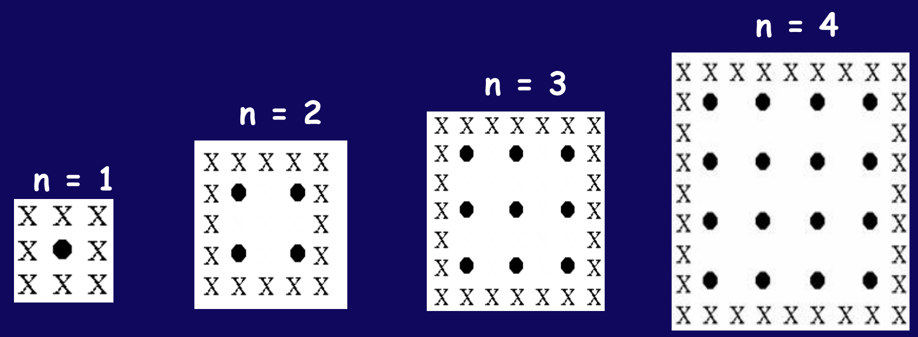


X = conifera



● = melo





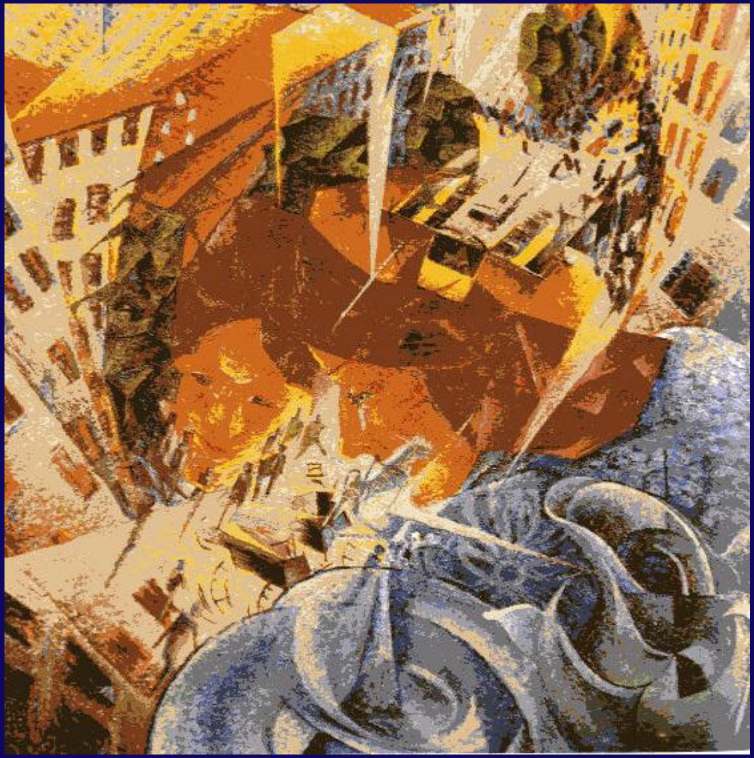
Spiega come è possibile scoprire il numero totale dei meli conoscendo il numero dei filari di meli.

Il contadino vuole piantare almeno 60 alberi di meli quanti filari otterrà?

Spiega come è possibile scoprire il numero totale delle conifere conoscendo il numero dei filari di mele.

C'è un valore di n per il quale il numero degli alberi di mele è uguale al numero delle conifere.

Indagini numeriche e avvio alla dimostrazione



L'attività si sviluppa attraverso:

- **l'individuazione di una regolarità aritmetica**
- **la formulazione verbale della regolarità osservata**
- **l'esplorazione delle ragioni sottostanti la regolarità e la sua dimostrazione formale**
- **possibili estensioni e variazioni**

da “Giochi di aritmetica e problemi interessanti” di G. Peano

Scrivi un numero di 3 cifre, decrescenti di 1 per volta; capovolgi; fa la differenza fra i due numeri. Cosa osservi?

Esperimenti

765-567 = 198; 987-789 = 198 ; 543-345 = 198; 210-12 = 198

Congettura: La differenza è sempre 198

Prova

Rappre-sentazione $(a+1)10^2+a\bullet 10+(a-1) - [(a-1)\ 10^2+ a\bullet 10 +(a+1)]$

Trasformazione $a10^2+10^2+a\bullet 10+a-1-(a10^2-10^2 + a\bullet 10 +a+1)$

Anticipazioni e Interpretazione $2\bullet 10^2 - 2$

Se p e q sono numeri dispari allora il prodotto del successivo di uno per l'antecedente del quadrato dell'altro è divisibile per 16.

Rap pre sen ta zio ne

- *Rappresentazione di numeri dispari diversi: 2h+1 ; 2k+1*
- *Rappresentazione del successivo di uno (2h+1) + 1*
- *Rappresentazione dell'antecedente del quadrato dell'altro: (2k+1)2 - 1*
- *Semplificazione delle due rappresentazioni:*
- $(2h+1) + 1 = 2(h+1)$
- $(2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$
- *rappresentazione del prodotto:*
- $2(h+1) \cdot 4k(k+1)$

Variante: Dimostrare che se p e q sono numeri dispari allora il numero $(p+1)(q^2-1)$ è divisibile per 2^4

In Ter pre ta zio ne

- *studio interpretativo ed analisi della parità del termine $(h+1) \cdot k(k+1)$ (attivazione pensiero anticipatorio).*
- *Spostamento dell'attenzione sul fattore k(k+1), esame della parità di k e (k+1) conclusione che esiste u tale che k(k+1) = 2u*
- *ancora trasformazione della rappresentazione del prodotto* $2^3(h+1)\ ) \cdot 2u = 2^4(h+1)\ )u$
- *interpretazione di 2^4 in termini di 16*

Mark Haddon 2003

"The Curious Incident of the Dog in the Night-Time"

"Lo strano caso del cane ucciso a mezzanotte"

(Einaudi)

Problema

Dimostrare il seguente risultato:

Un triangolo i cui lati si possono scrivere nella forma n^2+1, n^2-1 e $2n$ è rettangolo.

Provare attraverso un controesempio che l'inverso è falso.

Soluzione (dal testo)

Prima di tutto dobbiamo determinare quale è il lato maggiore di un triangolo con i lati che si possono scrivere nella forma n^2+1, n^2-1 e $2n$ (dove $n>1$)

$n^2+1-2n = (n-1)^2$ se $n>1$ allora $(n-1)^2>0$

quindi $n^2+1-2n>0$ pertanto $n^2+1>2n$

analogamente $n^2+1-(n^2-1) = 2$ quindi $n^2+1>n^2-1$

Questo significa che n^2+1 è il lato maggiore del triangolo i cui lati si possono scrivere nella forma n^2+1, n^2-1, $2n$ (dove $n>1$

(dal testo)

Secondo il teorema di Pitagora, se la somma dei quadrati dei due lati minori è uguale al quadrato del lato maggiore, allora il triango
per provare che il triangolo è
dimostrarlo.

Si osservi l'identificazione del teorema di Pitagora con il suo inverso

La somma dei quadrati dei lati minori è $(n^2-1)^2 + (2n)^2$

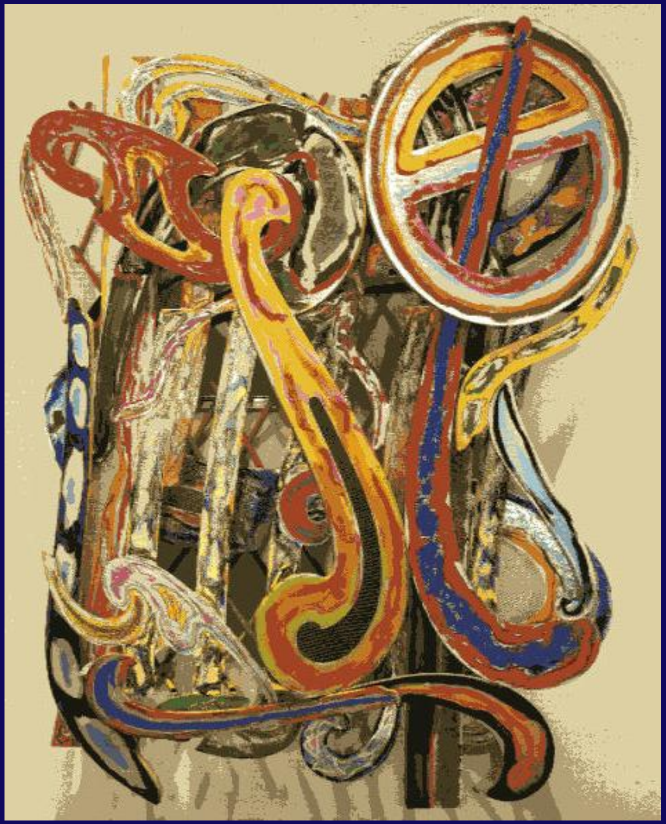
$$(n^2-1)^2 + (2n)^2 = n^4 - 2n^2 + 1 + 4n^2 = n^4 + 2n^2 + 1$$

Il quadrato del lato maggiore è $(n^2+1)^2$

$$(n^2+1)^2 = n^4 + 2n^2 + 1$$

Quindi la somma dei quadrati dei due lati minori è uguale al quadrato del lato maggiore, e il triangolo è rettangolo

Ritornando al test PISA



Quesito relativo all’area chiave ‘Quantità’

Carlo è andato a comprare una giacca che costava normalmente 50 zed ed era in saldo con uno sconto del 20%. Nel paese c’è una tassa di vendita del 5%. Il commesso ha aggiunto la tassa al prezzo della giacca e poi ha tolto il 20%. Carlo ha protestato: egli voleva che il commesso effettuasse lo sconto del 20% e poi calcolasse la tassa del 5%.

Che differenza c’è tra i due prezzi finali?

c rappresenta la spesa complessiva

Strategia cliente: $80\%c + 5\%(80\%c)$

Stategia cassiere: $80\%(c+5\%c)$

$$80\%(c+5\%c) = 80\%c + 80\%(5\%c)$$

La commutatività degli operatori moltiplicativi garantisce che

$$5\%(80\%c) = 80\%(5\%c)$$

allora

$$80\%(c+5\%c) = 80\%c + 80\%(5\%c) = 80\%(c+5\%c)$$

La questione degli ambiti numerici

ell'algebra a livello di biennio
condaria superiore occorre
tturare il campo'

dedicando spazi ad attività di generalizzazione, modellizzazione e problem solving dimostrativo

facendo emergere gli oggetti dell'algebra (dis)equazioni, relazioni funzionali (espressioni)

Ponendo il problem

La visione moderna di (dis)equazioni e funzioni come forme proposizionali

Ridimensionando gli li
procedure e di tecn
vantaggio di a
trasformazionali