Settimana Matematica 2007

Laboratorio 6: Giochi di Lego

Docente: R. Benedetti

Perfezionandi: L. Rovetti, G. Vissani

Questo è un "resoconto commentato" dell'esperienza svoltasi nel Laboratorio di Giochi di Lego. Usando un carattere differente evidenzieremo i nostri commenti su come le varie problematiche proposte sono state affrontate dai ragazzi che hanno partecipato al laboratorio.

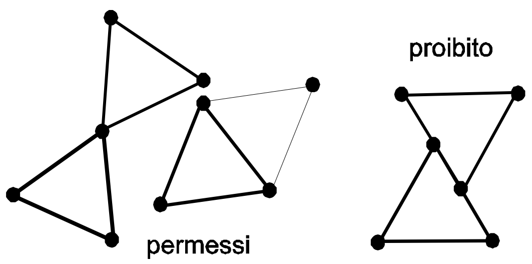
1. Introduzione

Nei giochi di costruzioni, che chiameremo genericamente *giochi di lego* in omaggio ai famosi mattoncini, abbiamo a disposizione una scatola contenente dei pezzi elementari con i quali si possono realizzare forme anche di notevole complessità. Per passare dalle forme base a quelle complesse dobbiamo fare un assemblaggio seguendo regole ben precise. Se giochiamo con il Lego non possiamo, ad esempio, usare la colla per unire i mattoncini, mentre utilizzando il Meccano ci serviremo di viti e dadi per unire le parti. In altre parole, le regole per l'assemblaggio sono parte integrante del gioco e, per evitare di raggiungere livelli di complessità delle forme troppo elevati, possiamo aggiungere ad esse degli ulteriori vincoli. Si potrebbe decidere di costruire solo oggetti che nella forma ricordino delle case o delle automobili.
C'è un ultimo fattore di cui tener conto: la ricchezza della confezione del gioco. Le possibilità di costruzione cambiano in funzione di una disponibilità limitata o meno sia del numero di elementi base che possediamo sia delle loro forme.

Questo laboratorio si propone di esplorare alcuni aspetti di un gioco di lego fatto con mattoncini matematici. Operando in analogia ai giochi reali inizieremo descrivendo elementi di base e regole di costruzione. Per quanto riguarda la ricchezza della nostra confezione non porremo alcuna restrizione al numero di pezzi disponibili.

2. Definizione del gioco

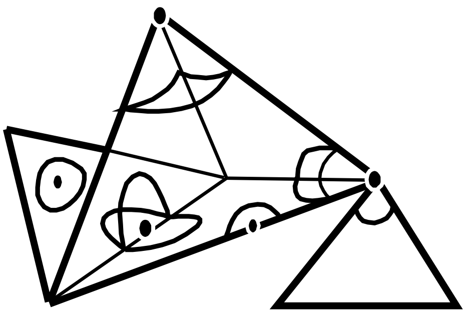
I nostri elementi di base saranno triangoli di forma qualsiasi.



Per quanto riguarda le regole di assemblaggio, accetteremo per amor di semplicità soltanto due modalità: i triangoli possono essere incollati tra loro o lungo un lato o per i vertici. Osserviamo che quando si decidono delle regole sono due le domande da porsi: se una regola sia attuabile e se ci convenga adottarla. Cerchiamo di spiegarci con un esempio. Potremmo decidere di permettere l'incollatura di due lati di una coppia di triangoli per costruire qualcosa di simile ad una tasca ottenuta schiacciando un cono. Si tratta di un'operazione attuabile ma che preferiamo non includere tra quelle possibili nel nostro gioco.

Decisi l'aspetto dei nostri mattoncini e le regole per assemblarli possiamo cominciare ad esplorare le forme delle nostre costruzioni. Il primo passo da compiere in questa direzione è quello di procurarci gli strumenti per descrivere le caratteristiche dei nostri oggetti. Per farlo immagineremo di metterci dal punto di vista di un osservatore che si trovi sulla superficie della costruzione e che possa spingere lo sguardo solo fino ad una distanza limitata a partire da dove è. La descrizione di ciò che questo osservatore immaginario vede intorno a se quando è posto in un dato punto ci permette di costruire un modello *locale* della superficie.

Se si trova all'interno di un triangolo potrà volgere lo sguardo tutto intorno senza ostacoli coprendo una regione simile ad un dischetto. Notare che sull'osservazione locale non avrà alcuna influenza l'aspetto del triangolo: l'intorno avrà la forma di un disco sia che ci si trovi su un triangolo isoscele che equilatero o scaleno.

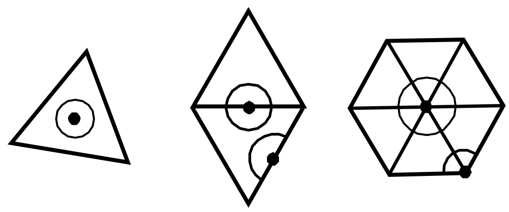


Se invece l'osservatore si trova su un lato di un triangolo la gamma delle possibilità si amplia all'infinito. Se il lato appartiene ad un solo triangolo il confine dell'intorno avrà l'aspetto di un semicerchio. Se invece lungo il lato sono incollati più triangoli avremo tanti semicerchi per quanti sono i triangoli stessi.

Per comprendere quale sia l'intorno di un vertice immaginiamo di porre il centro di una sferetta su di esso, di intersecare i lati dei triangoli con la superficie sferica e costruire i segmenti che uniscono i punti di intersezione. Anche in questo caso abbiamo infinite possibilità e gli intorni che si ottengono possono avere per confine praticamente qualunque spezzata. Se non ne siamo completamente convinti possiamo seguire un ragionamento inverso che parta dalla spezzata per arrivare a costruire un vertice comune a più triangoli ed avente la spezzata data per intorno. Per raggiungere il nostro obiettivo è sufficiente che prendiamo una sequenza di segmenti qualunque, consideriamo un punto fuori dal piano su cui giacciono e costruiamo i triangoli che si ottengono unendo tale punto ai vertici dei segmenti.

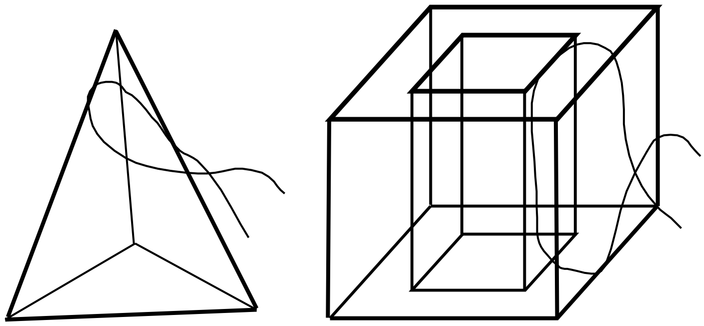
Possiamo avere intorni di un vertice formati da parti sconnesse o connesse. È facile immaginare che si può arrivare a situazioni terribilmente complesse, ma sappiamo già come comportarci per venirne fuori: aggiungeremo dei vincoli limitandoci solo ai casi più semplici per ciascuna delle tre situazioni esaminate.

Accetteremo nel nostro gioco una costruzione solo se gli intorni dei suoi punti soddisfano i seguenti vincoli:

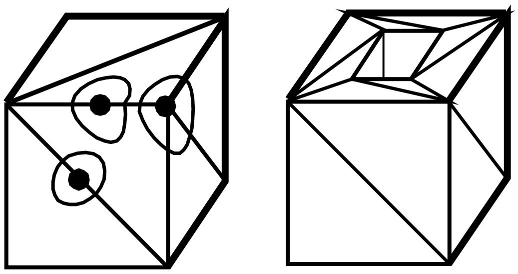


1. Punto interno: esiste una sola possibilità, il disco.
2. Punto su un lato: ammetteremo solo due possibilità, che il lato appartenga ad un solo triangolo, nel qual caso l'intorno è un semicerchio, o che sia condiviso da due, cerchio completo.
3. Punto su vertice: due sole possibilità, vertice circondato da una spezzata chiusa o aperta.

Ora che abbiamo chiarito regole di costruzione, vincoli e descrizioni locali delle forme riprendiamo il problema della loro classificazione. La questione di fondo è legata al decidere quando due forme possano dirsi diverse tra loro. Probabilmente a questo punto del percorso non è ancora ben chiaro cosa significhi “forme diverse” per oggetti costruiti incollando triangoli. Proviamo a dare una prima idea con un esempio. Abbiamo una piramide ed un cubo con un foro che l’attraversa. Se escludiamo caratteristiche quali le dimensioni o il numero di facce o di lati, quale criteri possiamo usare per affermare che sono diversi? Per rispondere immaginiamo di poggiare un cappio sulla prima e stringerlo. Dovunque sia stato posto inizialmente il cappio potremo stringerlo fino a farlo diventare un punto. Nel secondo caso invece, se il cappio passa attraverso il foro sarà impossibile stringerlo fino a farlo scomparire.



Torniamo agli oggetti del nostro gioco e consideriamo un quadrato ed un quadrato con un buco al centro, entrambi suddivisi in triangoli. Possiamo usare il criterio introdotto nell’esempio precedente per stabilire che si tratta di forme diverse.



Consideriamo ora la superficie di un cubo suddivisa in triangoli. Notare che gli intorni dei punti che si trovano sul cubo, lati e vertici inclusi, sono tutti delimitati da spezzate chiuse, dunque la figura è priva di bordi. Prendiamo poi un secondo cubo attraversato da un foro che collega due facce contrapposte. Di nuovo potremmo usare il nostro criterio per stabilire che si tratta di due figure tra loro diverse.

Vedremo nel seguito che possiamo costruire intere famiglie di forme tra loro diverse affiancando quadrati o cubi forati.

Inizialmente è stato chiesto ai ragazzi di descrivere qualche gioco di costruzioni, e dalle loro proposte sono emersi i giochi lego e il meccano. Sollecitati dall’insegnante hanno osservato che questi tipi di giochi sono caratterizzati da mattoncini, regole di assemblaggio e da figure che possono essere formate componendo i vari mattoncini.
L’insegnante ha proposto di utilizzare come mattoni elementari dei triangoli generici, basandosi sulle conoscenze geometriche che i ragazzi avevano a riguardo.
Durante il primo incontro di laboratorio durato complessivamente due ore, i ragazzi hanno reagito in maniera soddisfacente e non sono stati riscontrati grossi problemi d’astrazione nel passaggio dal gioco Lego reale al modello matematico.
Inizialmente la classe si è mostrata attenta alla presentazione del problema, alcuni ragazzi hanno interagito disinvolti e senza remore con il docente fin da subito, formulando domande per capire meglio il problema da affrontare, altri invece più timorosi hanno preferito ascoltare in silenzio.
Successivamente nella classe si è instaurato un clima positivo e di collaborazione nel cercare di seguire i ragionamenti proposti dal docente; la discussione ha iniziato ad essere più omogenea all’interno del gruppo.

Riguardo alle problematiche introdotte, inizialmente sono state poste sottoforma di domanda agli studenti, ma non ottenendo risposta in merito il professore ha suggerito situazioni “tipo”. Ad esempio parlando di “forme diverse” di oggetti ottenuti incollando triangoli sono state formulate frasi del tipo:”pensate ad una piramide ed ad un cubo bucato… queste figure sono differenti? ”. La risposta alla fine è stata suggerita dal professore.

3. Relazioni di equivalenza

Quando abbiamo di fronte una vasta popolazione di oggetti per classificarla cerchiamo di individuare le principali caratteristiche che contraddistinguono i singoli elementi. Non possiamo infatti sperare di padroneggiare una quantità di dettagli troppo elevata. In questi casi un’eccessiva quantità di informazioni si rivela controproducente tanto quanto la loro mancanza. Si pensi ad una carta geografica. Una carta in scala uno ad uno sarebbe dettagliata quanto l’originale, ma assolutamente priva di utilità.

Una volta individuata una caratteristica che contraddistingue gli individui possiamo raggruppare in un solo sottoinsieme tutti gli elementi aventi quella data caratteristica ed eleggere a rappresentante dell’intera sottoclasse un solo di essi. Considereremo tutti gli altri elementi della sottoclasse equivalenti a quello scelto. Osserviamo per inciso che questo modo di procedere è ben noto in matematica e corrisponde ad introdurre una relazione di equivalenza tra gli elementi di un insieme ed utilizzarla per suddividere l’insieme stesso in classi di equivalenza.

Se decidiamo di non consideriamo dettagli come le misure di angoli e lati quali sono le caratteristiche che restano per dire che una figura, ad esempio, è un triangolo? Un triangolo può essere caratterizzato per il fatto di possedere tre punti, i vertici, tre coppie di punti, i lati, ed una tripletta di punti, una faccia. Il possesso di tre vertici, tre lati ed una faccia sarà dunque il criterio che adotteremo per dire se un figura è (equivalente a) un triangolo.

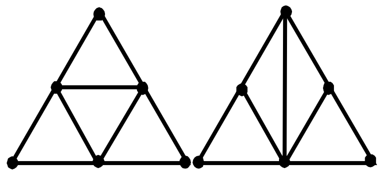
Estendendo per analogia al nostro gioco stabiliamo di considerare equivalenti due figure aventi stesso numero di vertici, coppie di vertici (lati), e triplette (facce).

Possiamo anche introdurre un altro criterio per decidere se due figure sono equivalenti o meno. Poiché non ci interessano le misure dei lati e degli angoli scegliamo di usare solo triangoli equilateri. Date due figure da confrontare prendiamo i triangoli che le compongono e, mantenendo invariate le incollature, li trasformiamo tutti in triangoli equilateri. Se dopo tale trasformazione le figure ottenute sono uguali diremo equivalenti quelle di partenza.

Chiediamoci ora se, in base al criterio introdotto, due figure sono equivalenti se e solo se hanno lo stesso numero di triangoli. Le considerazioni precedenti sulla possibilità di trasformare tutti i triangoli in equilateri prima del confronto mostrano chiaramente che due figure equivalenti, che indicheremo con il simbolo $F_1 \sim F_2$, debbano necessariamente avere stesso numero di vertici, $V(F)$, di lati, $L(F)$, e di triangoli, $T(F)$:

$$F_1 \sim F_2 \Rightarrow V(F_1) = V(F_2)\ ,\ L(F_1) = L(F_2),\ T(F_1) = T(F_2)$$

Un controesempio ci mostra che non è vero il viceversa. Possiamo infatti costruire figure che, pur avendo stesso numero di vertici, lati e facce, hanno diversi incollaggi tra i lati e non sono pertanto equivalenti. Notare come



per passare da una costruzione all'altra sia bastato modificare la connessione tra due coppie di vertici, un'operazione nota in letteratura come flip.

4. Invarianti

Lavorando con le relazioni di equivalenza è utile introdurre gli invarianti. Se abbiamo a che fare con i triangoli sono invarianti il numero di lati e di angoli. Più in generale introduciamo la seguente:

Definizione: se ad una figura F è associato un oggetto P(F) (numero di vertici, lati, …) diremo che quest'ultimo è un invariante se $F_1 \sim F_2 \Rightarrow P(F_1) = P(F_2)$.

Conseguenza immediata della definizione data è che condizione necessaria perché due figure siano equivalenti è che l'invariante sia lo stesso su entrambe le figure.

Esistono due diversi tipi di proprietà invarianti. Le prime sono sostanzialmente legate all'operazione del contare e vengono dette *proprietà combinatorie*. Per i triangoli elenchiamo tra queste il numero di vertici, di lati e di facce.
Le altre sono legate invece all'esecuzione di misure e vengono dette *proprietà geometriche*. La somma degli angoli interni o esterni, la validità della disuguaglianza triangolare sono esempi di proprietà geometriche dei triangoli. Si tratta evidentemente di proprietà di natura molto diversa, eppure esiste una relazione che le collega tra loro.

Partiamo dalla somma degli angoli esterni del triangolo:

$$(\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) = 3\pi - (\alpha + \beta + \gamma) = 3\pi - \pi = 2\pi$$

Osserviamo poi che combinando tra loro invarianti di un triangolo otteniamo di nuovo un invariante. In particolare, se alla somma del numero di vertici, $V = 3$, con quello delle facce, $T = 1$, sottraiamo il numero dei lati, $L = 3$, otteniamo:

$$V + T - L = 1$$

Possiamo allora scrivere:

$$(\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) = 2\pi = 2\pi\ 1 = 2\pi\,(V + T - L)$$

Sottolineiamo ancora una volta il carattere sorprendente dell'espressione appena scritta. Da una parte troviamo grandezze geometriche con valori che cambiano con continuità all'interno dei numeri reali. Dall'altra grandezze combinatorie con valori appartenenti ai numeri naturali, eppure la somma delle prime è vincolata ad assumere un valore definito, a meno del fattore 2π, da una combinazione delle seconde.

Possiamo determinare una relazione analoga per le figure costruite nel nostro gioco? La risposta è affermativa ed ora vedremo come ottenerla. Almeno in un primo momento aggiungeremo un nuovo vincolo alle nostre costruzioni: ci limiteremo a forme nelle quali l'intorno di un vertice sia sempre delimitato da una spezzata chiusa.

Se abbiamo due figure equivalenti il valore della combinazione $V + T - L$ sarà lo stesso per entrambe, dunque anche per le nostre costruzioni l'espressione costituisce un invariante combinatorio.

Definizione: Si chiama *caratteristica* di una forma F avente V vertici, L lati e T facce:

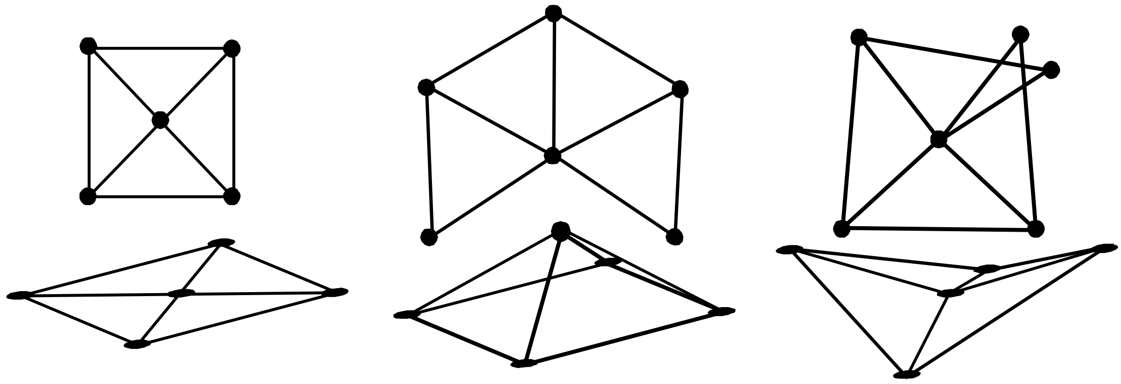
$$C(F) = V + T - L.$$

Ci serve ora qualcosa che sostituisca la somma degli angoli esterni. Se esaminiamo il singolo addendo della somma precedente, ad esempio $\pi - \alpha$, possiamo interpretarlo come una misura della differenza tra angolo al vertice e angolo piatto. Nel nostro caso, ragionando per analogia e ricordando che ci stiamo limitando a spezzate chiuse, potremmo introdurre la differenza tra somma degli angoli α_i che circondano un vertice e angolo giro:

$$k(v) = 2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = 2\pi - \alpha(v)$$

Notiamo subito che, diversamente dal caso del triangolo per il quale $\pi - \alpha \geq 0$, possiamo avere valori positivi negativi o nulli. Consideriamo infatti il cono formato dai triangoli che hanno in comune lo stesso vertice, pratichiamo un taglio lungo uno dei lati che hanno a comune due triangoli consecutivi, poi distendiamo su un piano la superficie ottenuta. Si avranno le seguenti possibilità:

- $k(v) = 0$: la somma degli angoli è uguale ad un angolo giro ed i lati dei triangoli opposti al vertice comune formano un poligono chiuso.
- $k(v) > 0$: la somma degli angoli è inferiore ad un angolo giro ed i lati opposti al vertice formano una spezzata aperta.
- $k(v) < 0$: la somma degli angoli è superiore ad un angolo giro ed alcuni dei triangoli si sovrappongono.



Esaminiamo da un altro punto di vista l'informazione fornita da $k(v)$. Consideriamo un rettangolo ABCD diviso in quattro dalle diagonali e sia V il vertice comune ai triangoli che si sono formati. In queste condizioni, triangoli complanari, avremo $k(V) = 0$. Se solleviamo V perpendicolarmente al piano del rettangolo ottenendo una piramide, avremo che il valore degli angoli di vertice V diminuisce e, di conseguenza, $k(V) > 0$. Se invece, ripartendo dalla configurazione iniziale, solleviamo rispetto al piano i due vertici alle estremità di una diagonale ed abbassiamo quelli alle estremità dell'altra, ottenendo così una sorta di sella, aumentiamo il valore della somma degli angoli di vertice V ottenendo $k(V) < 0$.

In altre parole $k(v)$ è legato alla curvatura della superficie e presenta valori nulli, positivi o negativi a seconda che la superficie sia piana, concava o dotata di due concavità.
Notare che si tratta di una peculiarità dei vertici. Eseguendo misure locali in corrispondenza dei lati o dei punti interni ai triangoli si otterrebbero sempre curvature nulle.

La formula di Gauss-Bonnet che collega la parte combinatoria dello schema di costruzione alle misure degli angoli degli N vertici è la seguente:

$$2\pi\,(V - L + T) = k(v_1) + k(v_2) + \ldots + k(v_N)$$

Dimostriamo la sua validità cominciando col riscrivere il membro destro:

$$\Sigma_V k(v) = \Sigma_V (2\pi - \alpha(v)) = \Sigma_V 2\pi - \Sigma_V \alpha(v) = 2\pi V - \Sigma_V \alpha(v)$$

L'ultimo termine che compare a destra rappresenta la somma estesa a tutti i vertici delle grandezze $\alpha(v)$, che a loro volta indicano la somma degli angoli di vertice v. Rappresenta pertanto la somma di tutti gli angoli che compaiono nella forma costruita. Possiamo ottenere lo stesso valore addizionando prima gli angoli all'interno di ciascun triangolo t, somma che indicheremo con $\beta(t)$, poi sommando su tutti i triangoli. Tenendo conto del fatto che per ciascun triangolo $\beta(t) = \pi$:

$$\Sigma_V k(v) = 2\pi V - \Sigma_V \alpha(v) = 2\pi V - \Sigma_T \beta(t) = 2\pi V - \pi T = \pi (2V - T)$$

Esaminiamo ora il termine combinatorio della Gauss–Bonnet. Il vincolo aggiuntivo che abbiamo posto ci aiuta a calcolare velocemente il numero dei lati. Avere solo intorni dei vertici costituiti da spezzate chiuse equivale ad imporre che i lati dei triangoli siano tutti incollati tra loro due e due. Pertanto il numero di lati della costruzione sarà la metà di quello dei triangoli presi separatamente:

$$L = 3T/2, \qquad \text{ovvero} \qquad 2L = 3T$$

Questo basta a completare la dimostrazione:

$$2\pi (V - L + T) = \pi (2V - 2L + 2T) = \pi (2V - 3T + 2T) = \pi (2V - T)$$

Sottolineiamo ancora una volta l'importanza del risultato appena ottenuto. Esso impone un legame insospettato tra due aspetti diversi delle nostre forme, quello combinatorio e quello geometrico. Supponiamo, ad esempio, di aver costruito una piramide a base triangolare. Avremo:

$$V = 4,\ L = 6,\ T = 4 \Rightarrow 2\pi (V - L + T) = 4\pi.$$

Le lunghezze dei lati potranno essere variate a piacere e con esse varieranno i singoli valori $k(v_i)$, ma sorprendentemente la somma dei $k(v_i)$ resterà sempre uguale a 4π.

Vediamo ora come si possa ottenere una formula nel caso generale in cui sono presenti sia vertici interni, ovvero circondati da intorni delimitati da spezzate chiuse, che vertici di bordo. Abbiamo visto nella discussione precedente che la parte combinatoria, la caratteristica C(F), in entrambi i casi era la stessa. Ci aspettiamo pertanto che la stessa espressione sia valida anche in questo caso.

Per quanto riguarda l'altro membro della Gauss–Bonnet dovremo prendere in esame i contributi dei due diversi tipi di vertice. Introducendo la seguente notazione:

- v = vertice interno, w = vertice di bordo;
- $\alpha(u)$ = somma degli angoli che condividono il vertice u;
- $k(v) = 2\pi - \alpha(v)$, $h(w) = \pi - \alpha(w)$;

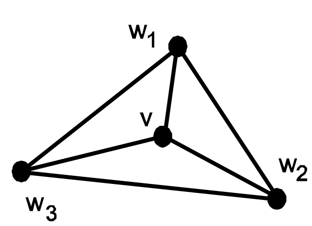
Possiamo congetturare un'espressione di tipo:

$$K(F) = \Sigma_V k(v) + \Sigma_w h(w)$$

Mettiamo alla prova la nostra congettura con un paio di esempi.

Esempio 1 (Triangolo suddiviso in tre sottotriangoli)

Vediamo dalla figura che: V = 4, L = 6, T = 3, pertanto:



$C(F) = 4 - 6 + 3 = 1.$

C'è un solo vertice interno per il quale $\alpha(v) = 2\pi$ e:

$k(v) = 2\pi - 2\pi = 0.$

I vertici di bordo sono tre – w_1, w_2, w_3 – e corrispondono ai vertici del triangolo che racchiude al suo interno la forma. Se indichiamo con ϕ, θ, ψ gli angoli del triangolo avremo:

$$\alpha(w_1) = \phi,\ \alpha(w_3) = \theta,\ \alpha(w_3) = \psi$$

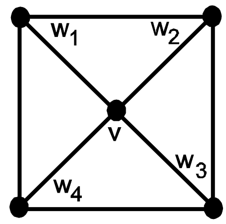
ovvero:

$$\Sigma_w\, h(w) = (\pi - \phi) + (\pi - \theta) + (\pi - \psi) = 3\pi - (\phi + \theta + \psi) = 3\pi - \pi = 2\pi$$

In conclusione:

$$2\pi\, C(F) = 2\pi,\ K(F) = 0 + 2\pi = 2\pi \qquad \Rightarrow \qquad 2\pi\, C(F) = K(F)$$

Esempio 2 (Quadrato suddiviso in quattro sottotriangoli)



Vediamo dalla figura che: $V = 5$, $L = 8$, $T = 4$, pertanto:

$C(F) = 5 - 8 + 4 = 1.$

C'è un solo vertice interno per il quale $\alpha(v) = 2\pi$ e $k(v) = 2\pi - 2\pi = 0$.

I vertici di bordo sono quattro – w_1, w_2, w_3, w_4 – e corrispondono ai vertici del quadrato che racchiude la forma.

Per ciascuno di essi $\alpha(w_i) = \pi/2$, dunque:

$$\Sigma_w\, h(w) = 4\,(\pi - \pi/2) = 2\pi \quad \text{e} \qquad K(F) = 0 + 2\pi = 2\pi$$

Anche in questo caso $2\pi\, C(F) = K(F)$.

Riprendiamo la discussione sull'equivalenza delle forme e gli invarianti introducendo la seguente

Definizione: diremo che due forme F_1, F_2 sono combinatoriamente equivalenti, se presentano lo stesso numero di triangoli e lo stesso schema di assemblaggio indipendentemente dalle misure dei singoli triangoli. Nel seguito utilizzeremo il simbolo F_1F_2 per indicare che due forme si corrispondono secondo questo tipo di equivalenza combinatoria.

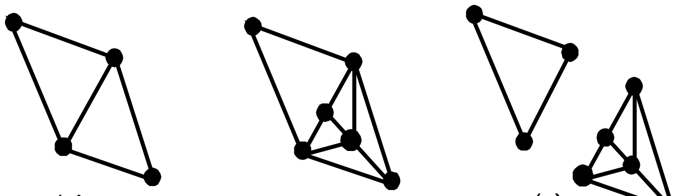
Dalla definizione che abbiamo dato per l'equivalenza combinatoria segue immediatamente che due figure equivalenti hanno la stessa caratteristica, ovvero la caratteristica è un invariante. Inoltre il legame introdotto dall'equazione di Gauss–Bonnet tra caratteristica e curvatura fa sì che anche le curvature siano invarianti:

$$F_1F_2 \qquad \Rightarrow \qquad C(F_1) = C(F_2) \qquad \Rightarrow \qquad K(F_1) = K(F_2)$$

Concentriamoci sulla prima delle due implicazioni e chiediamoci se la caratteristica possa restare un invariante anche sostituendo l'equivalenza combinatoria con altri tipi di equivalenza più deboli. Possiamo spingere anche oltre la nostra ricerca cercando la relazione di equivalenza più debole per la quale la caratteristica resta un invariante.

Indebolire la relazione significa diminuire il numero di proprietà che due forme devono avere in comune per poter essere considerate equivalenti. Abbiamo già sottolineato la possibilità di costruire due figure che, pur avendo stesso numero di vertici, lati e facce, dunque stessa caratteristica, hanno diversi incollaggi tra i lati e non sono pertanto equivalenti. Potremmo tuttavia introdurre una nuova relazione in rapporto alla quale possano essere considerate equivalenti. Per farlo cominciamo con osservare che la caratteristica di una figura non cambia operando una suddivisione dei triangoli che la compongono. Notiamo inoltre che le due figure del nostro controesempio possono essere trasformate in due forme equivalenti proprio con una suddivisione.

Precisiamo meglio cosa intendiamo per suddivisione di una superficie. In una suddivisione trasformiamo i singoli triangoli in unioni di triangoli più piccoli rispettando le regole di costruzione che ci siamo dati e facendo in modo che vengano rispettate anche globalmente. Nell'esempio mostrato la figura di partenza (a) viene suddivisa (b) in modo corretto per quanto riguarda il singolo triangolo, ma scorrettamente per quanto riguarda la forma nel complesso. Questo perché l'introduzione del vertice v ha prodotto una situazione che non rispetta le regole di costruzione convenute. Se infatti fossimo partiti dai triangoli separati (c) non avremmo potuto incollarli mettendo a contatto uno stesso lato di quello a sinistra con due lati di quello a destra.

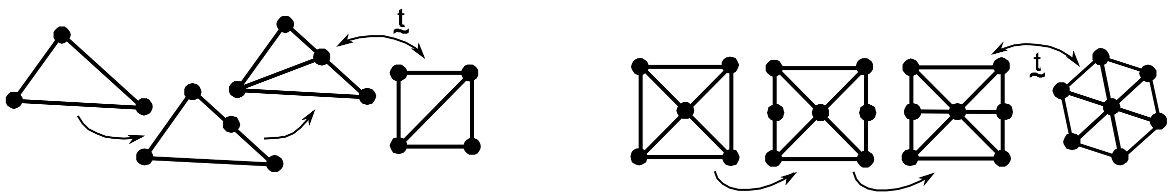


(a) (b) (c)

Per indicare che F' è una suddivisione di F useremo il simbolo $F \angle F'$.

Definizione: diremo che due forme F_1, F_2 sono topologicamente equivalenti, se esistono suddivisioni $F_1 \angle F_1'$ e $F_2 \angle F_2'$ tali che $F_1' F_2'$. Nel seguito utilizzeremo il simbolo $F_1 F_2$ per indicare che due forme si corrispondono secondo questo tipo di equivalenza.

Consideriamo un triangolo ed un quadrato diviso in due triangoli da una diagonale. Le due forme non sono combinatoriamente equivalenti, tuttavia lo sono topologicamente. Basta infatti aggiungere un vertice ad uno dei lati del triangolo e collegarlo con il vertice opposto per avere una suddivisione combinatoriamente equivalente alla seconda figura.



Ancora un esempio. Due poligoni qualsiasi, triangolati unendo il centro con i vertici, sono topologicamente equivalenti. Per convincersene basta operare una suddivisione di quello con il minor numero di lati per ottenere due forme combinatoriamente equivalenti.

Durante il secondo incontro si sono manifestati invece un po' di problemi e reticenze da parte di alcuni alunni.
Inizialmente i ragazzi sono apparsi molto spaesati sul compito a loro assegnato il giorno precedente dall'insegnante, ma hanno chiesto a tale scopo delucidazioni in merito, perché interessati all'argomento. Durante questa parte del laboratorio il concetto di relazione d'equivalenza ed elemento rappresentativo di una classe d'equivalenza ha suscitato qualche problema. I ragazzi non riuscivano a ricordare né la definizione né il significato di tale termine. Il docente ha quindi utilizzato un approccio molto diverso rispetto a quelli di solito utilizzati alle scuole superiori, ha spiegato dapprima intuitivamente il significato di relazione d'equivalenza e poi ha chiesto alla classe come fare a stabilire se due figure

costruite siano equivalenti. Inizialmente i ragazzi sono apparsi un po' spaesati e difatti la maggior parte di loro ha chiesto: "In che senso?".

NOTA: Di solito l'approccio utilizzato alle scuole superiori per introdurre il concetto di relazione d'equivalenza è questo (utilizzando molto la lavagna):
- richiami al concetto di relazione
- definizione di relazione d'equivalenza
- individuazione della stessa tra varie relazioni
Oppure:
- richiami al concetto di relazione
- individuazione di aspetti comuni a varie relazioni d'equivalenza
- definizione di relazione d'equivalenza

L'approccio del docente è invece stato (senza l'utilizzo della lavagna):
- definizione intuitiva di relazione d'equivalenza, classe d'equivalenza e di elemento rappresentante di una classe d'equivalenza.
- pochi esempi

Pregi e difetti di questi due approcci:
Il primo non facilita un apprendimento di tipo intuitivo, ma permette a tutti gli alunni di rielaborare personalmente e verificare se hanno compreso o meno il concetto; in caso non affermativo l'alunno può rivisitare l'argomento rileggendo gli appunti.
Il secondo approccio valorizza invece l'intuizione ed in un certo senso snellisce la lezione soprattutto per ragazzi con forti capacità intuitive.

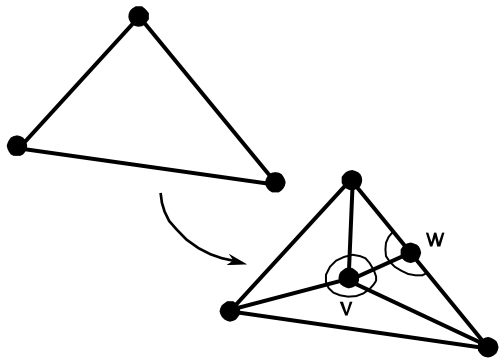
Da parte di uno studente è stato puntualizzato che sui libri di geometria due triangoli sono equivalenti se sono uguali anche le loro misure. Rispondendo che questa era solo una possibile relazione di equivalenza, in generale siamo noi a sceglierne una che faccia al caso nostro, il docente ha ancora più spaesato gli alunni, che forse e purtroppo sono abituati a vedere la matematica "senza possibilità di scelta". Il problema è però poi stato superato continuando a lavorare su questo aspetto con l'avanzamento dei lavori.
Successivamente i ragazzi hanno mostrato un po' di reticenza nei confronti del laboratorio, facendo cadere in un certo senso il grado di certezza da parte di noi osservatori riguardo alla mancanza di problemi sull'astrazione del passaggio dal gioco reale al modello matematico di gioco di lego, dato per scontato già durante l'incontro precedente.
Pensavamo cioè che fosse chiaro agli studenti che il gioco Lego fosse un pretesto per la costruzione di un modello matematico su cui poter lavorare. È stata invece posta la seguente domanda:
"Cosa c'entra tutto questo con i giochi lego? "
Il docente ha risposto dicendo che il gioco lego voleva essere una scusa o un pretesto per introdurre dei problemi geometrici. Una ragazza un po' indispettita ha allora affermato: "quindi a questo punto non parliamo più di giochi lego ma di geometria". È stato triste constatare che la persona in questione non si è presentata all'incontro del giorno successivo.
Penso che sia importante dire che, parlando con alcuni alunni durante l'intervallo riguardo a questa domanda, è stata trasmessa la seguente informazione. L'aspettativa che essi avevano nei confronti dei laboratori pomeridiani era diversa da ciò che poi si sono trovati a fare. Essi pensavano che il laboratorio lego trattasse qualcosa di più concreto e coinvolgente, che li facesse lavorare in maniera più autonoma.
Nonostante questo episodio il lavoro è continuato, il gruppo si è però diviso in due parti, una parte che seguiva animosamente la lezione ed una parte che invece sembrava assente e non prendeva nemmeno più appunti.

Se riflettiamo sugli ultimi due esempi possiamo avanzare la congettura che due figure topologicamente equivalenti abbiano la stessa caratteristica:

$$F_1F_2 \Rightarrow C(F_1) = C(F_2)$$

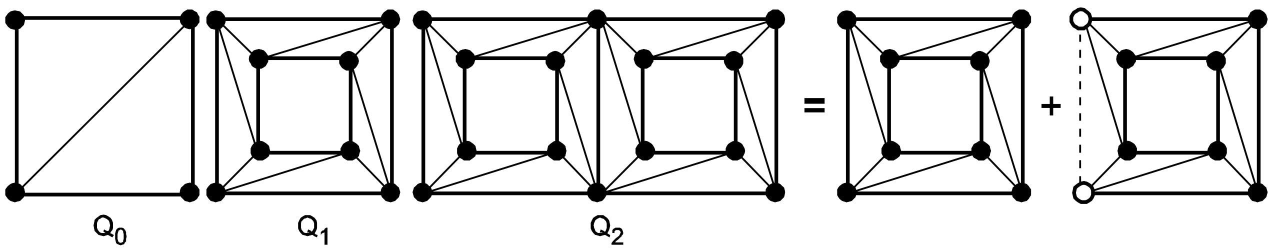
Per dimostrarne la validità ci basta mostrare che le caratteristiche di una figura F e di una sua suddivisione $F\angle F'$ sono uguali. Questo perché, per definizione, $F_1F_2 \Leftrightarrow F_1'F_2'$, dove $F_1\angle F_1'$ e $F_2\angle F_2'$, ed inoltre $F_1'F_2' \Rightarrow C(F_1') = C(F_2')$. Pertanto se dimostriamo che $C(F') = C(F)$ dall'uguaglianza tra le caratteristiche delle suddivisioni $C(F_1') = C(F_2')$ seguirà $C(F_1) = C(F_2)$.

La formula di Gauss-Bonnet, $2\pi\ C(F) = K(F)$, ci permette di spostare l'attenzione dalla caratteristica alle misure degli angoli intorno ai vertici. Quando suddividiamo un triangolo in modo anche complesso introduciamo nuovi vertici che possono trovarsi sia all'interno del triangolo di partenza che sui suoi lati. Per quanto riguarda i vertici interni, la somma degli angoli nel loro intorno vale 2π, dunque per ciascuno di essi $k(v) = 2\pi - \alpha(v) = 2\pi - 2\pi = 0$ e la loro aggiunta non cambia il valore della somma che definisce K(F). Una considerazione analoga vale per i nuovi vertici sui bordi: la somma degli angoli che li circondano vale π, quindi $h(w) = \pi - \alpha(w) = 0$ ed anche in questo caso non si hanno variazioni nel valore di K(F).



Ora che abbiamo chiarito cosa significhi che due figure del nostro gioco sono equivalenti mostriamo che le semplici regole di costruzione che ci siamo dati non limitano il numero di forme diverse tra loro che possiamo creare. Vedremo infatti come costruire famiglie di infinite forme, sia chiuse che aperte, non equivalenti tra loro.

Consideriamo la sequenza di figure triangolate ottenute partendo da un quadrato, Q_0, ed aprendo in esso 1, 2, 3… fori. Indicheremo con Q_n la figura che presenta n fori. Calcoliamo le caratteristiche delle prime due.



Q_0 presenta 4 vertici, 5 lati e 2 facce: $C(Q_0) = 1$.
Q_1 ha 8 vertici, 16 lati e 8 facce: $C(Q_1) = 0$.
Sappiamo che l'uguaglianza delle caratteristiche è condizione necessaria perché due forme siano topologicamente equivalenti, dunque Q_0 e Q_1 non sono equivalenti.

Determiniamo ora una formula generale per $C(Q_n)$. Immaginiamo di costruire Q_2 a partire da due Q_1. Nell'incollare le due figure due coppie di vertici ed una di lati vengono ad essere condivisi, quindi per non includerli due volte nel conteggio della parte combinatoria dovremo eliminarli:

$$C(Q_2) = 2\ C(Q_1) - 2 + 1 = 0 - 2 + 1$$

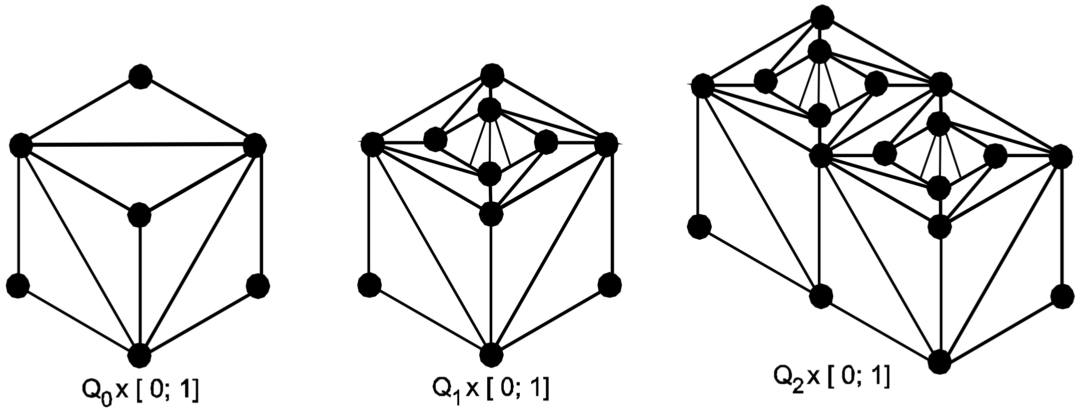
Osservando i risultati ottenuti in questi primi tre casi possiamo avanzare una congettura:

$$C(Q_n) = 1 - n.$$

Dimostriamone la validità per induzione. Per ipotesi induttiva $C(Q_{n-1}) = 1 - (n-1) = 2 - n$. Ogni volta che aggiungiamo una Q_1 per passare da una figura della successione alla seguente dobbiamo togliere 2 vertici ed un lato:

$$C(Q_n) = C(Q_{n-1}) + C(Q_1) - 2 + 1 = 2 - n + 0 - 2 + 1 = 1 - n.$$

In conclusione Q_n e Q_m non sono topologicamente equivalenti se $m \neq n$ e la successione costruita costituisce una famiglia infinita di esempi due a due non equivalenti.



Una seconda famiglia, questa volta costituita da figure senza bordo, può essere costruita partendo da un cubo e scavando in esso dei canali. Possiamo pensare di ottenere questi oggetti a partire da quelli della famiglia precedente impilando una sull'altra delle forme Q_n fino a coprire in altezza il segmento [0; 1]. Questo procedimento ricorda la costruzione del prodotto cartesiano di insiemi, pertanto indicheremo i membri della nuova famiglia con $b(Q_n \times [0; 1])$, dove b(…) sta ad indicare che consideriamo solo la superficie che delimita le nostre costruzioni, non il volume all'interno.

Per determinare la caratteristica iniziamo come prima con alcuni casi particolari.
La figura $b(Q_0 \times [0; 1])$ è formata da una base, un coperchio ed un anello laterale per un totale di 8 vertici, 18 lati e 12 facce:

$$C(b(Q_0 \times [0; 1])) = 8 - 18 + 12 = 2.$$

In $b(Q_1 \times [0; 1])$ apriamo un foro nella base e nel coperchio ed aggiungiamo un secondo anello per le pareti del canale che attraversa il cubo. Questa volta abbiamo 16 vertici, 48 lati e 32 facce:

$$C(b(Q_1 \times [0; 1])) = 16 - 48 + 32 = 0.$$

$b(Q_2 \times [0; 1])$ si costruisce incollando insieme due $b(Q_1 \times [0; 1])$. La caratteristica si ottiene sottraendo al doppio della caratteristica di $b(Q_1 \times [0; 1])$ vertici, lati e facce condivise o appartenenti alla parete che separerebbe internamente i due volumi. Si tratta di 4 vertici, 6 lati e 4 facce:

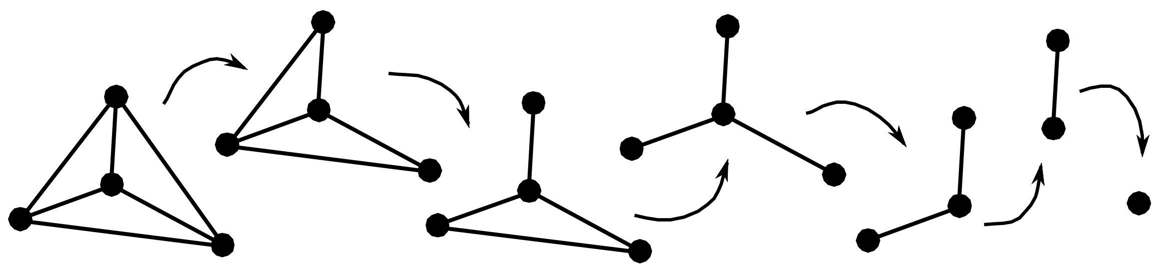
$$C(b(Q_2 \times [0; 1])) = 2\, C(b(Q_1 \times [0; 1])) - (4 - 6 + 4) = 0 - 2 = -2.$$

Alla luce di questi casi particolari e pensando di passare da $C(b(Q_{n-1} \times [0; 1]))$ al successivo incollando un elemento $C(b(Q_1 \times [0; 1]))$ possiamo avanzare un'ipotesi sull'espressione della caratteristica:

$$C(b(Q_n \times [0; 1])) = 2 - 2n$$

I vertici che si trovano sulle forme di questa famiglia sono tutti circondati da intorni delimitati da spezzate chiuse. Si tratta pertanto di oggetti senza bordi e potremmo pensare di utilizzarli come modelli per studiare un'altra famiglia formata da sfera, ciambella con un foro (toro), due ciambelle incollate tra loro, … .

La caratteristica è invariante anche per una classe di trasformazioni più ampia di quella considerata finora. Arricchiamo la varietà degli elementi base per le nostre costruzioni aggiungendo ai triangoli vertici e lati. Inoltre cambiamo le regole del gioco permettendo di modificare le forme agendo anche su singoli lati, facce o vertici. Mostriamo che la caratteristica resta costante anche in questo nuovo gioco.



Partiamo ad esempio da un triangolo F suddiviso in tre parti unendo i vertici con un punto al suo interno. La forma F' ottenuta eliminando uno dei lati ha la stessa caratteristica di F perché con la nostra manipolazione abbiamo sottratto un lato ed una faccia, dunque:

$$C(F') = V - (L - 1) + (T - 1) = V - L + T = C(F)$$

In modo analogo la caratteristica resta immutata se togliamo anche gli altri due lati rimanendo con F" formata da quattro vertici da tre segmenti che li raccordano. Possiamo spingerci oltre eliminando uno dei vertici esterni ed il lato di raccordo:

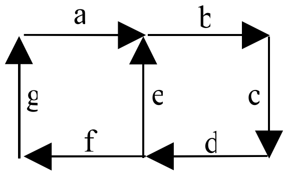
$$C(F''') = (V - 1) - (L - 1) = V - L = C(F'')$$

Proseguendo in questo modo arriviamo con trasformazioni continue dal triangolo di partenza fino ad un singolo vertice. La natura dell'oggetto è cambiata profondamente, tuttavia la caratteristica è rimasta invariata. Questo è un sintomo del fatto che la caratteristica deve essere legata ad una proprietà debole dell'oggetto. Possiamo eliminare molti dei dettagli che contraddistinguono un dato oggetto senza per questo alterare la sua caratteristica.

Ancora un esempio. Se partiamo dal quadrato con il foro al centro, $C(Q_1) = 0$, possiamo ridurlo ad un anello. Iniziando con il quadrato con due buchi, $C(Q_2) = -1$, arriviamo a due anelli.
In generale, riducendo a scheletri formati da anelli vuoti gli elementi della famiglia Q_n arriviamo ad un numero di anelli che è legato alla caratteristica della figura di partenza dalla relazione:

$$C(Q_n) = 1 - \text{numero di anelli}$$

Situazioni analoghe si incontrano in contesti assai diversi, come ad esempio nello studio dei circuiti elettrici. Consideriamo un circuito a due maglie, stabiliamo un verso di percorrenza ed un'intensità per ogni tratto del circuito e scriviamo le equazioni per i nodi. Otteniamo un sistema di 6 equazioni in 7 incognite con una soluzione con due gradi di libertà, tanti quante sono le maglie.



$$\begin{cases} g - a = 0 \\ f - g = 0 \\ d - f - e = 0 \\ c - d = 0 \\ b - c = 0 \\ a + e - b = 0 \end{cases} \qquad \text{Soluz.:} \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \\ b \\ b\text{-}a \\ a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La soluzione si può scrivere come combinazione lineare di due vettori che descrivono rispettivamente la maglia di sinistra e di destra. In altre parole siamo di fronte ad un primo esempio di come le questioni che abbiamo affrontato da un punto di vista geometrico possano avere una controparte algebrica. È un primo assaggio di quella che si chiama topologia algebrica.

5. Conclusioni

Alcune note conclusive. Dato il tempo a disposizione ed il pubblico cui si rivolgeva, studenti di fine scuola superiore, il laboratorio non poteva certo avere la pretesa di una trattazione completa dell'argomento. Basta leggere con attenzione per scoprire questioni lasciate aperte. Manca, ad esempio, una dimostrazione rigorosa della formula nel caso generale, per il quale si è solo avanzata una congettura verificata in un paio di casi particolari. Dimostrazione che si potrebbe ottenere partendo dal caso delle superfici chiuse e sfruttando l'invarianza topologica.

Altri problemi interessanti si sarebbero potuti formulare a partire da quelli discussi. Si è visto che per la famiglia $b(Q_n \times [0; 1])$ la caratteristica è sempre un numero pari. È ipotizzabile una superficie con solo intorni chiusi, priva di bordi e con caratteristica dispari? La ricerca della risposta porterebbe a scoprire forme nuove, dalle proprietà insospettate come quelle del nastro di Moebius.

Malgrado questi limiti il laboratorio ha lasciato intravedere uno degli aspetti più affascinanti della matematica, la possibilità di trovare profondi collegamenti tra questioni legate a campi apparentemente senza connessioni tra loro. La scelta del tema di fondo, la formula di Gauss-Bonnet, è particolarmente significativa perché non solo esemplifica come si possa gettare un ponte tra aspetti geometrici e combinatori, ma riesce anche nel suo intento con argomentazioni che non richiedono particolari conoscenze tecniche.

Giunti a questa parte del laboratorio è stato chiesto ai ragazzi di dividersi in gruppi o lavorare autonomamente per affrontare alcuni problemi utili a scoprire delle proprietà delle forme da noi considerate. I ragazzi hanno avuto due ore a disposizione in cui lavorare liberamente. Noi osservatori ed tutors siamo comunque rimasti a loro disposizione per chiarimenti e consigli. Gli alunni non sono però riusciti ad ottenere dei risultati accettabili. I maggiori problemi sono sorti con il Principio d'induzione a loro sconosciuto. Nonostante la spiegazione del docente a riguardo hanno comunque trovato difficoltà nel comprendere tale concetto.

Conclusioni

L'esperienza della settimana matematica ed in particolare dell'osservazione dei laboratori è stata da me vissuta come un'avventura molto positiva. L'avvenimento mi ha offerto molti spunti su cui riflettere.

Il Progetto Lauree Scientifiche punta a migliorare il rapporto degli studenti con le materie scientifiche di base tra le quali sono presenti la matematica e la fisica. Uno degli obiettivi principali di questo progetto è “incrementare il numero di immatricolati afferenti alle discipline scientifiche”, ed in particolare riguardo all’esperienza fatta: “incrementare il numero di immatricolati afferenti alle facoltà di Matematica e Fisica”.
Molte volte mi sono chiesta perché la maggior parte dei giovani di ieri e di oggi (tra i quali includo anche me stessa al momento della scelta universitaria) preferiscano dirigersi verso facoltà come Ingegneria o Informatica piuttosto che Matematica o Fisica. Credo che la prospettiva di un maggior ventaglio di alternative di lavoro sia la causa principale. C’è però anche l’aggravante di come avviene la trattazione della disciplina matematica e fisica durante il percorso di studi secondario. L’insegnamento della matematica avviene in modo teorico, ma senza spunti pratici. Occorrerebbe trasmettere agli alunni l’importanza della matematica come disciplina base di altre discipline molto concrete. Riguardo all’Informatica ad esempio, la matematica è la colonna portante di molte cose, a partire dai formati delle immagini digitali che utilizzano trasformazioni matematiche per ottimizzare lo spazio occupato.
Grandi aziende informatiche hanno bisogno di informatici, ma anche di matematici e fisici.
Il lavoro del matematico/fisico è un lavoro molto teorico ma che assume comunque un’importanza pratica. Credo che valga la pena far notare questa cosa agli studenti delle scuole superiori.