LABORATORIO PRIMA PARTE
LIBRI DI TESTO coordinato dal prof.re FAVILLI

La mia riflessione sui libri di testo è stata guidata dalle domande che ci ha posto, a tal fine, il prof.re Franco Favilli

Perché ho scelto questo laboratorio

Perché ho sempre avuto dei problemi nella scelta di un libro di testo che mi soddisfacesse in pieno e perché sono convinta che fino a che non si usa un libro di testo non lo si conosce veramente.

Alla fine dopo anni di scelte di libri che seguivo solo in minima parte, se non per gli esercizi, ho fatto la scelta radicale di non adottarlo più per il biennio e di adottarlo solo per il triennio guardando più che la teoria, che continuavo a svolgere di testa mia, la parte degli esercizi. I ragazzi comunque non rimangono senza libro di testo, ma se lo costruiscono da loro, ovviamente con il mio aiuto, facendo un lavoro non da poco , ma che finalmente soddisfa me e i miei alunni. Chiamiamo i nostri libri quadernino di algebra e quadernino di geometria.

Esame di coscienza sulle scelte fatte

In questo ultimo anno sono ritornata a scegliere un libro, per il triennio, "Matematica controluce" (ETAS) che avevo adottato qualche anno fa per adeguarmi ai colleghi visto che tanto, come ho detto precedentemente, non lo seguo più di tanto. Ma non ne sono per niente soddisfatta se non per le letture storiche di introduzione degli argomenti. Gli esercizi sono ripetitivi e non ad ampio respiro perchè difficilmente inglobano argomenti dei capitoli precedenti. Per questo motivo ho affiancato al libro di testo un libretto di esercizi degli esami di maturità e di stato degli anni passati.

Capire quale può essere il significato che come educatori e/o insegnanti del valore che si attribuisce al libro di testo. Quali aspettative dopo aver scelto un testo, da voi o dai ragazzi?

Per me è fondamentale avere un punto di riferimento per eventuali dubbi sulla teoria e proprio per questo non sono mai riuscita a trovarne un libro di testo che mi soddisfacesse fino in fondo … i quadernini che si costruiscono invece i ragazzi da soli proprio per come sono nati ricoprono pienamente questo ruolo. Per gli esercizi significativi e non ripetitivi,se non in specifici casi che lo richiedano, si può sempre ricorrere a fotocopie.
Vi racconto come nascono, per il biennio, i nostri quadernini. Mano a mano che i diversi elementi della teoria (assiomi, definizioni, teoremi…) vengono discussi e formulati nelle discussioni collettive, si chiede a ciascun allievo di redigere un testo personale che raccolga tutto questo materiale. Si tratta di un lavoro individuale, che può esser assegnato come compito per casa; tale lavoro richiede una riflessione personale ed uno sforzo di rielaborazione che, secondo la mia esperienza, risulta di grande utilità. All'inizio, l'insegnante dovrà avere cura di revisionare spesso i quaderni; le produzioni degli allievi devono essere valorizzate, corrette pur senza intervenire troppo sulla standardizzazione delle formulazioni. Eventualmente, quando si presta l'occasione si può lanciare la proposta di discutere se due formulazioni 'diverse' dicono o meno la stessa cosa. Precocemente gli allievi acquisiscono un certo gusto per espressioni che a loro detta sono "più matematiche", si tratta di incoraggiare questa tendenza, cercando di darle un senso razionale evitando il rischi della memorizzazione di frasi senza significato. Prevedendo una rilettura collettiva dei quadernini, discrepanze o mancanze emergeranno da un confronto diretto dei diversi quaderni redatti dalla classe e potranno fornire l'occasione per riflessioni su· statuto di definizioni, assiomi e teoremi, ordine nella sequenza degli elementi della teoria. Per quanto riguarda il modello standard di esposizione, ad un certo punto, quando gli allievi hanno raggiunto una certa autonomia e sicurezza nelle proprie capacità espressive, può essere utile confrontarsi con un testo, magari quello delle altre sezioni, come fonte di problemi (soprattutto di consolidamento) in modo che la formulazione standard dei problemi fornisca un modello di uso dei termini e di esposizione matematica, con il quale confrontarsi.

Individuare qualche argomento e confrontarlo in 2 o 3 testi

CALCOLO DEI LIMITI

Sono sempre stata convinta che la continuità debba precedere la parte relativa al calcolo dei limiti … che senso ha altrimenti sostituire il valore di xo nella funzione di cui si sta calcolando il limite?
Matematica controluce non fa così e questo mi aveva portato ad abbandonare il libro di testo per la scelta di NUOVI ELEMENTI DI MATEMATICA DI DODERO BARONCINI MANFREDI che contiene proprio il capitolo Funzioni continue e calcolo dei limiti nel capitolo 13 pag 340.
Anche Manuale Blu di matematica segue il giusto ordine nell'unità 3 del volume 4 modulo U intitolato funzioni continue e calcolo dei limiti, ma, a proposito di quest'ultimo libro, non mi piacciono i libri divisi in vari moduli … Già per fargliene portare a scuola uno!!!!!!!!

Perché è stato scelto questo laboratorio

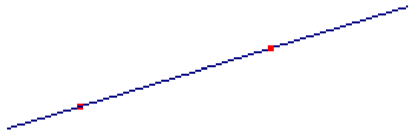
Perché ho sempre avuto dei problemi nella scelta di un libro di testo che mi soddisfacesse in pieno perché sono convinta che fino a che non si usa un libro di testo non si conosce veramente. Alla fine dopo anni di scelte di libri che seguivo solo in minima parte se non per gli esercizi ho fatto la scelta radicale di non adottarlo più per il biennio e di adottarlo solo per il triennio guardando più che la teoria, che continuavo a svolgere di testa mia, .la parte degli esercizi. I ragazzi comunque non rimangono senza libro di testo, ma se lo costruiscono da loro ovviamente con l'aiuto mio … un lavoro non da poco , ma che finalmente mi soddisfaceva.

Per avere un'idea dei quadernini fatti dai miei alunni ne allego uno di geometria.

Enti primitivi

Punto, retta, piano, spazio

Assioma 1: Per due punti passa una e una sola retta.

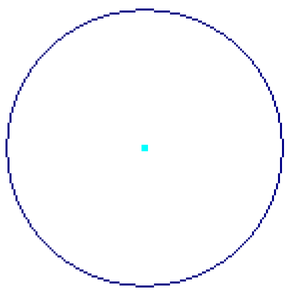


Definizione di segmento e semiretta: Dati due punti A e B su una retta r si individuano tre sottoinsiemi, due illimitati e uno limitato.

Quelli illimitati si dicono semiretta e quello limitato segmento. A e B sono origini delle semirette ed estremi del segmento.

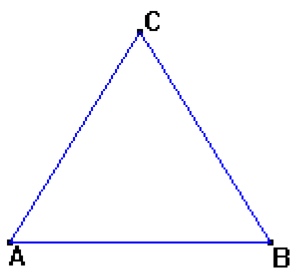
Definizione di distanza tra due punti: Dati due punti A e B, viene detta distanza tra A e B il segmento che li ha come estremi.

Definizione di circonferenza: Insieme dei punti equidistanti da un punto detto centro.

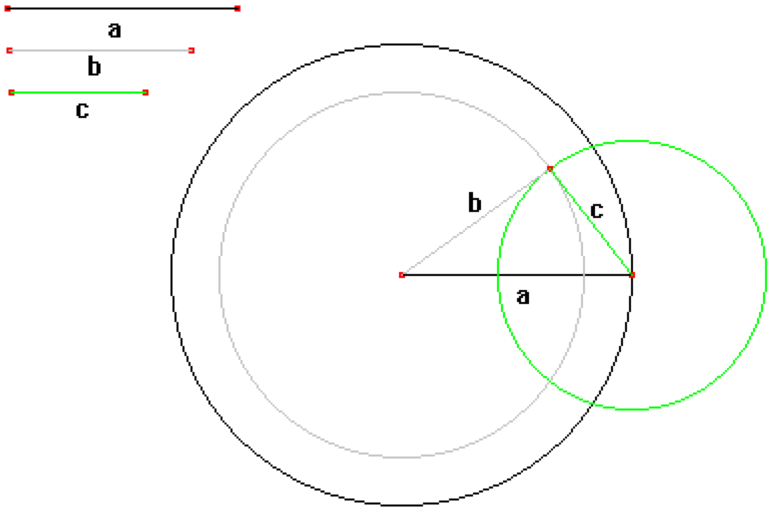


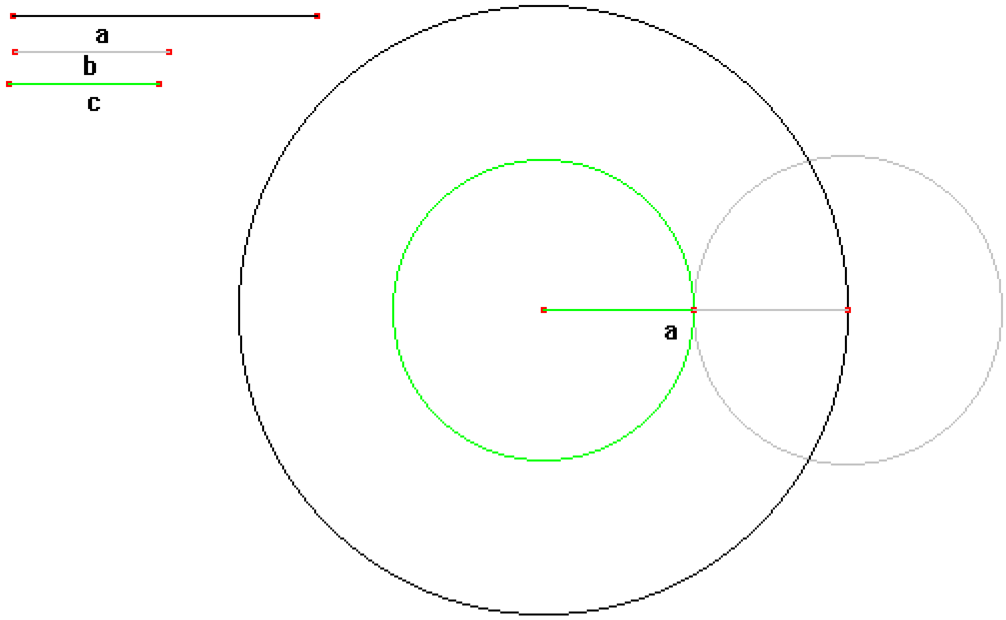
Definizione di punti allineati: Due o più punti si dicono allineati quando appartengono ad una stessa retta.

Definizione di triangolo: Dati tre punti A, B, C è definito il triangolo ABC, se i tre punti non sono allineati il triangolo è detto non degenere. Si dicono lati del triangolo i segmenti che hanno come estremi i punti A e B, A e C, C e B.



Assioma 2: disuguaglianza triangolare:

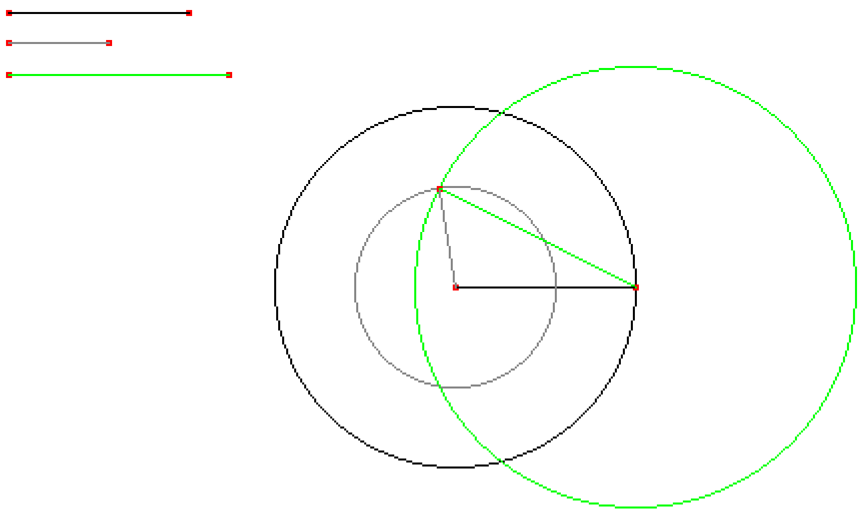




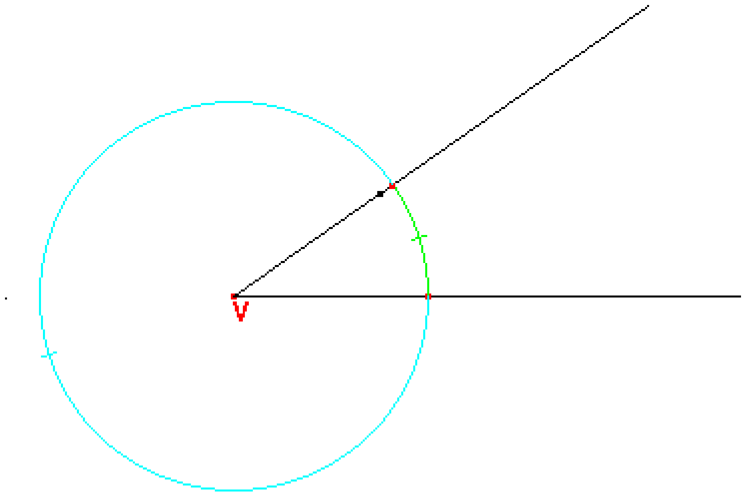
La somma di due lati di un triangolo deve essere uguale o maggiore del terzo lato, se è uguale il triangolo è detto degenere. Basta quindi che la somma dei due lati minori sia uguale o maggiore del terzo lato.

Assioma 3: III° criterio di uguaglianza triangolare:

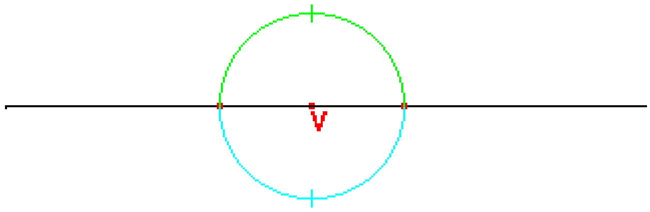
Dati tre segmenti che verificano la disuguaglianza triangolare è possibile costruire un unico triangolo che abbia i tre segmenti come lati. Unico nel senso che se ne possono costruire infiniti in posizioni diverse del piano, ma tutti uguali tra loro.



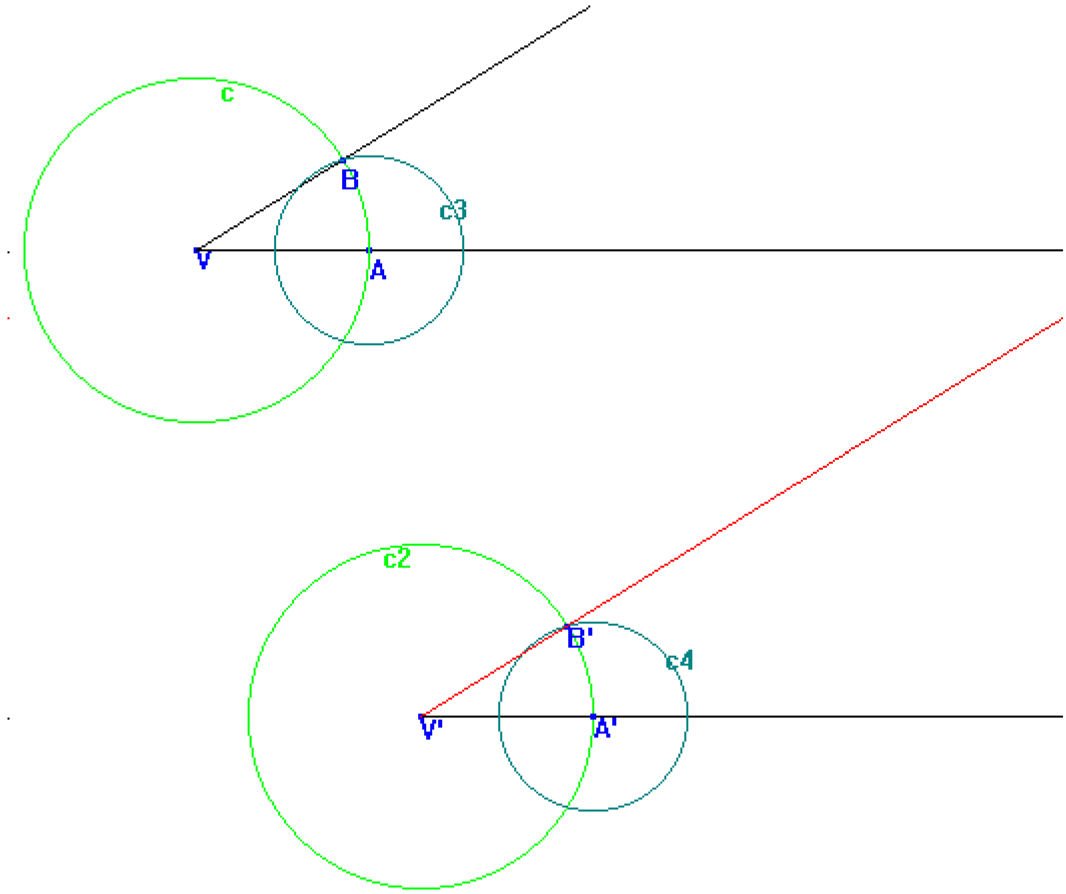
Definizione di angolo: **Date due semirette con l'origine in comune si divide il piano in due sottoinsiemi. Ognuno di questi sottoinsiemi unito alle semirette viene detto angolo. Le semirette vengono dette lati dell'angolo. L'origine delle semirette è detto vertice. L'insieme che contiene il prolungamento delle semirette è detto concavo, l'altro convesso.**



Definizione di angolo piatto: **Se le due semirette, lati dell'angolo, giacciono su una stessa retta l'angolo è detto piatto.**



Teorema 1: Trasporto dell'angolo



Descrizione della costruzione: Centrando in V con apertura a piacere si descrive la circonferenza c1 trovando i punti A e B.
Centrando poi in V', con stessa apertura si descrive la circonferenza c2 trovando A', ora con apertura AB si traccia c3 puntando in A e c4 puntando in A', trovando così B'. Infine si traccia la semiretta che ha origine in V' e passa per B'.

Hp) aVb, V', b'
c1=c2, c3=c4

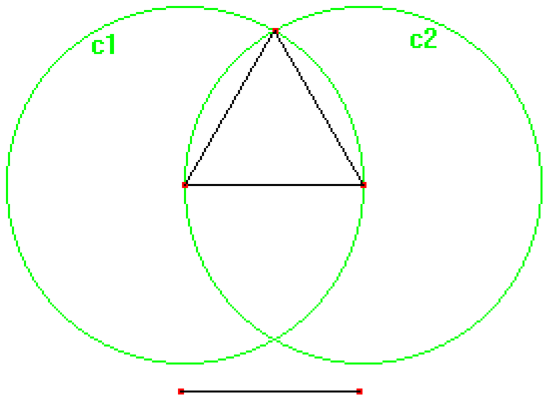
Th) AVB=A'V'B'

Dimostrazione: Volendo dimostrare l'uguaglianza degli angoli aVb e a'V'b' considero due triangoli che li contengono AVB E A'V'B'.
Essi hanno:
- **i lati AV e A'V' uguali perché raggi delle circonferenze uguali c1 e c2;**
- **i lati VB e V'B' uguali perché raggi delle circonferenze uguali c1 e c2;**
- **i lati AB e A'B' uguali perché raggi delle circonferenze uguali c3 e c4.**

I due triangoli considerati, avendo rispettivamente uguali i tre lati, sono uguali per il terzo criterio di uguaglianza triangolare. Essendo uguali, hanno uguali anche gli angoli e in particolare gli angoli aVb e a'V'b' perché opposti ai lati uguali AB e A'B'.

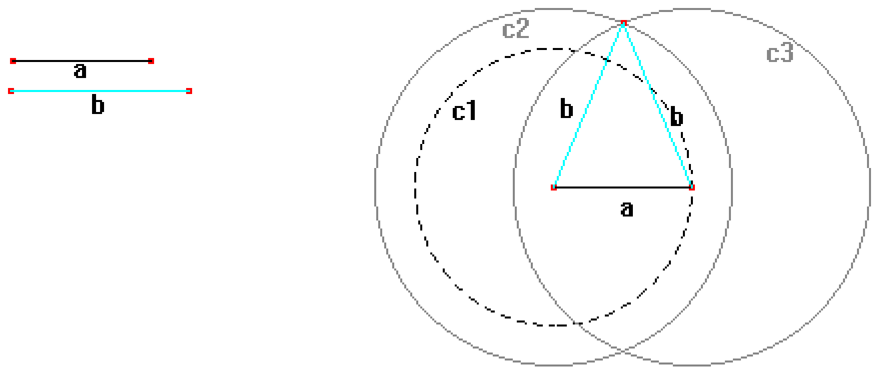
Classificazione dei triangoli rispetto ai lati:

Un triangolo che ha i tre lati uguali è detto equilatero.



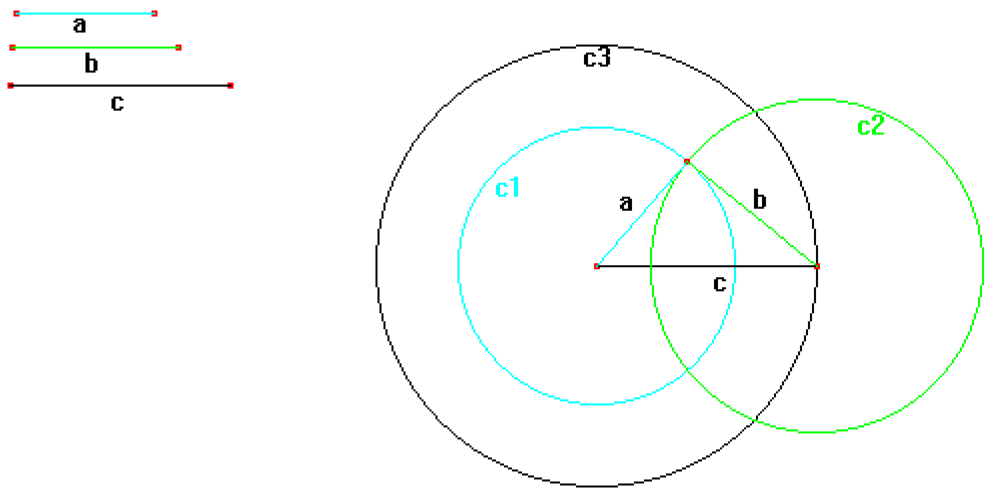
Dimostrazione: I tre lati sono uguali perché raggi di circonferenze uguali c1 e c2.

Un triangolo che ha due lati uguali è detto isoscele.



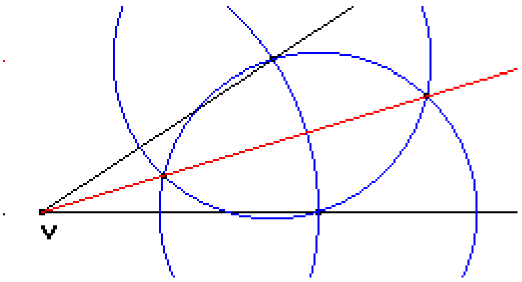
Dimostrazione: I due lati b sono uguali perché raggi di circonferenze uguali c2 e c3.

Un triangolo che ha tutti i lati diversi è detto scaleno.



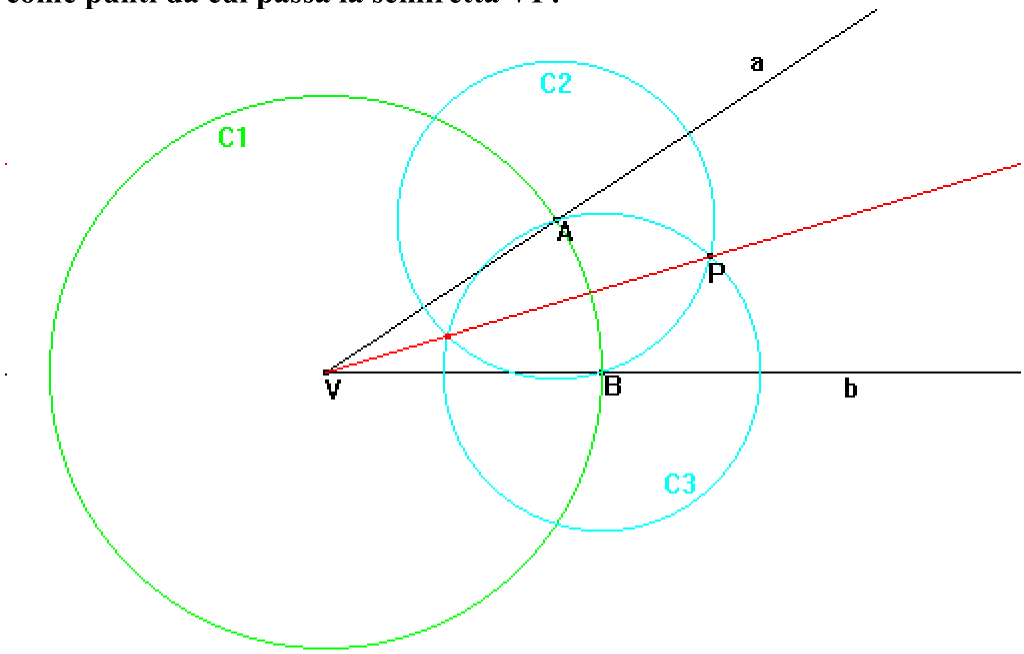
Dimostrazione: I tre lati sono diversi perché raggi di circonferenze diverse c1, c2 e c3.

Definizione di bisettrice di un angolo: **La bisettrice di un angolo di vertice V è quella semiretta con origine V che divide in due parti uguali l'angolo.**



Assioma 4: **Nella definizione di bisettrice abbiamo detto quella perché prendiamo come assioma che la bisettrice di un angolo sia unica.**

Teorema 2: **Costruzione della bisettrice di un angolo con due circonferenze uguali prendendo come punti da cui passa la semiretta VP:**



Descrizione della costruzione: Dato l'angolo aVb, punto in V con apertura a piacere descrivendo la circonferenza c1, trovando così i punti A e B. Ora con apertura AB puntando prima in A e poi in B descrivo le circonferenze uguali c2 e c3, trovando il punto P nato dall'intersezione di c2 e c3. Infine traccio la semiretta che ha origine in V e passa per P.

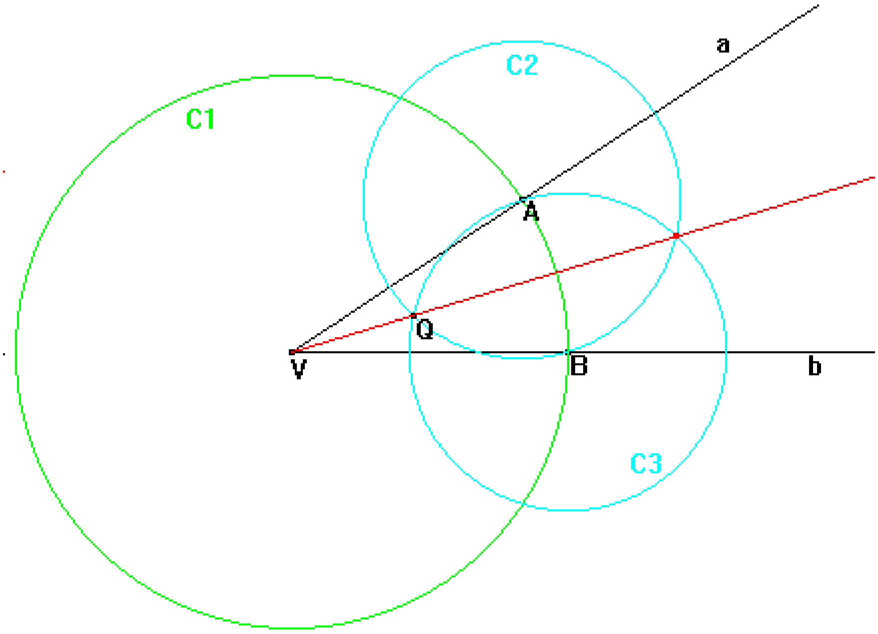
Hp) aVb, c2=c3
Th) AVP=PVB

Dimostrazione: Volendo dimostrare che l'angolo AVP=PVB consideriamo i due triangoli che li contengono AVP e BVP.
Essi hanno:

- **VA=VB perché raggi della stessa circonferenza c1;**
- **AP=BP perché raggi di circonferenze uguali c2 e c3;**
- **VP come lato in comune (sovrapposto).**

Quindi sono uguali per il terzo criterio di uguaglianza triangolare o ASSIOMA 3 e hanno perciò tutti gli elementi corrispondenti uguali, in particolare gli angoli AVP e BVP perché opposti ai lati uguali AP e BP.

Costruzione della bisettrice di un angolo con due circonferenze uguali prendendo come punti da cui passa la semiretta VQ (costruzione uguale alla precedente):



Hp)aVb c2=c3
Th)AVQ=QVB

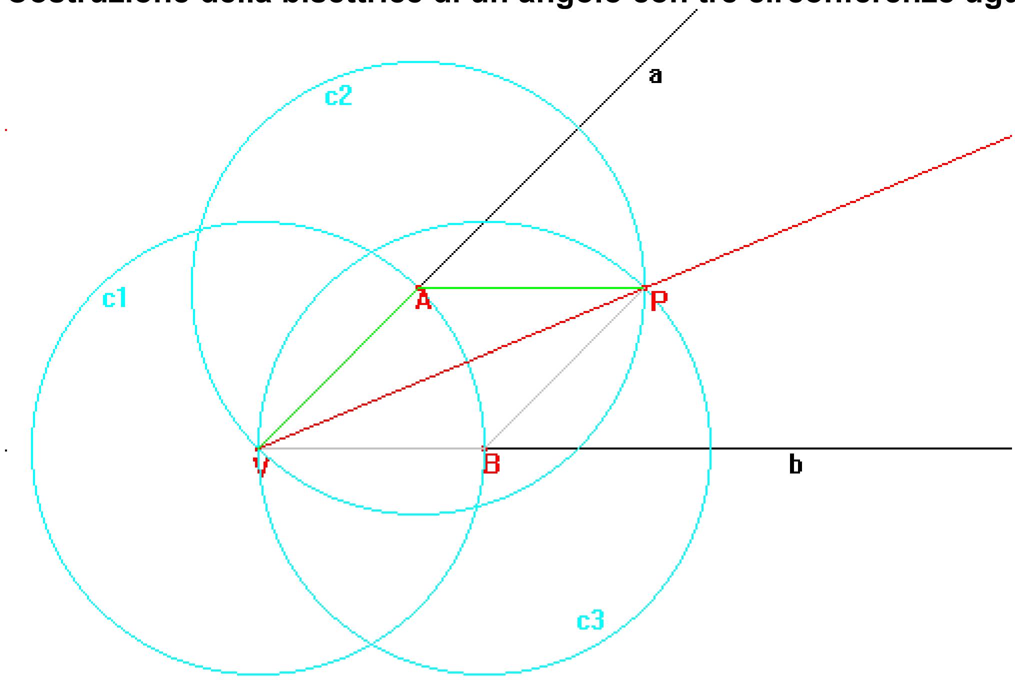
Dimostrazione: Volendo dimostrare che l'angolo AVQ=QVB consideriamo due triangoli che li contengono AVQ e QVB.
Essi hanno:

- **VA=VB perché raggi della stessa circonferenza c1;**
- **AQ=BQ perché raggi delle circonferenze uguali c2 e c3;**
- **VQ in comune (sovrapposto).**

Quindi sono uguali per il terzo criterio di uguaglianza triangolare o ASSIOMA 3 e hanno perciò tutti gli elementi corrispondenti uguali, in particolare gli angoli AVQ e QVB perché opposti ai lati uguali AQ e BQ.

Osservazione: Con l'Assioma 4, unicità della bisettrice, si ottiene che V, P e Q sono allineati.

Costruzione della bisettrice di un angolo con tre circonferenze uguali:



Descrizione della costruzione: Dato l'angolo aVb punto con apertura a piacere in V e descrivo la circonferenza c1 trovando i punti A e B; con la stessa apertura puntando in A e B descrivo le circonferenze c2 e c3. Infine traccio la semiretta che ha origine in V e passa per P.

Hp)aVb c1=c2=c3
Th) angolo AVP=PVB

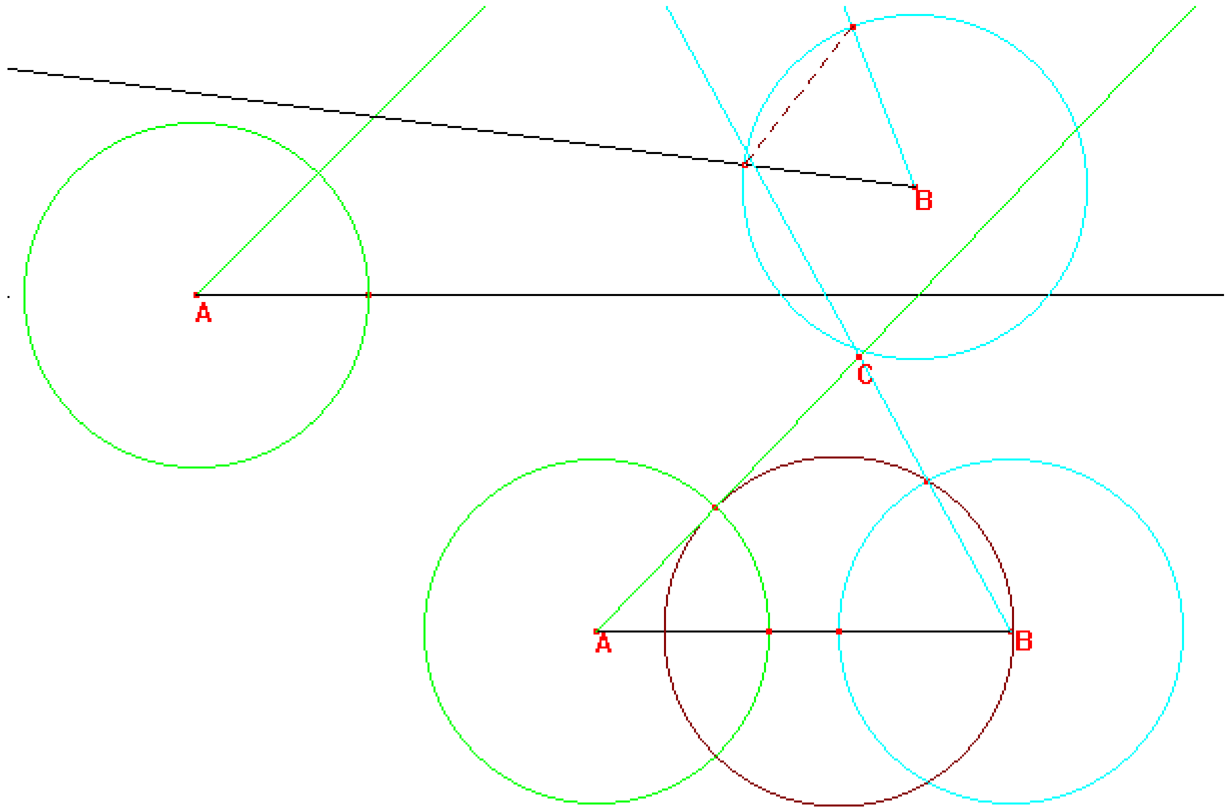
Dimostrazione: Volendo dimostrare che l'angolo AVP=PVB considero due triangoli che li contengono AVP e PVB.
Essi hanno:

- **VA=VB perché raggi della stessa circonferenza c1;**
- **AP=BP perché raggi di circonferenze uguali c2 e c3;**
- **VP in comune (sovrapposto).**

Quindi sono uguali per il terzo criterio di uguaglianza triangolare o ASSIOMA 3 e hanno perciò tutti gli elementi corrispondenti uguali, in particolare gli angoli AVP e BVP perché opposti ai lati uguali AP e BP.

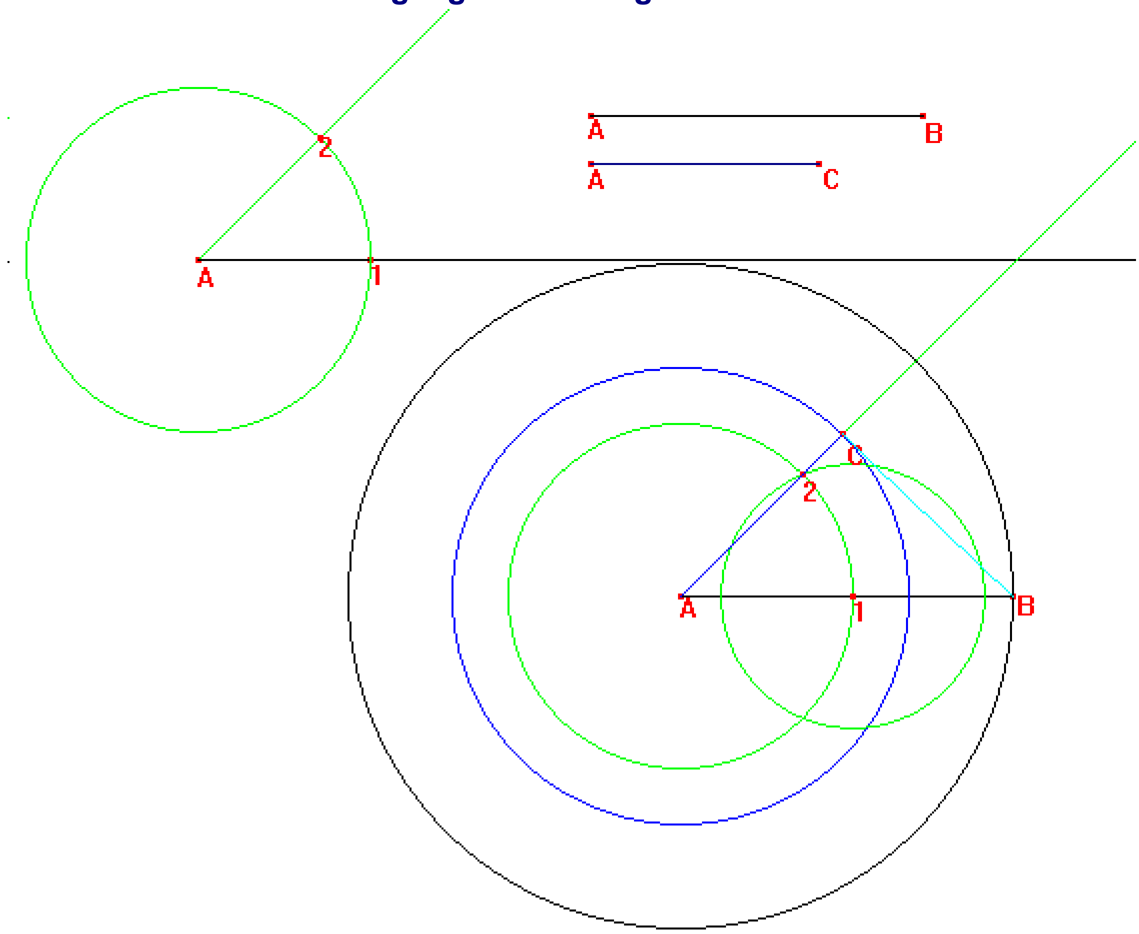
Osservazione: Questa costruzione della bisettrice non vale per l'angolo piatto.

Assioma 5: II° criterio di uguaglianza triangolare:



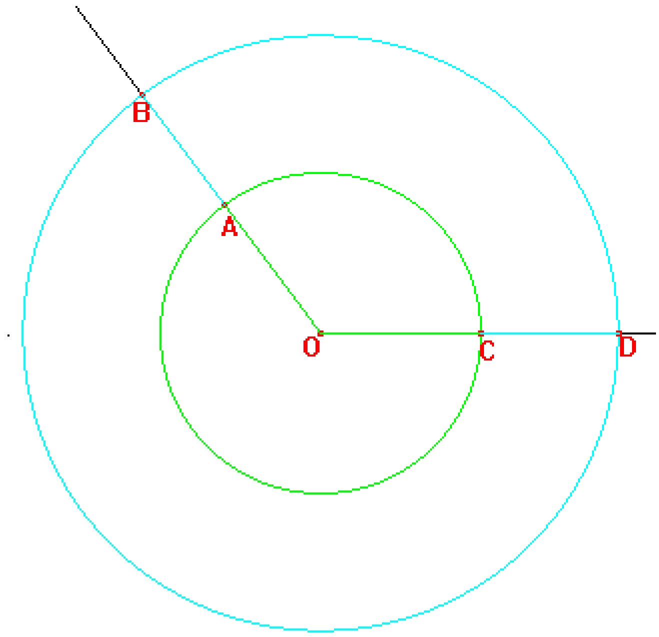
Dato un segmento e due angoli la cui somma sia minore di un angolo piatto è possibile costruire un unico triangolo che abbia tale segmento come uno dei suoi lati e tali angoli come i suoi due angoli adiacenti al segmento. Unico nel senso che se ne possono costruire infiniti in posizioni diverse del piano ma tutti uguali tra loro.

Assioma 6: I° criterio di uguaglianza triangolare:



Dati due segmenti e un angolo minore o uguale ad un angolo piatto è possibile costruire un unico triangolo che abbia tali segmenti come due dei suoi lati e tale angolo come angolo compreso tra i due lati. Unico nel senso che se ne possono costruire infiniti in posizioni diverse del piano ma tutti uguali tra loro.

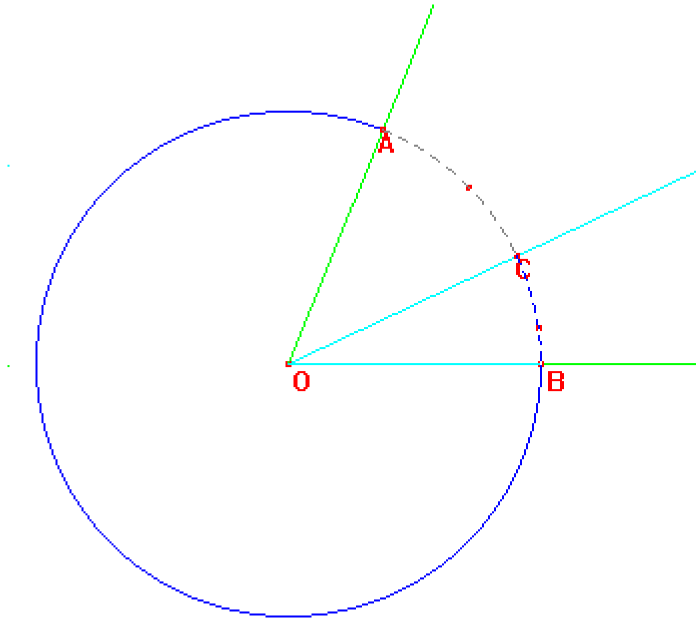
Assioma 7: Differenza di segmenti uguali:



Sottraendo da una coppia di segmenti uguali un'altra coppia di segmenti uguali si ottiene una terza coppia di segmenti uguali. **OD-OC=CD**

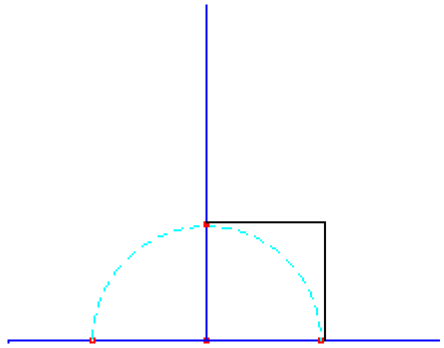
Assioma 8: Tutti gli angoli piatti sono uguali.

Assioma 9: Differenza di angoli uguali:

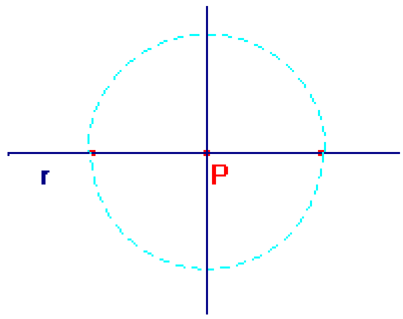


Sottraendo da una coppia di angoli uguali un'altra coppia di angoli uguali si ottiene una terza coppia di angoli uguali. **AOB-COB=AOC**

Definizione di angolo retto: Un angolo retto è la metà di un angolo piatto.



Definizione di retta perpendicolare in un suo punto:
Data una retta r e un suo punto P si dice retta perpendicolare a r in P la retta che contiene la bisettrice di uno degli angoli piatti di vertice P.

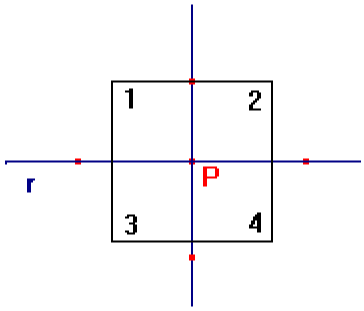


Teorema 3: Unicità della perpendicolare:
La perpendicolare ad una retta r in un suo punto P è unica.
Dimostrazione: Deriva dall'assioma di unicità della bisettrice di un angolo.

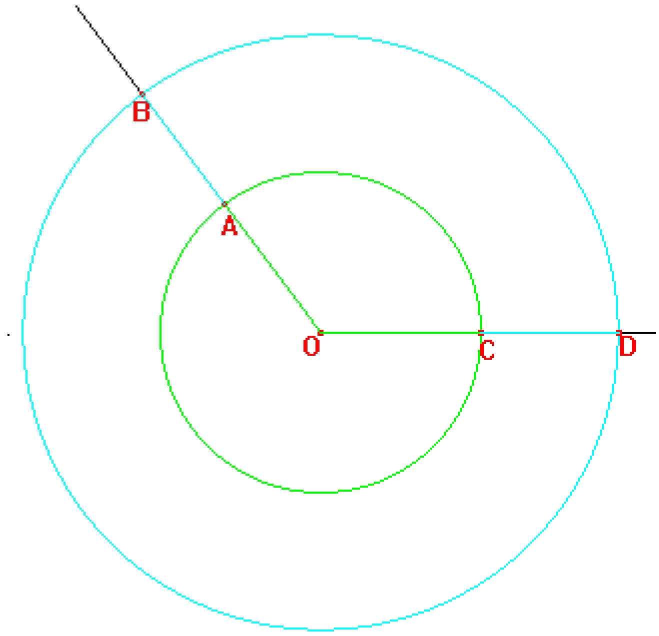
Teorema 4:
Due rette perpendicolari formano 4 angoli retti ma per dimostrare che due rette sono perpendicolari ne basta uno.

Hp) Angolo 1=2= metà angolo piatto

Dimostrazione: Ne basta uno perché se l'angolo 1 è retto, cioè metà di un angolo piatto, lo è anche l'angolo 2 perché insieme formano un angolo piatto; per questo sono retti anche l'angolo 3 perché forma con l'angolo 1 un altro angolo piatto e l'angolo 4 perché forma con il 2 un altro angolo piatto.

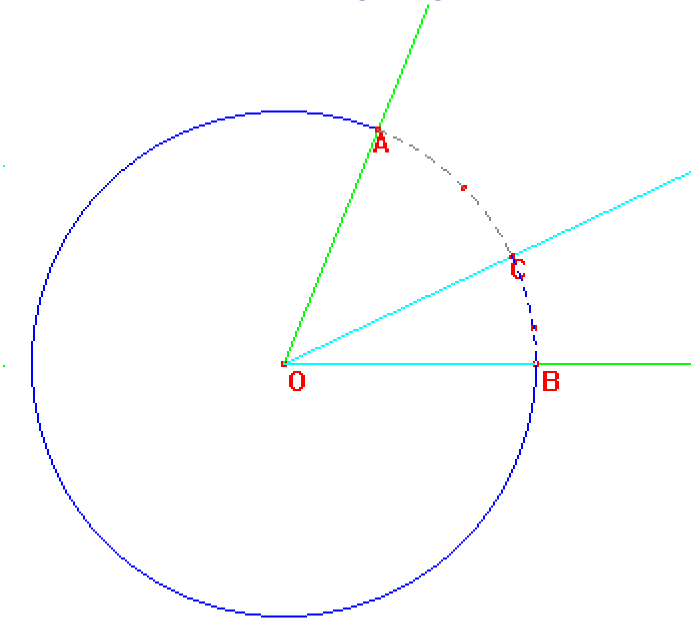


Assioma 10: Somma di segmenti uguali:



Sommando a una coppia di segmenti uguali un’altra coppi di segmenti uguali si ottiene una terza coppia di segmenti uguali. **OC+CD=OD**

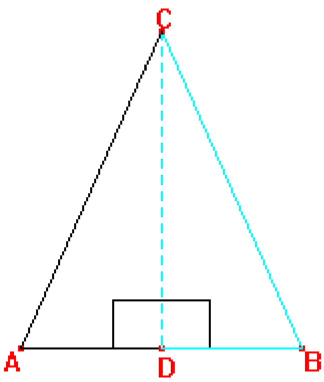
Assioma 11: Somma di angoli uguali:



Sommando a una coppia di angoli uguali un'altra coppia di angoli uguali ottengo una terza coppia di angoli uguali. **BOC+AOC=AOB**

Teorema 5: I° teorema del triangolo isoscele:

In un triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo compreso tra i due lati uguali cade perpendicolarmente sul lato opposto e lo dimezza.



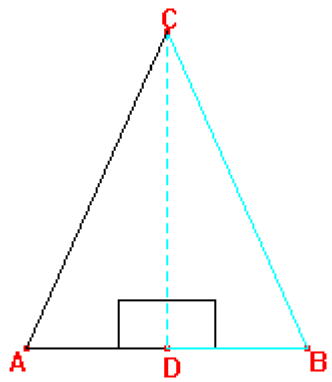
Hp) AC=CB CD bisettrice di ACB e quindi l'angolo ACD=BCD
Th) angolo ADC=BDC

Dimostrazione: Volendo dimostrare che gli angoli CDB e ADC sono uguali considero due triangoli che li contengono CDB e CDA.
Essi hanno:

- **Il lato CD in comune (sovrapposto);**
- **I lati CA e CB uguali per ipotesi;**
- **L'angolo DCB=ACD per ipotesi.**

Quindi sono uguali per il primo criterio di uguaglianza triangolare o ASSIOMA 6 e hanno perciò tutti gli elementi corrispondenti uguali, in particolare i segmenti AD e DB, perché opposti agli angoli uguali ACD e BCD, e gli angoli CDB e ADC perché opposti ai lati uguali CB e CA. Poiché l'angolo ADB è piatto gli angoli ADC e BDC sono retti perché sono la sua metà.

Teorema 6: II° teorema del triangolo isoscele:
Se la bisettrice di un angolo di un triangolo cade perpendicolarmente sul lato opposto il triangolo è isoscele.



Hp) angolo BDC=CDA retti
angolo ACD=BCD

Th) AC=BC

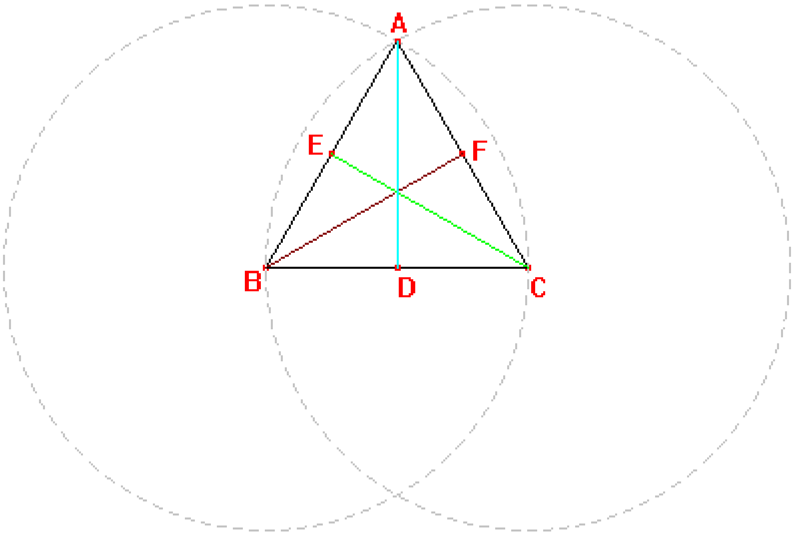
Dimostrazione: Volendo dimostrare che il triangolo ACB è isoscele considero due triangoli che lo contengono CDA e CDB.

Essi hanno:
- **Il lato CD in comune (sovrapposto);**
- **Gli angoli BDC e CDA uguali per ipotesi;**
- **L'angolo DCB=ACD per ipotesi.**

Quindi sono uguali per il secondo criterio di uguaglianza triangolare o ASSIOMA 5 e hanno perciò tutti gli elementi corrispondenti uguali, in particolare i lati AC e CB perché opposti agli angoli uguali ADC e BDC. Avendo due lati uguali il triangolo è, secondo la classificazione dei triangoli rispetto ai lati, ISOSCELE.

Teorema 7: I° teorema del triangolo equilatero:

In un triangolo equilatero le bisettrici dei tre angoli cadono perpendicolarmente sul lato opposto e lo dimezzano.



Hp) AB=AC=BC   angolo BAD=CAD, BCE=ACE, CBF=FBA
Th) angolo ADB=ADC, AEC=CEB, BFC=BFA

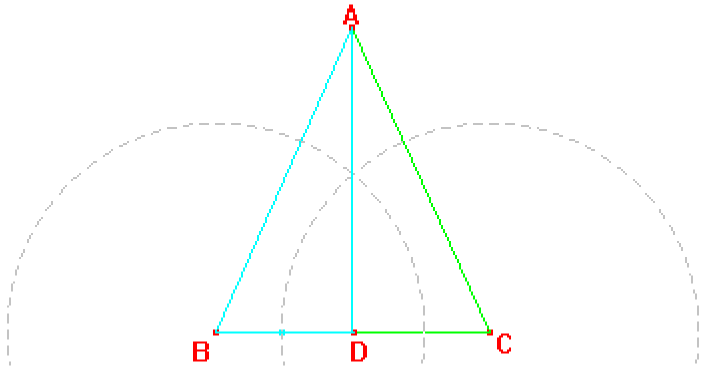
Dimostrazione: Un triangolo equilatero è isoscele rispetto ad ogni suo lato visto come base. Quindi per il TEOREMA 5 tutte le bisettrici cadono perpendicolarmente sul lato opposto e lo dimezzano.

Se le bisettrici dei tre angoli cadono perpendicolarmente sul lato opposto il triangolo è equilatero.

Hp) angolo BAD=CAD, BCE=ACE, CBF=FBA;
AD perpendicolare a BC, CE perpendicolare a AB, BF perpendicolare a AC
Th) AB=AC=BC

Dimostrazione: Poiché la bisettrice AD è perpendicolare a BC per il teorema 6 AC=BC.
Poiché la bisettrice BF è perpendicolare a AC per il teorema 6 AB=BC.
Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza se AD=BC e AB=BC allora CB=AC=AB.
Avendo tutti i tre lati uguali è, secondo la classificazione dei triangoli rispetto ai lati, EQUILATERO.

Teorema 8: Un triangolo isoscele ha due angoli uguali.

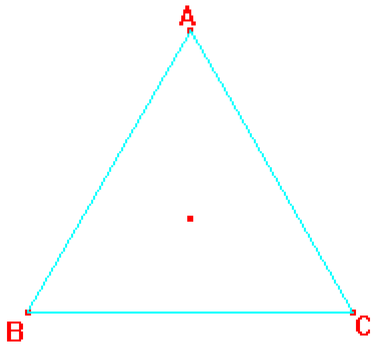


Hp) AB=AC
Th) angolo ABC=ACB
Per costruzione traccio la bisettrice dell'angolo BAC.
Dimostrazione: Volendo dimostrare che il triangolo BAC ha due angoli uguali considero due triangoli che li contengono ADB e ADC.
Essi hanno:

- **Il lato AD in comune (sovrapposto);**
- **Il lato AB=AC per ipotesi;**
- **Gli angoli BAD e DAC uguali per costruzione.**

Quindi sono uguali per il primo criterio di uguaglianza triangolare o Assioma 6 e hanno perciò tutti gli elementi corrispondenti uguali, in particolare gli angoli ABD e ACD perché opposti al lato in comune AD.

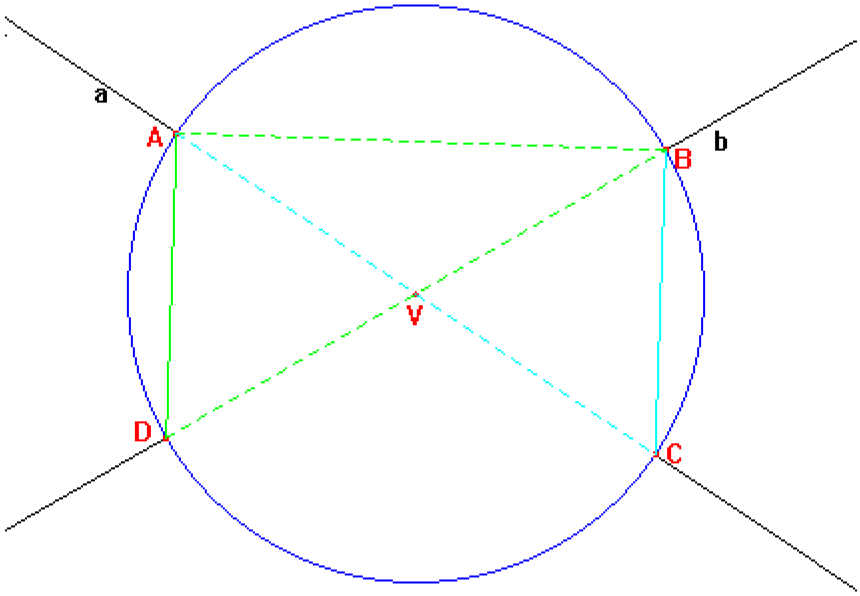
Teorema 8 (II parte):Un triangolo equilatero ha tre angoli uguali.



Hp) AB=BC=AC
Th) angolo BAC=ACB=ABC
Dimostrazione: Poiché un triangolo equilatero ha tutti i lati uguali può essere considerato come un triangolo isoscele su ogni lato considerato come base. Quindi per quanto dimostrato in precedenza se si considera come base AB allora l'angolo CAB=CBA, se si considera come base BC allora l'angolo ABC=ACB e quindi per la proprietà transitiva dell'uguaglianza tutti e tre gli angoli sono uguali.

Definizione rette incidenti: **Due rette si dicono incidenti se hanno un unico punto in comune.**

Teorema 9 o Teorema degli angoli opposti al vertice:



Descrizione della costruzione: Prendiamo due rette incidenti, con apertura di compasso a piacere traccio la circonferenza c1, infine si tracciano i segmenti BC e AD.

Hp) a e b rette incidenti   a interseca b in V   angoli AVB, BVC, CVD, DVA
Th) angolo AVD=BVC   angolo AVB=DVC

Osservazione: I lati AV=BV=DV=CV perché sono tutti raggi della circonferenza C1

Dimostrazione: Volendo dimostrare che i lati AD e BC sono uguali considero due triangoli che li contengono DAB e CBA.
Essi hanno:

- **Il lato AB in comune (sovrapposto);**
- **Il lato DB=AC per somma di due raggi della circonferenza C1 (Assioma 10);**
- **Gli angoli VAB e VBA uguali perché angoli alla base del triangolo isoscele.**

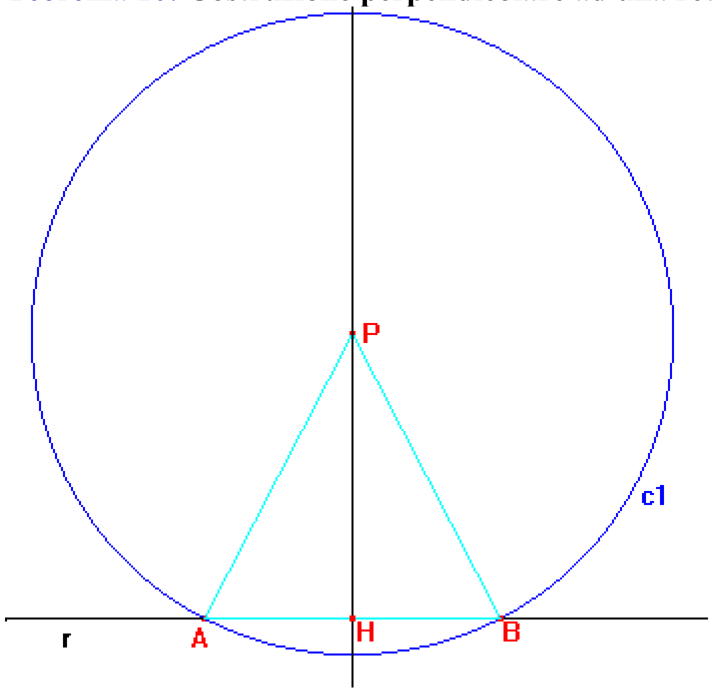
Quindi sono uguali per il primo criterio di uguaglianza triangolare o Assioma 6 e hanno perciò tutti gli elementi corrispondenti uguali, in particolare i lati AD e BC perché opposti agli angoli uguali VAB e CBA.

Volendo dimostrare che gli angoli AVD e BVC sono uguali considero due triangoli che li contengono AVD e BVC.
Essi hanno:

- **AV=VB perché raggi della stessa circonferenza c1;**
- **DV=CV perché raggi della stessa circonferenza c1;**
- **AD=BC per la dimostrazione precedente.**

Quindi sono uguali per il terzo criterio di uguaglianza triangolare o ASSIOMA 3 e hanno perciò tutti gli elementi corrispondenti uguali, in particolare gli angoli AVD e BVC perché opposti ai lati uguali AD e BC.
Per la coppia di angoli AVB e DVC la dimostrazione è analoga partendo dai triangoli ADC e BCD.

Teorema 10: **Costruzione perpendicolare ad una retta r per un punto P esterno ad r.**

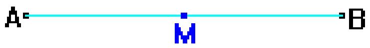


Descrizione della costruzione: Data la retta r e un punto P, esterno ad essa, traccio la circonferenza c1 con raggio maggiore della distanza di P da r, trovando i punti A e B.
Costruisco poi il triangolo APB che avendo i lati PA e PB uguali, perché raggi di c1, è isoscele.
Infine traccio la bisettrice dell'angolo APB.

Hp) retta r punto P
Th) PH perpendicolare a r

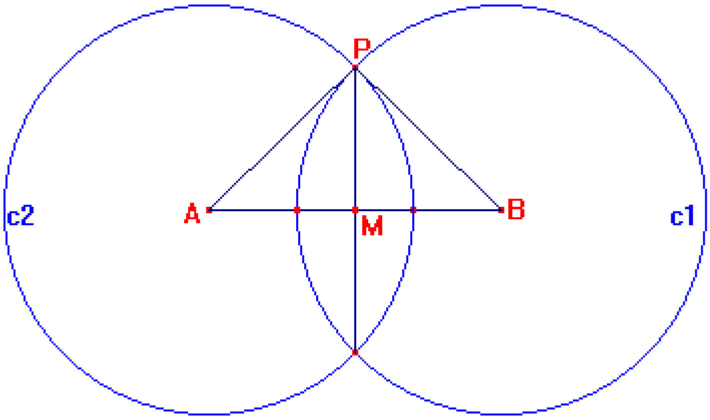
Dimostrazione: PH è perpendicolare a r perché per il Teorema 5 o primo teorema del triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo compreso tra i due lati uguali cade perpendicolarmente sul lato opposto che, in questo caso è il segmento AB sovrapposto ad r.

Definizione punto medio di un segmento: **Il punto medio M di un segmento AB è quel punto che divide in due parti uguali il segmento: AM=MB.**



Assioma 12 o di unicità del punto medio di un segmento:
Nella definizione di punto medio abbiamo detto quello perché prendiamo per assioma che il punto medio di un segmento sia unico.

Teorema 11: **Costruzione del punto medio di un segmento.**



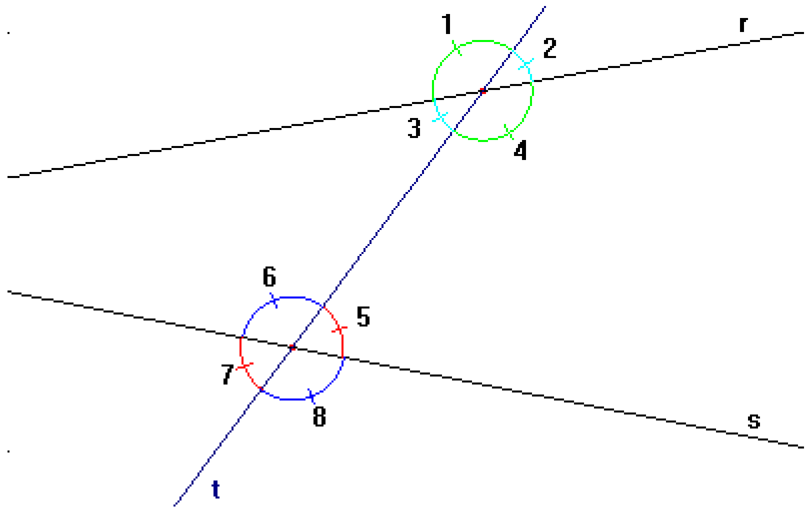
Descrizione costruzione: Dato il segmento AB, traccio le due circonferenze c1 e c2 puntando in B e in A con apertura maggiore della metà del segmento. Traccio ora il triangolo APB che è isoscele perché i due lati AP e PB sono uguali perché raggi di circonferenze uguali c1 e c2. Infine traccio la bisettrice dell'angolo APB.

Hp) AB
Th) AM=MB

Dimostrazione: I segmenti AM e MB sono uguali e quindi M è il punto medio del segmento AB perché per il Teorema 5 o primo teorema del triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo compreso tra i due lati uguali cade perpendicolarmente sul lato opposto e lo dimezza.

Rette tagliate da una trasversale

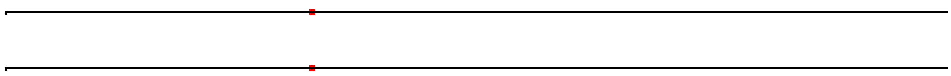
Definizione di trasversale a due rette r e s:
Si dice trasversale di r e s una retta incidente sia ad r che ad s.



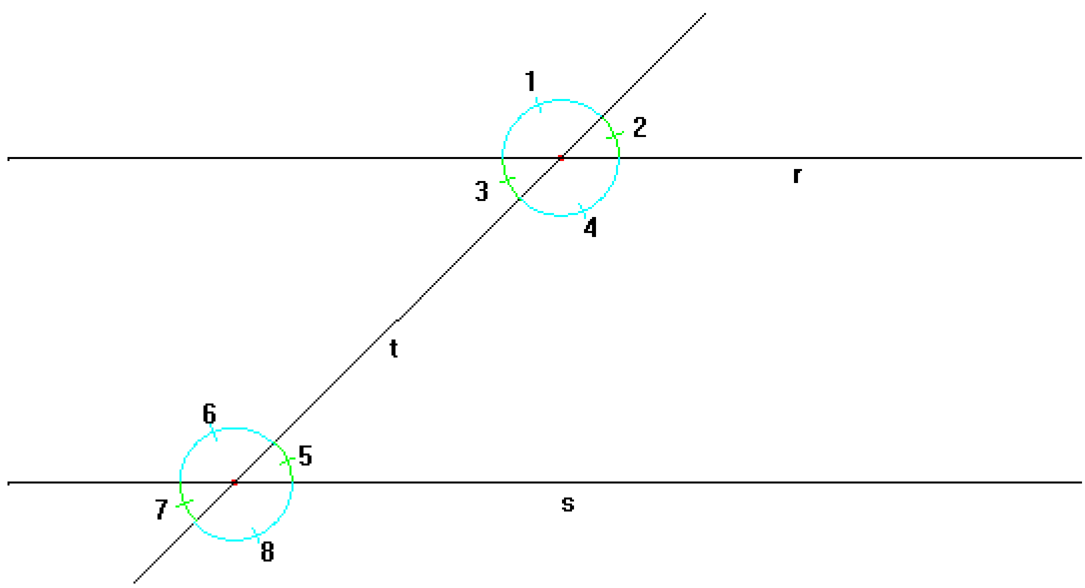
Definizione degli angoli:

- **Gli angoli (6, 4); (5, 3) sono detti alterni interni;**
- **Gli angoli (8, 1); (7, 2) sono detti alterni esterni;**
- **Gli angoli (1, 6); (3, 7); (2, 5); (4, 8) sono detti corrispondenti;**
- **Gli angoli (6, 3); (4, 5) sono detti coniugati interni;**
- **Gli angoli (1, 7); (2, 8) sono detti coniugati esterni.**

Definizione di rette parallele: Due rette si dicono parallele se non hanno punti in comune.

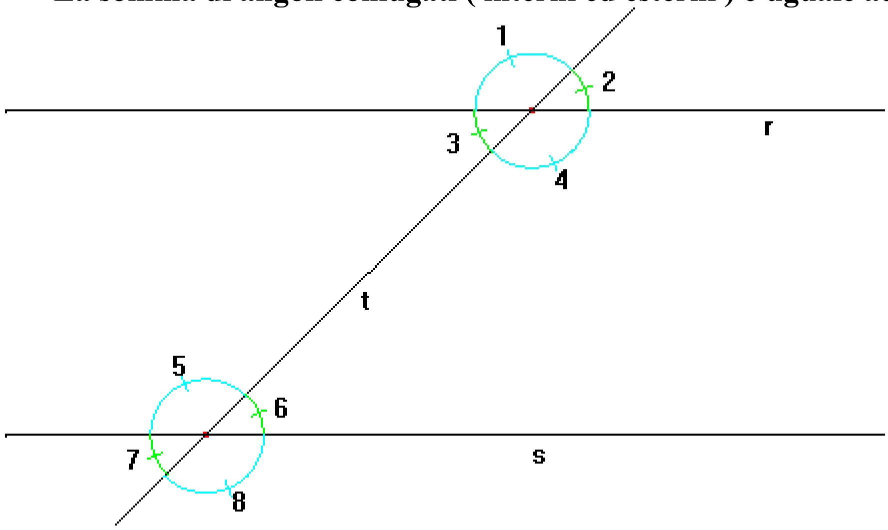


Assioma 13: Delle rette parallele:
Se due rette tagliate da una trasversale formano una coppia di angoli alterni interni uguali le rette sono parallele e viceversa, se due rette sono parallele formano una coppia di angoli alterni interni uguali.



Teorema 12: **Se due rette r e s, tagliate da una trasversale t, formano una coppia di angoli alterni interni uguali e quindi per l'Assioma 13 sono parallele, allora:**

- **Tutte le coppie di angoli alterni interni sono coppie di angoli uguali;**
- **Le coppie di angoli alterni esterni sono coppie di angoli uguali;**
- **Le coppie di angoli corrispondenti sono coppie di angoli uguali;**
- **La somma di angoli coniugati (interni ed esterni) è uguale ad un angolo piatto.**



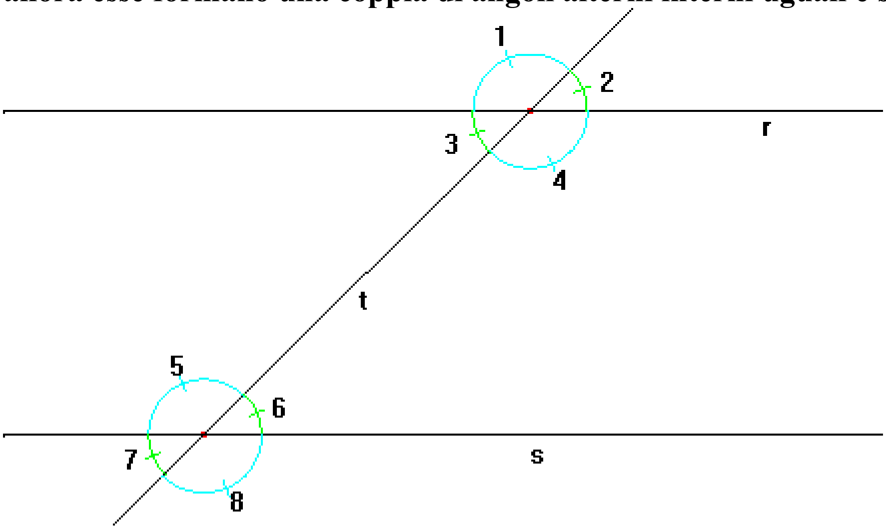
Hp) Angolo 5=4
Th) Angolo 6=3, 2=7, 1=8, 2=6, 1=5, 7=3, 8=4;
Angolo 5+3= angolo piatto, 4+6= angolo piatto, 2+8= angolo piatto, 7+1= angolo piatto

Dimostrazione:

- **Angolo 6=3 per differenza di angoli uguali (Assioma 9), angolo piatto-5=6 e angolo piatto-4=3, per Hp 5=4 e quindi 6=3;**
- **Angolo 2=7 per il Teorema 9 degli angoli opposti al vertice perché opposti agli angoli uguali 3 e 6;**
- **Angolo 1=8 per il Teorema 9 degli angoli opposti al vertice perché opposti agli angoli uguali 4 e 5;**
- **Angolo 2=6 perché 6=3 e 3=2 perché opposti al vertice, quindi 2=6;**
- **Angolo 1=5 perché 5=4 e 4=1 perchè opposti al vertice, quindi 1=5;**
- **Angolo 7=3 perché 6=3 e 7=6 perchè opposti al vertice, quindi 7=3;**
- **Angolo 8=4 perché 4=5e 8=5 perchè opposti al vertice, quindi 8=4;**
- **La somma 5 e 3 è un angolo piatto perché 5+6= piatto e 6=3 (già dimostrato);**
- **La somma 4 e 6 è un angolo piatto perché 5+6= piatto e 5=4 per Hp**
- **La somma 2 e 8 è un angolo piatto perché 2+1= piatto e 1=8 (già dimostrato);**
- **La somma 7 e 1 è un angolo piatto perché 7+8= piatto e 1=8 (già dimostrato);**

Teorema 13: **Se due rette r e s, tagliate da una trasversale t, formano:**
- **Una coppia di angoli alterni esterni uguali, oppure**
- **una coppia di angoli corrispondenti uguali, oppure**
- **una coppia di angoli coniugati interni supplementari, oppure**
- **una coppia di angoli coniugati esterni supplementari,**

allora esse formano una coppia di angoli alterni interni uguali e sono perciò parallele.



Hp) angolo 2=7 Th) s // r

Dimostrazione: 6=7 e 2=3 perché opposti, essendo 2=7 allora 6=3. Formando una coppia di angoli alterni interni uguali le due rette sono, per l'Assioma 13, parallele.

Hp) Angolo 6=2 Th) s // r

Dimostrazione: 2=3 perché opposti, essendo 2=6 allora 3=6. Formando una coppia di angoli alterni interni uguali le due rette sono, per l'Assioma 13, parallele.

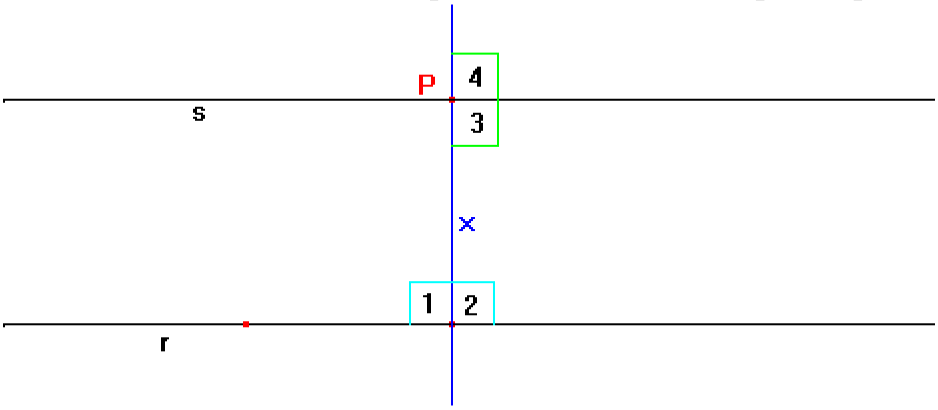
Hp) Angolo 4+6= angolo piatto Th) s // r

Dimostrazione: Angolo 6+5= angolo piatto, essendo anche 4+6= angolo piatto allora 4=5. Formando una coppia di angoli alterni interni uguali le due rette sono, per l'Assioma 13, parallele.

Hp) Angolo 8+2= angolo piatto Th) s // r

Dimostrazione: Angolo 8=5 perché opposti, quindi 5+2=angolo piatto, essendo anche 2+4= angolo piatto allora 5=4. Formando una coppia di angoli alterni interni uguali le due rette sono, per l'Assioma 13, parallele.

Teorema 14: Costruzione della parallela ad una retta r per un punto P esterno ad essa.

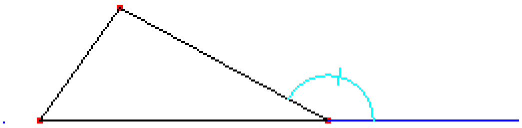


Descrizione della costruzione: Data la retta r e un punto P esterno ad essa traccio la perpendicolare x ad r passante per P. Infine traccio la perpendicolare s a x passante per P.

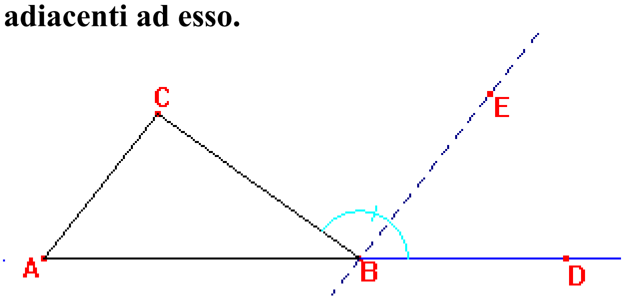
Hp) retta r punto P angolo 1=2=3=4= retto
Th) r // s

Dimostrazione: Le rette s e r hanno una coppia di angoli alterni interni uguali, perché per il Teorema 4 x perpendicolare a r forma due angoli retti, 1 e 2, e s perpendicolare a x forma due angoli retti, 3 e 4, e quindi l'angolo 1=3. Avendo una coppia di angoli alterni interni uguali sono, per il Assioma 13, parallele.

Definizione di Angolo esterno: In un triangolo si dice angolo esterno l'angolo formato da un lato e dal prolungamento di uno degli altri due lati. Si dice uno dei due perché se si prolungano entrambi gli angoli sono uguali perché opposti.



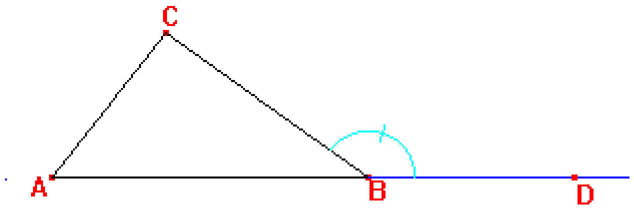
Teorema 15: In un triangolo ogni angolo esterno è la somma dei due angoli interni non adiacenti ad esso.



Hp) Triangolo ABC
Th) Angolo CBD=BAC+BCA

Dimostrazione: Costruisco per B la parallela BE al segmento AC. Per il Teorema 12 gli angoli corrispondenti, rispetto alla traversale AD, CAB e EBD sono uguali. Per l'Assioma 13 gli angoli alterni interni, rispetto alla traversale CB, ACB e EBC sono uguali.
Quindi l'angolo CBD=CBE+EBD è uguale alla somma di CAB e ACB, cioè dei due angoli interni al triangolo non adiacenti ad esso.

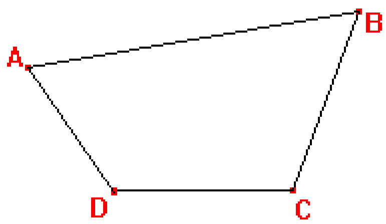
Teorema 16: La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale ad un angolo piatto.



Hp) Triangolo ACB
Th) angolo CAB+ACB+CBA= angolo piatto

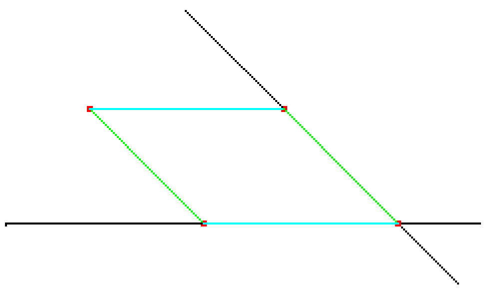
Dimostrazione: La somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto perché per il Teorema 15 ogni angolo esterno è la somma dei due angoli interni non adiacenti ad esso, e la somma di ogni angolo esterno con l'angolo interno adiacente è un angolo piatto. Riassumendo l'angolo CBD=ACB+CAB (Teorema 15) e CBD+CBA= angolo piatto, per questo ACB+CAB+CBA= angolo piatto.

Definizione di Quadrilatero: Dati 4 punti ABCD è definito il quadrilatero ABCD. Si dicono lati del quadrilatero i segmenti che hanno come estremi AB,BC,CD,AD. Se i lati sono incidenti il quadrilatero è detto intrecciato.

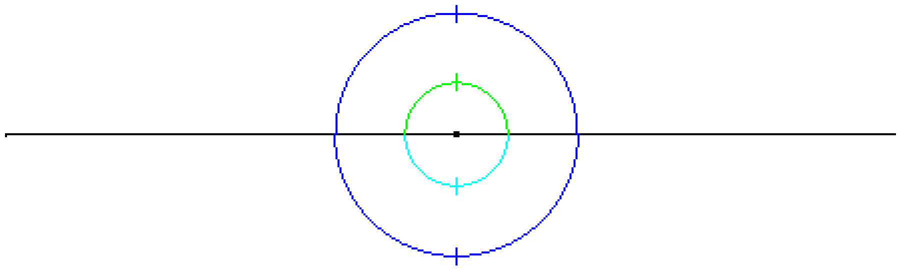


Un quadrilatero si dice convesso se presi due punti all'interno di esso il segmento che li unisce non incontra i lati del quadrilatero.

Definizione di Parallelogramma: Un parallelogramma è un quadrilatero con i lati opposti paralleli.

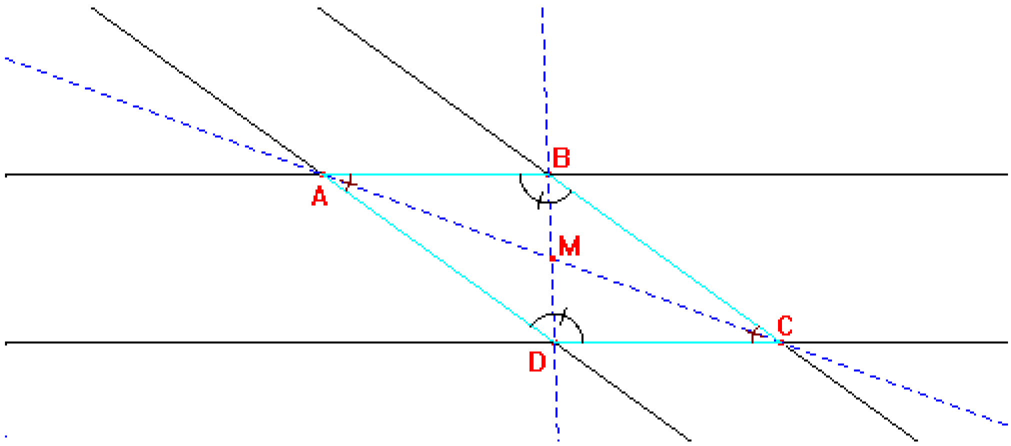


Definizione di angolo giro: Un angolo giro è la somma di due angoli piatti.



Definizione di diagonale di un quadrilatero: **La diagonale di un quadrilatero è il segmento che unisce due vertici non adiacenti.**

Teorema 17: Proprietà del parallelogramma.



Descrizione della costruzione: Traccio la retta DC e la sua parallela AB. Ora traccio una trasversale passante per A e D, infine traccio la retta BC parallela ad AD.

Hp) DC // AB, AD // BC, (M)= intersezione di AC con DB

Th) Angolo ADC=ABC, BAD=BCD, DC=AB, AD=BC

Dimostrazione: Volendo dimostrare che gli angoli ADC e ABC sono uguali considero due triangoli che li contengono ADC e ABC.
Essi hanno:

- **AC in comune;**
- **Angolo ACD=BAC per l'Assioma 13 perché AB // DC tagliate dalla traversale AC formano una coppia di angoli alterni interni uguali;**
- **Angolo CAD=BCA per l'Assioma 13 perché AD // BC tagliate dalla traversale AC formano una coppia di angoli alterni interni uguali;**

Quindi sono uguali per il II criterio di uguaglianza triangolare o ASSIOMA 5 e hanno perciò tutti gli elementi corrispondenti uguali, in particolare:

- **Angolo ADC=ABC;**
- **Angolo BAD=BCD per somma di angoli uguali (Assioma 11), angolo DAC+BAC=BCA+ACD;**
- **I lati DC=AB e AD=BC.**

Th) La somma degli angoli adiacenti è un angolo piatto.

Dimostrazione: Prendo come rette parallele BC e AD e come trasversale DC, ora per il Teorema 12 la somma degli angoli coniugati interni è un angolo piatto. Per le altre coppie di angoli adiacenti la dimostrazione è analoga.

Th) La somma degli angoli interni del parallelogramma è un angolo giro.

Dimostrazione: Per la precedente dimostrazione la somma degli angoli adiacenti è un angolo piatto, visto che il parallelogramma ha due diverse coppie di angoli adiacenti la loro somma è il doppio di un angolo piatto e quindi per definizione è un angolo giro.

Th) AM=MC, BM=DM

Dimostrazione: Volendo dimostrare che AM=MC e BM=DM considero due triangoli che li contengono, interni al parallelogramma, AMD e BMC.
Essi hanno:

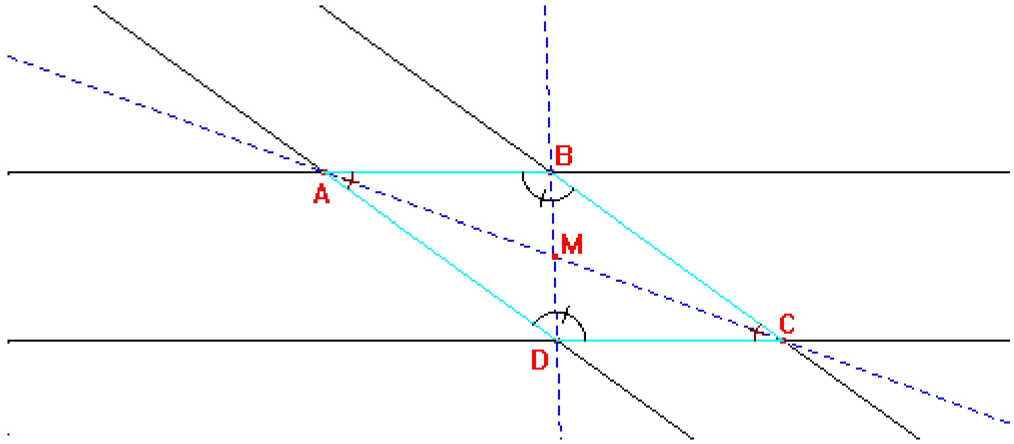
- **AD=BC (già dimostrato);**
- **Angolo MAD=BCM per l'Assioma 13 perché AD // BC tagliate dalla traversale AC formano una coppia di angoli alterni interni uguali;**
- **Angolo MDA=MBC per l'Assioma 13 perché AB // DC tagliate dalla traversale BD formano una coppia di angoli alterni interni uguali;**

Quindi sono uguali per il II criterio di uguaglianza triangolare o ASSIOMA 5 e hanno perciò tutti gli elementi corrispondenti uguali, in particolare DM=BM e AM=MC. Per questo M è il punto medio delle due diagonali AC e BD.

PROPRIETA' DEL PARALLELOGRAMMA:

- **Gli angoli interni opposti sono uguali;**
- **I lati opposti sono uguali;**
- **La somma degli angoli adiacenti è un angolo piatto;**
- **La somma degli angoli interni è un angolo giro;**
- **Il punto di intersezione delle due diagonali è il punto medio delle stesse.**

Teorema 18: I° criterio del parallelogramma:
Se un quadrilatero ha i lati opposti uguali è un parallelogramma.



Hp) AB=DC   AD=BC
Th) DC // AB   AD // BC

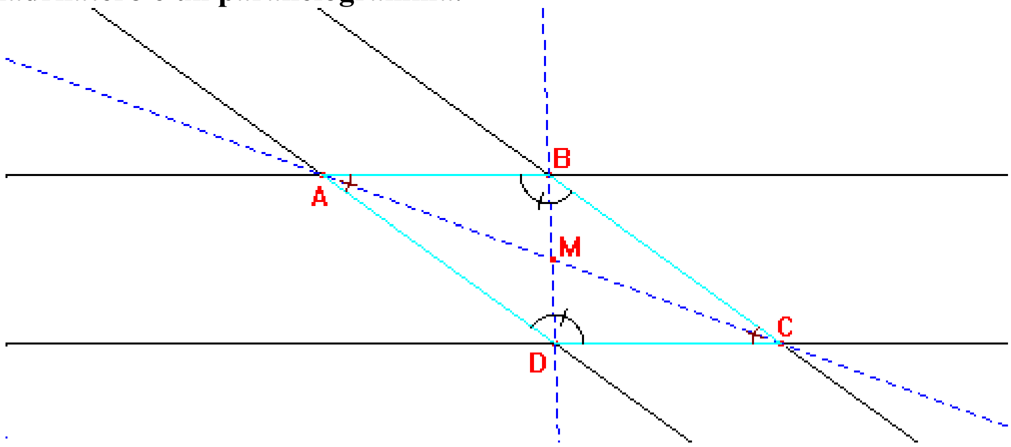
Dimostrazione: Volendo dimostrare che AD // BC considero due triangoli che li contengono ABC e ADC.
Essi hanno:
- **AD=BC per hp;**
- **AB=DC per hp;**
- **AC in comune (sovrapposto);**

Quindi sono uguali per il terzo criterio di uguaglianza triangolare o Assioma 3 e hanno perciò tutti gli elementi corrispondenti uguali, in particolare gli angoli DAC e BCA perché opposti ai lati uguali AB e DC.
Formando una coppia di angoli alterni interni uguali le due rette AD e BC, tagliate dalla trasversale AC, sono parallele per l'Assioma 13.

Dalla precedente dimostrazione ottengo anche l'uguaglianza degli angoli BAC e ACD, che sono una coppia di angoli alterni interni formati dalle rette AB e DC tagliate dalla trasversale AC, quindi per l'Assioma 13 AB // DC.

Avendo i lati opposti paralleli è per definizione un parallelogramma.

Teorema 19: II° criterio del parallelogramma:
Se le due diagonali di un quadrilatero si incontrano nel loro punto medio allora il quadrilatero è un parallelogramma.



Hp) DM=MB AM=MC
Th) ABCD parallelogramma

Dimostrazione: Volendo dimostrare che AD=BC considero due triangoli che li contengono AMD e BMC.
Essi hanno:

- **AM=MC per hp;**
- **BM=DM per hp;**
- **Angolo AMD=BMC per il Teorema degli angoli opposti al vertice;**

Quindi sono uguali per il primo criterio di uguaglianza triangolare e hanno perciò tutti gli elementi corrispondenti uguali, in particolare i lati AD e BC perché opposti agli angoli uguali AMD e BMC.

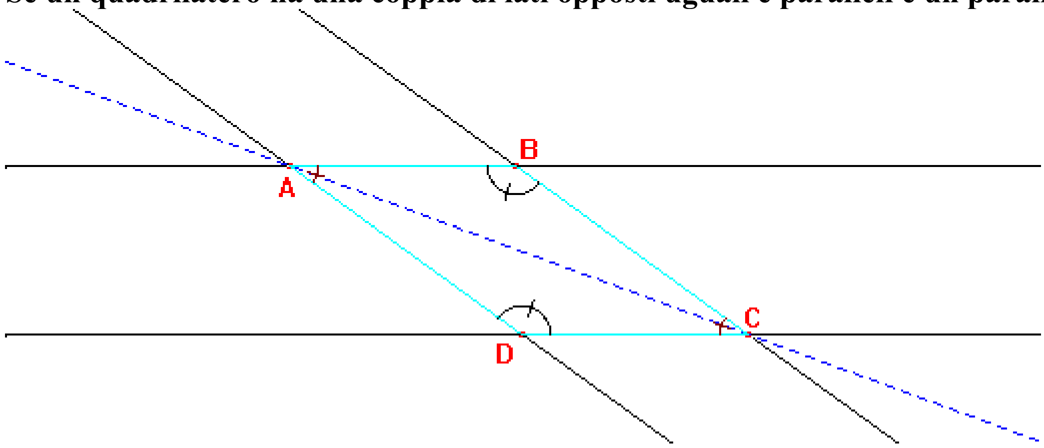
Volendo dimostrare che AB=DC considero due triangoli che li contengono AMB e DMC.
Essi hanno:

- **AM=MC per hp;**
- **BM=DM per hp;**
- **Angolo AMB=DMC per il Teorema degli angoli opposti al vertice;**

Quindi sono uguali per il primo criterio di uguaglianza triangolare e hanno perciò tutti gli elementi corrispondenti uguali, in particolare i lati AB e DC perché opposti agli angoli uguali AMB e DMC.

Il quadrilatero ABCD avendo i lati opposti uguali è, per il Teorema 18 o primo criterio del parallelogramma, un parallelogramma.

Teorema 20: III° criterio del parallelogramma:
Se un quadrilatero ha una coppia di lati opposti uguali e paralleli è un parallelogramma.



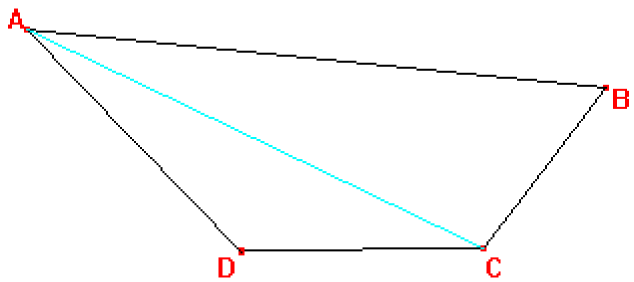
Hp) AD // BC AD=BC
Th) ABCD parallelogramma

Traccio per costruzione la trasversale AC.
Dimostrazione: Volendo dimostrare che ABCD è parallelogramma considero due triangoli interni ad esso ADC e ABC.
Essi hanno:

- **AD=BC per hp;**
- **Angolo DAC=BCA per l'Assioma 13 perché angoli alterni interni delle rette AD // BC tagliate dalla trasversale AC;**
- **AC in comune (sovrapposto);**

Quindi sono uguali per il primo criterio di uguaglianza e hanno perciò tutti gli elementi corrispondenti uguali, in particolare i lati DC e AB perché opposti agli angoli uguali DAC e BCA.
Avendo i lati opposti uguali il quadrilatero ABCD è, per il I° criterio del parallelogramma o Teorema 18, un parallelogramma.

Teorema 21: La somma degli angoli interni di un quadrilatero convesso è un angolo giro.



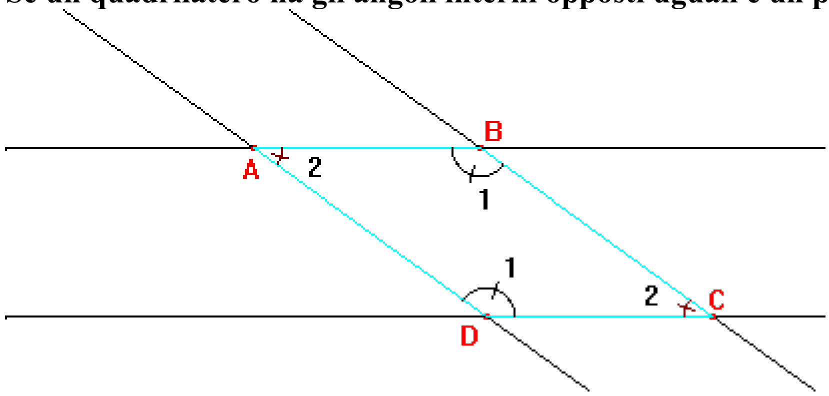
Hp) ABCD quadrilatero convesso
Th) Somma degli angoli interni=angolo giro

Traccio per costruzione la diagonale AC che divide il quadrilatero in due triangoli.
Dimostrazione: Per il Teorema 16 la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto. Essendo inscritti dentro il quadrilatero due triangoli per l'Assioma 11 somma di angoli

la somma degli angoli interni di un quadrilatero è un angolo giro, cioè per definizione il doppio di un angolo piatto.

Teorema 22: IV° criterio del parallelogramma:

Se un quadrilatero ha gli angoli interni opposti uguali è un parallelogramma.



Hp) Angolo ABC=ADC DAB=DCB

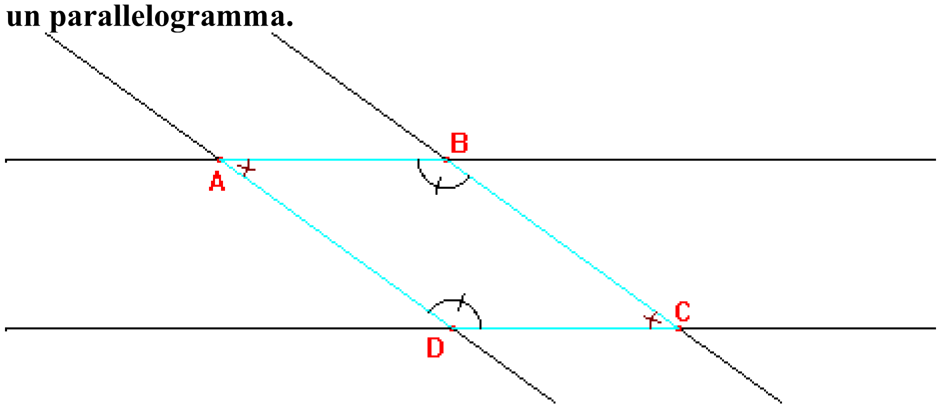
Th) ABCD parallelogramma

Dimostrazione:

Per il Teorema 21 la somma degli angoli interni di un quadrilatero è un angolo giro e quindi angolo 2+2+1+1= giro, 2*(angolo 2+1)= giro e quindi angolo 2+1=piatto. Essendo la somma degli angoli coniugati interni BAD+ADC un angolo piatto le rette DC e AB tagliate dalla trasversale AD sono per il Teorema 13 parallele. Per la stessa dimostrazione considerando gli angoli DAB e ABC si ha il parallelismo delle rette AD e BC tagliate dalla trasversale AB. Avendo i lati paralleli a due a due è per definizione un parallelogramma.

Teorema 23: V° criterio del parallelogramma.

Se un quadrilatero ha le due coppie di angoli adiacenti supplementari a due lati consecutivi è un parallelogramma.



Hp) Angolo ABC+BCD= piatto Angolo BCD+CDA= piatto

Th) ABCD parallelogramma

Dimostrazione: Considero le rette AB e DC tagliate dalla trasversale BC.

Esse hanno una coppia di angoli coniugati interni supplementari per la prima hp e quindi per il Teorema 13 AC // BD.

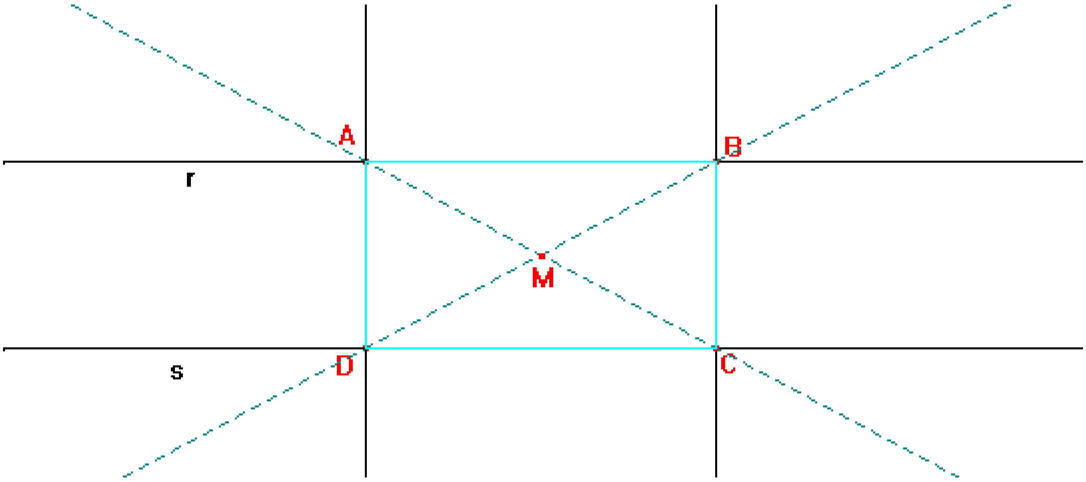
Considero ora le rette AD e BC tagliate dalla trasversale DC.

Esse hanno una coppia di angoli coniugati interni supplementari per la seconda hp e quindi per il Teorema 13 AD // BC.

Quindi il quadrilatero avendo i lati opposti paralleli è per definizione un parallelogramma.

Definizione di rettangolo: **Un parallelogramma con un angolo retto è un rettangolo.**

Teorema 24: **Un rettangolo ha tutti gli angoli uguali e quindi retti e ha le diagonali uguali.**



Descrizione della costruzione: Date le rette // r e s prendo il punto A su r, traccio la perpendicolare ad r in A che incontra s in D. Ora prendo il punto B su r e traccio la perpendicolare ad r in B che incontra s in C. Infine traccio le diagonali AC e BD.

Hp) DAB retto ABCD parallelogramma
Th) AC=BD e quindi AM=MC=BM=DM Angolo ADC=DCB=CBA=BAD= retto

Essendo un parallelogramma ha per il Teorema 17 le seguenti proprietà:
- **Gli angoli interni opposti sono uguali;**
- **I lati opposti sono uguali;**
- **La somma degli angoli adiacenti è un angolo piatto;**
- **La somma degli angoli interni è un angolo giro;**
- **Il punto di intersezione delle due diagonali è il punto medio delle stesse.**

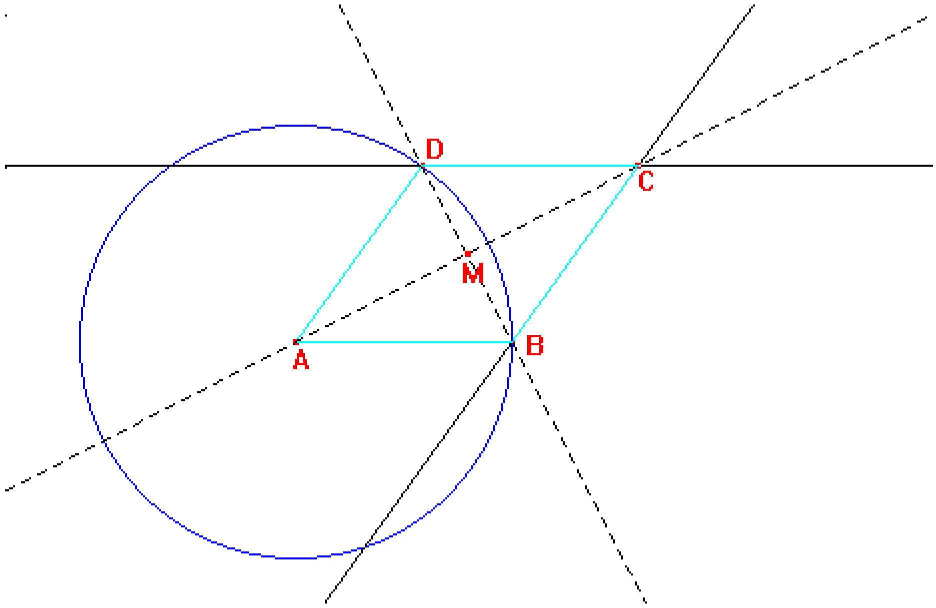
Dimostrazione: Volendo dimostrare che AC=BD considero due triangoli che li contengono DAB e ABC.
Essi hanno:
- **AD=BC per la proprietà del parallelogramma che dice che i lati opposti sono uguali;**
- **AB in comune (sovrapposto);**
- **DAB=ABC perché se DAB retto per hp e per il Teorema 17 la somma degli angoli adiacenti è un angolo piatto allora per l'Assioma della differenza di angoli se DAB+ABC= piatto allora piatto-DAB (retto)=ABC e quindi DAB=ABC= retto.**

Quindi sono uguali per il primo criterio di uguaglianza triangolare e hanno perciò tutti gli elementi corrispondenti uguali, in particolare i lati AC e BD perché opposti agli angoli uguali ADC e ABC. Se le due diagonali sono uguali e il punto di intersezione è il loro punto medio per il Teorema 17 allora AM=MC=BM=DM.

Angolo ADC=DCB=CBA=BAD= retto perché per il Teorema 17 la somma degli angoli adiacenti è un angolo piatto e quindi per l'Assioma della differenza di angoli se per hp BAD retto piatto-retto= retto e quindi piatto-DAB= ABC. Questa dimostrazione vale per tutti gli angoli interni al rettangolo.

Definizione di rombo: **Un parallelogramma che ha due lati consecutivi uguali è detto rombo.**

Teorema 25: **Proprietà del rombo.**



Descrizione della costruzione: Dati i punti A e B traccio la circonferenza di raggio AB e prendendo il punto D sulla circonferenza traccio il segmento AD che è uguale ad AB. Ora traccio in D la parallela a AB e in B la parallela a AD. Il punto di intersezione delle due parallele è il punto C che chiude il rombo.

Hp) AB=AD   ABCD parallelogramma
Essendo un parallelogramma ha per il Teorema 17 le seguenti proprietà:

- **Gli angoli interni opposti sono uguali;**
- **I lati opposti sono uguali;**
- **La somma degli angoli adiacenti è un angolo piatto;**
- **La somma degli angoli interni è un angolo giro;**
- **Il punto di intersezione delle due diagonali è il punto medio delle stesse.**

Th) AB=BC=CD=DA

Dimostrazione: Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza se AB=AD e essendo per il Teorema 17 AB=DC e AD=BC allora AD=AB=DC e AB=AD=BC e quindi AB=BC=CD=DA.

Th) AC perpendicolare a BD

Dimostrazione: Volendo dimostrare che AC è perpendicolare a BD considero due triangoli AMD e DMC.
Essi hanno:

- **AM=MC per proprietà del parallelogramma (Il punto di intersezione delle due diagonali è il punto medio delle stesse);**
- **DM in comune;**
- **AD=DC per la precedente dimostrazione.**

Quindi sono uguali per il I° criterio di uguaglianza triangolare e hanno perciò tutti gli elementi corrispondenti uguali, in particolare:

- **Gli angoli DMA e DMC opposti ai lati uguali AD e DC;**
- **Gli angoli ADM e MDC opposti ai lati uguali AM e MC;**
- **Gli angoli DAM e DCM opposti al lato in comune DM.**

Essendo la somma di DMA e DMC un angolo piatto ed essendo per la precedente uguali sono, per l'Assioma 9: Della differenza di angoli uguali, angoli retti.
Formando almeno un angolo retto le diagonali AC e DB sono perpendicolari.

Th) DB biseca ADC e ABC ADM=MDC MBA=MBC
AC biseca DAB e DCB DCM=MCB DAM=MAB

Dimostrazione: Se la diagonale DB forma, per la precedente dimostrazione, due angoli uguali, ADM e MDC, allora è per definizione bisettrice di ADC. La diagonale è anche bisettrice dell'angolo ABC perché lo divide in due angoli uguali:

- **L'angolo MBA che è uguale a MDC perché per l'Assioma 13 le rette parallele DC e AB tagliate dalla trasversale DB formano una coppia di angoli alterni interni uguali;**
- **L'angolo MBC che è uguale a MDA perché per l'Assioma 13 le rette parallele AD e BC tagliate dalla trasversale DB formano una coppia di angoli alterni interni uguali;**

Quindi per la proprietà transitiva dell'uguaglianza se l'angolo MBA=MDC, MDA=MBC e MDC=MDA allora MBA=MDC=MDA e MDA=MBC=MDC e quindi MDC=MDA=MBA=MBC. Dividendo l'angolo ABC in due angoli uguali MBA e MBC la diagonale DB è per definizione bisettrice dell'angolo ABC.

Da questa dimostrazione ricavo anche che la diagonale DB divide gli angoli ADC e CBA in quattro parti uguali per la proprietà del parallelogramma (angoli opposti uguali) e per l'Assioma 4 di unicità della bisettrice. Infatti essendo i due angoli uguali ed essendo una la bisettrice i quattro angoli devono essere uguali.

Per la precedente dimostrazione ho che gli angoli DAM e DCM sono uguali.

- **Essendo DC // AB tagliate dalla trasversale AC ho per l'Assioma 13 che DCM=MAB perché angoli alterni interni. Quindi per la proprietà transitiva dell'uguaglianza ho che se DCM=DAM e DCM=MAB allora DAM=MAB=DCM e quindi se DAM=MAB la diagonale AC è per definizione la bisettrice dell'angolo DCB.**
- **Essendo AD // CB tagliate dalla trasversale AC ho per l'Assioma 13 che DAM=MCB. Quindi per la proprietà transitiva dell'uguaglianza ho che se DCM=DAM e DAM=MCB allora DAM=MCB=DCM e quindi se DCM=MCB la diagonale AC è per definizione la bisettrice dell'angolo DAB.**

Da questa dimostrazione ricavo anche che la diagonale AC divide gli angoli DCB e DAB in quattro parti uguali per la proprietà del parallelogramma (angoli opposti uguali) e per l'Assioma 4 di unicità della bisettrice. Infatti essendo i due angoli uguali ed essendo una la bisettrice i quattro angoli devono essere uguali.

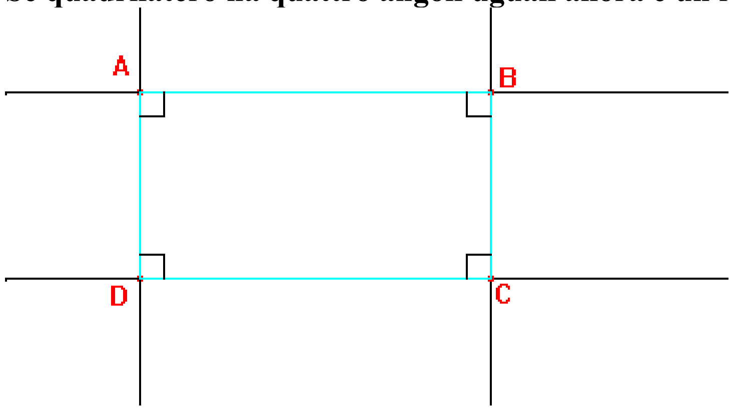
PROPRIETA' DEL ROMBO:

- **Ha tutti i lati uguali;**
- **Le diagonali sono perpendicolari;**

- **Le diagonali sono le bisettrici degli angoli.**

Teorema 26: I° criterio del rettangolo:

Se quadrilatero ha quattro angoli uguali allora è un rettangolo.

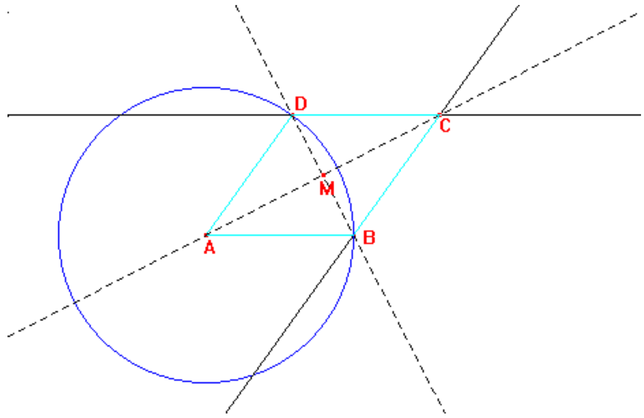


Hp) ABCD quadrilatero Angolo A=B=C=D
Th) ABCD rettangolo

Dimostrazione: Poiché questo quadrilatero ha tutti gli angoli uguali h anche gli angoli opposti uguali, quindi per il IV° criterio del parallelogramma (angoli opposti uguali) il quadrilatero ABCD è un parallelogramma.
Inoltre essendo la somma degli angoli interni di un quadrilatero un angolo giro ed essendo per hp tutti gli angoli interni uguali ogni angolo sarà retto.
Quindi per definizione di rettangolo: parallelogramma con un angolo retto il quadrilatero ABCD è un rettangolo.

Teorema 27: I° criterio del rombo:

Se un quadrilatero ha quattro lati uguali allora è un rombo.



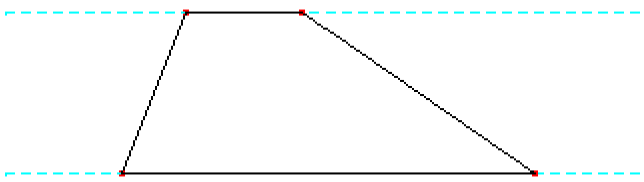
Hp) ABCD quadrilatero AB=BC=CD=AD
Th) ABCD rombo

Dimostrazione: Poiché il quadrilatero ABCD ha tutti i lati uguali per hp, ha anche i lati opposti uguali e quindi per il Teorema 18 o I° criterio del parallelogramma il quadrilatero ABCD è un parallelogramma. Inoltre avendo tutti i lati uguali ha anche i lati consecutivi uguali e quindi, per definizione di rombo: parallelogramma con due lati consecutivi uguali, il parallelogramma ABCD è un rombo.

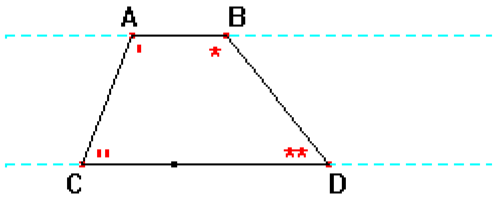
Assioma 14: Dei multipli e sottomultipli di segmenti:
Multipli e sottomultipli di segmenti uguali sono uguali.

Assioma 15: Dei multipli e sottomultipli di angoli:
Multipli e sottomultipli di angoli uguali sono uguali.

Definizione di Trapezio: Si dice trapezio un quadrilatero con una coppia di lati opposti paralleli. I lati non paralleli si dicono obliqui, quelli paralleli basi.

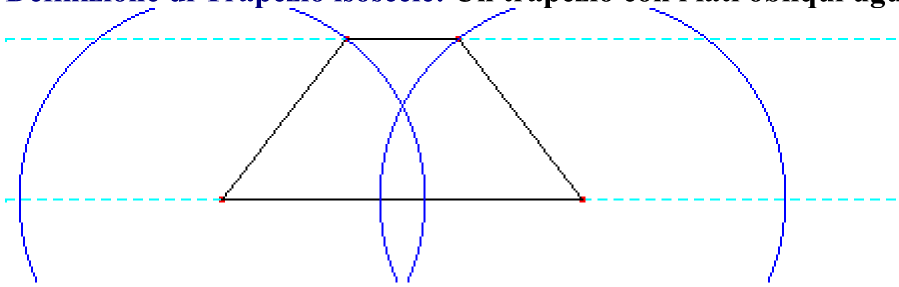


Teorema 28: Proprietà del Trapezio: Gli angoli adiacenti ai lati obliqui sono supplementari.



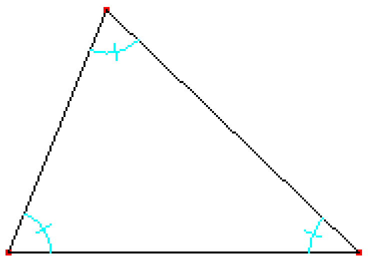
Hp) AB // CD, ABCD= Trapezio
Th) Angoli ‘ e “ supplementari, * e ** supplementari
Dimostrazione: Gli angoli ‘ e “ essendo angoli coniugati interni delle rette parallele AB e CD tagliate dalla trasversale AC per il Teorema 12, che dice che se due rette tagliate da una trasversale sono parallele allora hanno….., essi sono supplementari.
Gli angoli * e ** essendo angoli coniugati interni delle rette parallele AB e CD tagliate dalla trasversale BD per il Teorema 12, che dice che se due rette tagliate da una trasversale sono parallele allora hanno….., essi sono supplementari.

Definizione di Trapezio isoscele: Un trapezio con i lati obliqui uguali è detto isoscele.

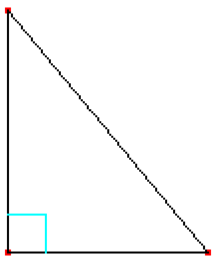


Classificazione dei triangoli rispetto agli angoli:

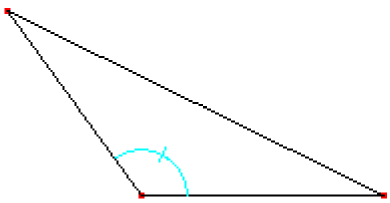
Un triangolo con i tre angoli acuti, cioè minori di un angolo retto, è detto Acutangolo.



Un triangolo con un angolo retto è detto Rettangolo.

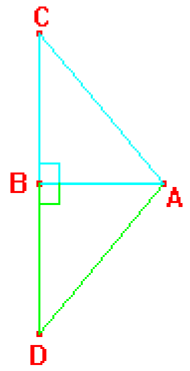


Un triangolo con un angolo ottuso, cioè maggiore di un angolo retto, è detto Ottusangolo.



Osserviamo che in un triangolo non possono esserci più di un angolo retto o più di un angolo ottuso perché la somma dei suoi angoli interni è un angolo piatto.

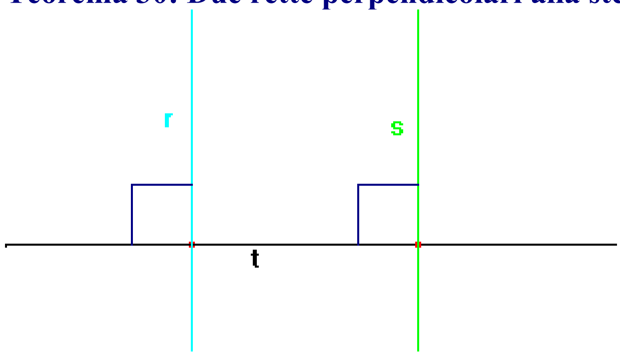
Teorema 29 o I criterio dei triangoli rettangoli.
Due triangoli rettangoli con l'ipotenusa ed un cateto uguali sono uguali.



Hp) AB in comune, AC=AD, Angolo CBA=ABD=retto,
Th) Triangolo CBA=ABD

Sovrappongo i due cateti uguali dei due triangoli formando un unico triangolo ACD.
Dimostrazione: Il triangolo CAD avendo due lati uguali per Hp, CA=AD, è per definizione un triangolo isoscele, il quale ha per il teorema 8 gli angoli alla base uguali, quindi ACB=ADB. Essendo la somma degli angoli interni di un triangolo un angolo piatto e visto che i triangoli ABC e ABD hanno due angoli uguali allora per l'Assioma della differenza di angoli uguali hanno anche il terzo angolo uguale, quindi BAD=BAC.
Ora i due triangoli rettangoli ABC e ABD sono uguali per il secondo criterio di uguaglianza avendo uguali due angoli, BAD=BAC, ACB=ADB e il lato compreso AD=CA.

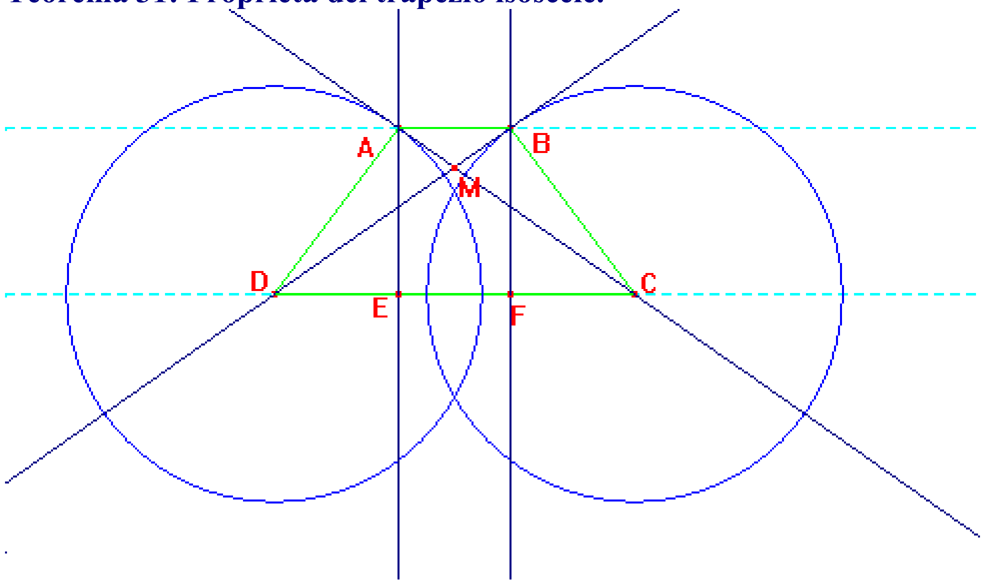
Teorema 30: Due rette perpendicolari alla stessa retta sono parallele.



Hp) R e s perpendicolari a t
Th) R // s

Dimostrazione: Essendo r e s perpendicolari a t formano due angoli retti. Considerando le rette r e s tagliate da trasversale t formando una coppia di angoli corrispondenti uguali e quindi le due rette r e s sono parallele per il Teorema 13.

Teorema 31: Proprietà del trapezio isoscele.



Hp) AD=BC, AB // DC, M è il punto di intersezione di AC e BD,
AE perpendicolare a DC, BF perpendicolare a DC
Th)Angolo ADE=BCF, DAB=ABC, DE=FC, AM=MB, DM=MC

Dimostrazione: Essendo AB // EF perché EF sovrapposto a DC e DC // AB per Hp, allora EF e AB tagliate da trasversale AE e da BF formano per l'Assioma 13 una coppia di angoli alterni interni uguali e quindi il quadrilatero ABEF ha tutti gli angoli uguali perché retti e quindi per il criterio del rettangolo o Teorema 26 ABEF è rettangolo. Quindi AE=BF.
Ora ADE e BCF sono due triangoli uguali perché per il criterio del triangolo rettangolo: Due triangoli rettangoli con l'ipotenusa ed un cateto uguali sono uguali, e quindi gli angoli ADE e BCF sono uguali, essendo uguali i lati DE e FC.
L'angolo DAB=ABC per somma di angoli uguali (DAE+EAB=CBF+FBA).

Prendo i triangoli DAC e BCD. Essi sono uguali perché hanno:
- **DC in comune;**
- **ADE=BCF per precedente dimostrazione;**
- **AD=BC per Hp;**

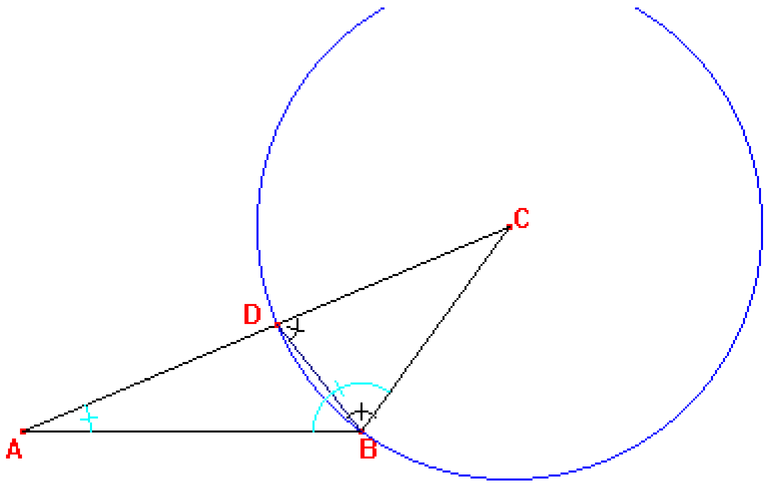
Quindi sono uguali per il primo criterio.
Considero BFD e EAC. Essi hanno:
- **BD=AC per la precedente dimostrazione;**
- **AE=BF perché ABEF rettangolo (già dimostrato);**
- **Angolo AEF=BFE già dimostrato.**

Quindi uguali per il criterio de triangolo rettangolo. E hanno perciò tutti gli elementi corrispondenti uguali, in particolare gli angoli EAC e DBF. Quindi per l'assioma della differenza di angoli EAB-EAC=FBA-FBD, quindi il triangolo AMB avendo due angoli uguali è per definizione isoscele e allora AM=BM e DM=CM per diff. Egmenti uguali (AC-MC=BD-BM).

Proprietà del trapezio isoscele:

- Le diagonali sono uguali e incontrandosi si dividono in due coppie di lati uguali a due a due;
- Gli angoli adiacenti alle basi sono uguali;
- Le due proiezioni dei lati obliqui sulla base maggiore sono uguali.

Teorema 32: Se un triangolo ha due lati disuguali allora a lato maggiore sta opposto angolo maggiore.

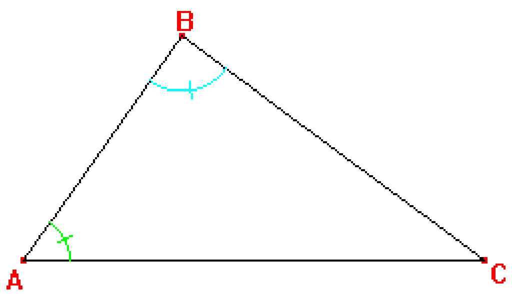


Descrizione della costruzione: Dato il triangolo ABC traccio un circonferenza con centro C e raggio BC cosi che DC=BC. Ora chiudo il triangolo isoscele DCB con il segmento DB.

Hp) BC < AC
Th) Angolo ABC > CAB

Dimostrazione: Se ABC > di DBC (DBC+DBA=ABC) e BDC=DBC per il Teorema che dice che in un triangolo isoscele gli angoli adiacenti al lato disuguale sono uguali allora per il Teorema dell'angolo esterno DBC+ABD (=ABC) >DBC=CAB.

Teorema 33: Se un triangolo ha due angoli disuguali allora ad angolo maggiore sta opposto lato maggiore.

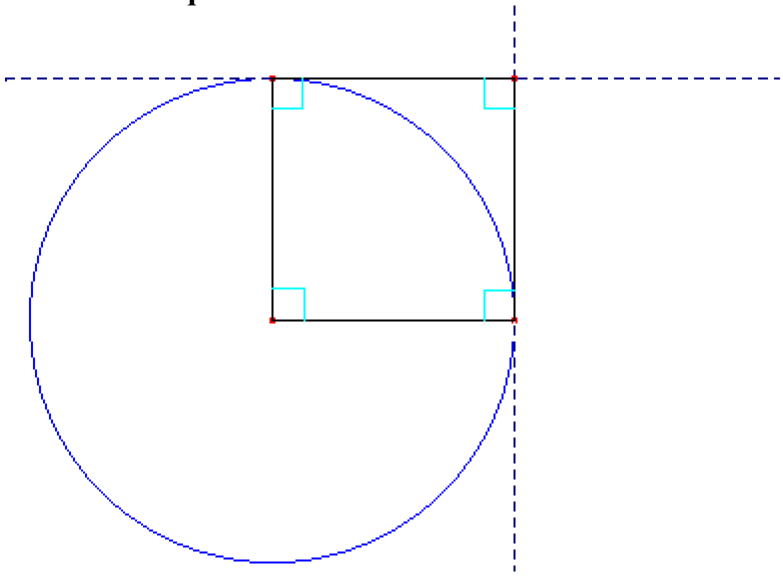


Hp) Angolo ABC > BAC
Th) AC > BC

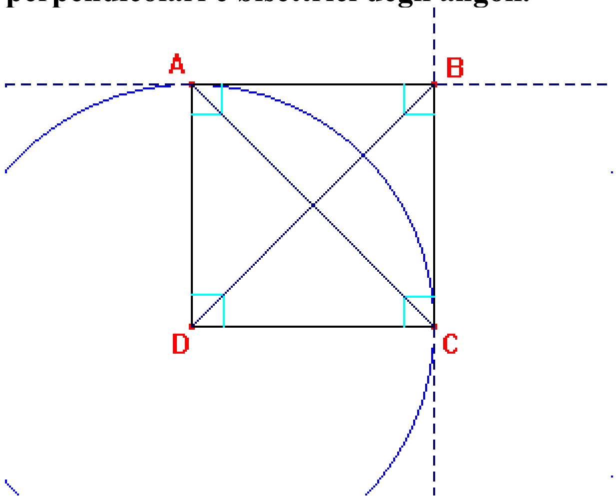
Dimostrazione per Assurdo:
Nego la Th – se AC=BC allora ABC è un triangolo isoscele e quindi BAC=ABC con questa affermazione nego l'ipotesi, è assurdo negare l'ipotesi e quindi la TH è vera.

Nego la Th – se AC < BC allora per il Teorema 32 (Se un triangolo ha due lati disuguali allora a lato maggiore sta opposto angolo maggiore.) BAC > ABC, nego l'ipotesi e siccome è assurdo negare l'ipotesi la Th è vera.

Definizione di quadrato: Un parallelogramma con due lati consecutivi uguali ed un angolo retto è detto quadrato.



Teorema 34: Proprietà del quadrato.
Un quadrato ha i quattro lati uguali e i quattro angoli uguali e retti. Ha le diagonali uguali, perpendicolari e bisettrici degli angoli.



Hp) ABCD quadrato
Th) AB=BC=CD=DA   DAB=ABC=BCD=CDA= retto   AC=BD   AC perpendicolare a BD AC e BD bisettrici degli angoli retti

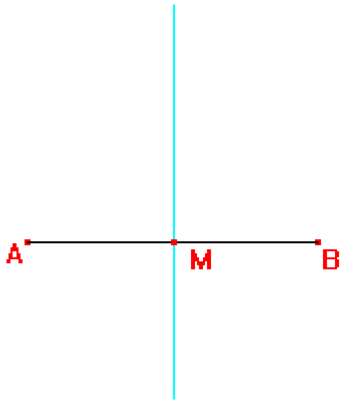
Dimostrazione: Essendo per definizione un parallelogramma con due lati consecutivi uguali ed un angolo retto, il quadrato ha le proprietà sia del rombo che del rettangolo.
Quindi, per il teorema 25: proprietà del rombo, ha:
- **I quattro lati uguali;**

- Le diagonali perpendicolari, che sono le bisettrici degli angoli;

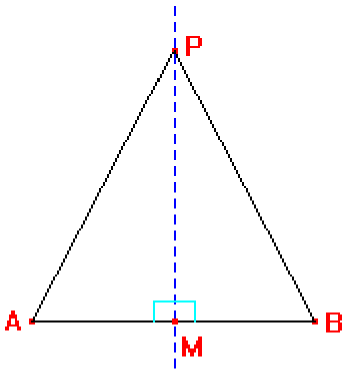
Inoltre ha le proprietà del rettangolo ovvero (Teorema 24):

- **Tutti gli angoli uguali e retti;**
- **Le diagonali uguali.**

Definizione di asse di un segmento: **Dicesi asse del segmento AB la retta perpendicolare ad AB che passa per il punto medio di AB.**



Teorema 35: **L'asse di un segmento è il luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi del segmento, cioè è l'insieme di tutti e solo i punti che sono equidistanti dagli estremi del segmento.**



Hp) AM=MB   PM perpendicolare a AB
Th) AP=PB

Dimostrazione: Volendo dimostrare che i lati AP e PB sono uguali considero i triangoli APM e BPM. Essi hanno:

- **PM in comune;**
- **AM=MB per Hp;**
- **L'angolo PMA=PMB perché retti.**

Quindi sono uguali per il primo criterio di uguaglianza triangolare e hanno tutti gli elementi corrispondenti uguali, in particolare i lati AP e PB opposti agli angoli uguali PMA e PMB.

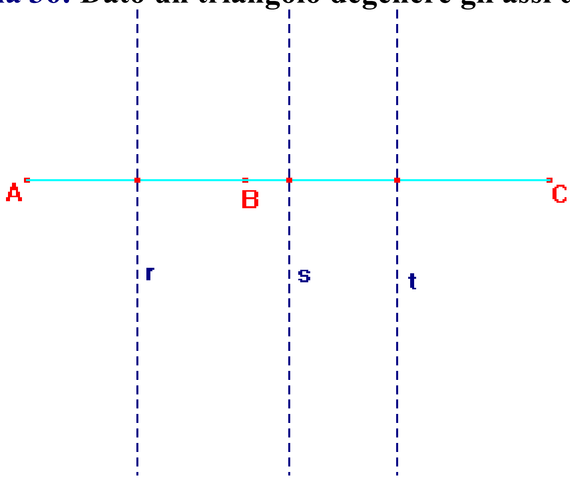
Hp) PA=PB   AM=MB
Th) PM perpendicolare a AB

Dimostrazione: Volendo dimostrare che gli angoli PMA e PMB sono uguali considero i triangoli APM e BPM. Essi hanno:

- PM in comune;
- AM=MB per Hp;
- PA=PB per Hp.

Quindi sono uguali per il terzo criterio di uguaglianza triangolare e hanno tutti gli elementi corrispondenti uguali, in particolare gli angoli PMA e PMB opposti ai lati uguali AP e PB.

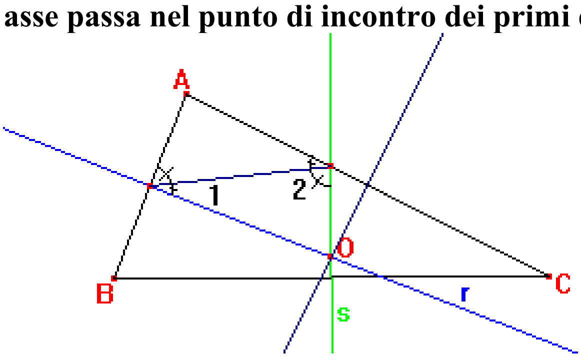
Teorema 36: Dato un triangolo degenere gli assi dei suoi lati non si incontrano.



Hp) ABC triangolo degenere
Th) r // s // t

Dimostrazione: Essendo ABC degenere i suoi lati sono sovrapposti su un'unica retta, perciò per il Teorema 30 (due rette perpendicolari alla stessa retta sono parallele) i tre assi essendo perpendicolari ai segmenti sovrapposti su una sola retta sono paralleli (se r // s e s // t allora r // s // t) e quindi per definizione di rette parallele non si incontrano.

Teorema 37: Dato un triangolo non degenere gli assi di due suoi lati si incontrano e il terzo asse passa nel punto di incontro dei primi due. Tale punto è detto circoncentro.



Hp) ABC triangolo non degenere r asse di AB s asse di AC
Th) r e s non sono parallele.

Dimostrazione: Per assurdo nego la th, quindi r ed s //. Traccio ora la trasversale alle due rette r ed s che per il Teorema 12 hanno gli angoli coniugati interni 1 e 2 supplementari. In realtà sia l'angolo 1 che 2 sono minori di un angolo retto e quindi non supplementari perché gli angoli retti formati dagli assi 1 e 2 sono divisi dalla trasversale. Negando il Teorema 12 arrivo ad n assurdo quindi la th è vera.

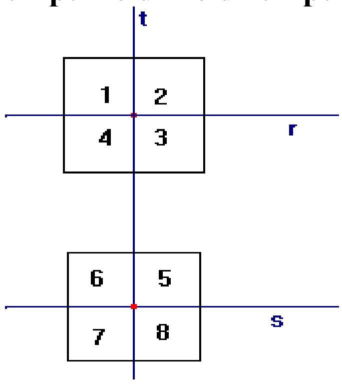
Hp) O punto di intersezione tra asse AC ed asse AB.
Th)Asse BC passa per O

Dimostrazione: Per il Teorema 35: L'asse di un segmento è il luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi del segmento, cioè è l'insieme di tutti e solo i punti che sono equidistanti dagli estremi del segmento.

O è equidistante da C e da A => CO=AO ed anche da C e da B => OB=OC => per la proprietà transitiva CO=CA=OB => O equidistante da A e da B => per il Teorema 35 al contrario O è sull'asse di AB.

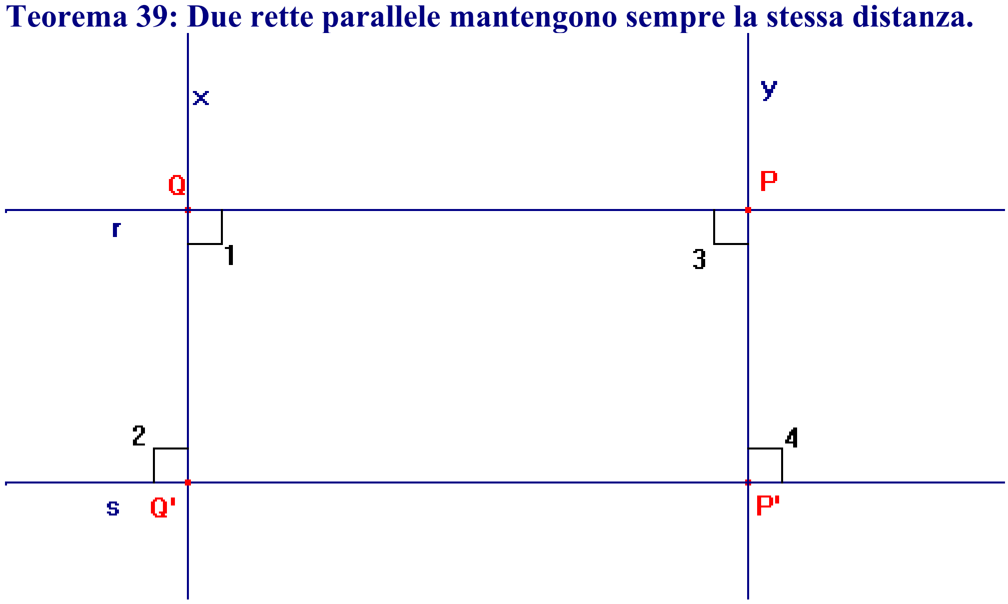
Teorema 38: in un triangolo acutangolo il punto di incontro di due assi è interno al triangolo, in un triangolo rettangolo è il punto medio del terzo lato e in un triangolo ottusangolo è esterno ad esso.

Definizione di distanza fra due rette parallele: **Dicesi distanza fra due rette // r e s il più piccolo segmento che unisce un punto di r ad uno di s. Tale segmento si ottiene costruendo da un punto di r o da un punto di s la perpendicolare all'altra retta.**



Dimostrazione: Si può costruire la perpendicolare sia da un punto di r che da un punto di s per il seguente motivo: Date due rette // r e s traccio la perpendicolare t a r che è anche perpendicolare a s perché per l'Assioma 13 gli angoli alterni interni 4 e 5 sono uguali e quindi retti. Quindi t formando un angolo retto 5 è anche perpendicolare a s. Viceversa per la stessa dimostrazione se traccio la perpendicolare t ad s è anche perpendicolare a r.
Per il Teorema del triangolo rettangolo, secondo il quale l'ipotenusa è maggiore dei cateti, il più piccolo segmento che unisce le due rette // r e s deve essere uno dei due cateti.

Teorema 39: Due rette parallele mantengono sempre la stessa distanza.



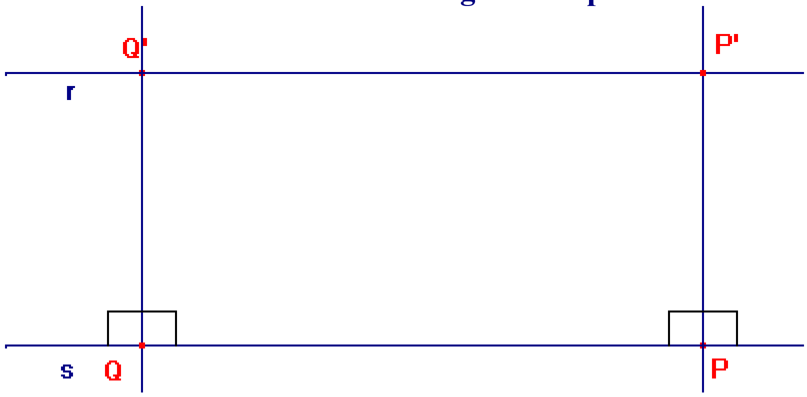
Descrizione della costruzione: Date le due rette parallele r ed s traccio le due perpendicolari ad r, x e y, partendo da due punti Q' e P' esterni ad r ma su s. che intersecano la retta r nei punti Q e P.

Hp) r // s, x e y perpendicolari ad r, angoli 1 e 3 retti.

Th) QQ’=PP’

Dimostrazione: Rispetto alle due rette // r ed s e alla trasversale x gli angoli alterni interni 1 e 2 sono uguali e quindi retti, poiché 1= retto, per l’Assioma 13 delle rette parallele. Sempre per l’Assioma 13 gli angoli 3 e 4, rispetto alle rette r e s tagliate dalla trasversale y, sono angoli alterni interni uguali e quindi retti, poiché 3= retto. Il quadrilatero QQ’=PP’ avendo gli angoli opposti uguali, perché retti, è un parallelogramma per il quarto criterio del parallelogramma e quindi ha per i teorema 17, proprietà del parallelogramma, i lati opposti uguali e cioè QQ’=PP’.

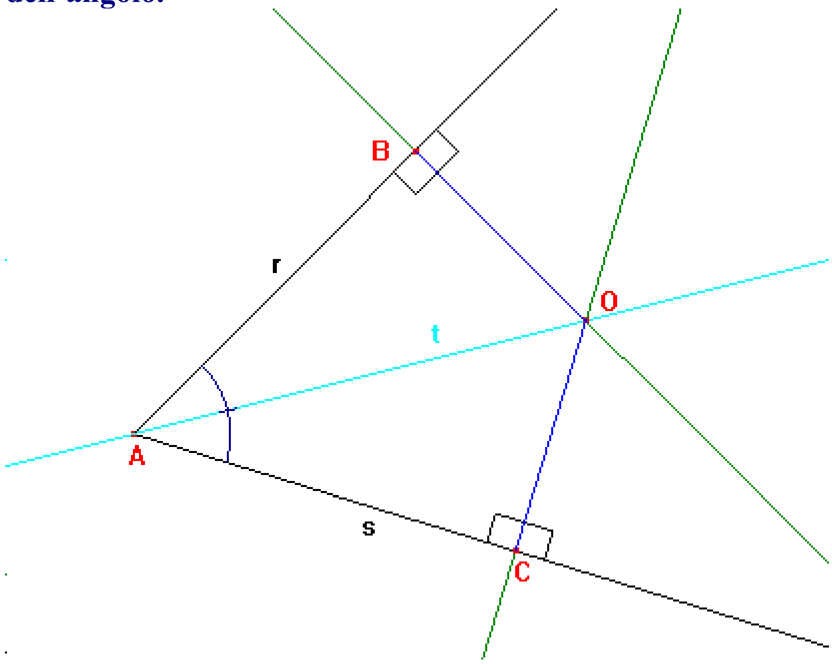
Teorema 40: Se due rette mantengono sempre la stessa distanza allora sono parallele.



Hp) P’P perpendicolare ad s, Q’Q perpendicolare ad s, PP’=QQ?
Th) r // s

Dimostrazione: I lati PP’ e QQ’ sono uguali per Hp e paralleli, per il Teorema 30: Due rette perpendicolari alla stessa retta sono parallele, quindi P’PQ’Q è un parallelogramma perché ha una coppia di lati uguali e paralleli (Teorema 20: III criterio del parallelogramma). Quindi per la def. di parallelogramma (quadrilatero con i lati opposti paralleli) i lati Q’P’ e QP sulle rette r ed s sono paralleli, e quindi anche le rette r e s sono parallele.

Teorema 41: La bisettrice di un angolo è il luogo geometrico dei punti equidistanti dai lati dell’angolo.



Hp) T bisettrice di BAC => BAO=OAC, OC perpendicolare a s, OB perpendicolare a r.
Th) OC=OB

Dimostrazione: Volendo dimostrare che i lati OC e OB sono uguali considero i triangoli OAC e OAB. Essi hanno:
- **AO in comune;**
- **L'angolo OAC=OAB per Hp;**
- **L'angolo BOA=COA per differenza di angoli uguali, somma degli angoli interni di un triangolo= piatto-retto= retto- (OAC=OAB)= BOA=COA.**

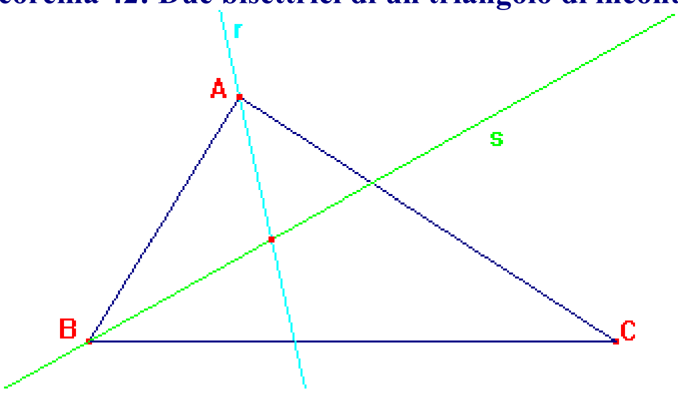
Quindi sono uguali per il II criterio di uguaglianza triangolare e hanno tutti gli elementi corrispondenti uguali, in particolare i lati OC e OB opposti agli angoli uguali BAO e OAC.

Hp) OC=OB, OC perpendicolare a s, OB perpendicolare a r.
Th) AO bisettrice di CAB

Dimostrazione: Volendo dimostrare che gli angoli BAO e OAC sono uguali considero i triangoli BAO e AOC. Essi hanno:
- **AO in comune;**
- **BO=OC per Hp.**

Essi sono uguali per il Teorema dei triangoli rettangoli: Due triangoli rettangoli con l'ipotenusa ed un cateto uguali sono uguali. Essendo uguali hanno tutti gli elementi corrispondenti uguali, in particolare gli angoli BAO e OAC opposti ai lati uguali BO e OC. Formando due angoli uguali, BAO e OAC, la retta passante per A e O è la bisettrice dell'angolo CAB.

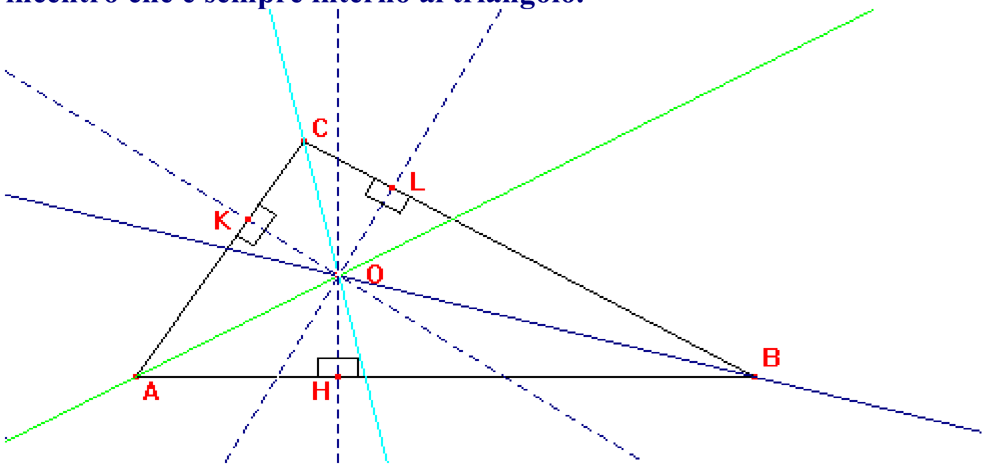
Teorema 42: Due bisettrici di un triangolo di incontrano in un punto.



Hp) ABC triangolo, r bisettrice di BAC e s bisettrice di ABC.
Th) r non è // ad s

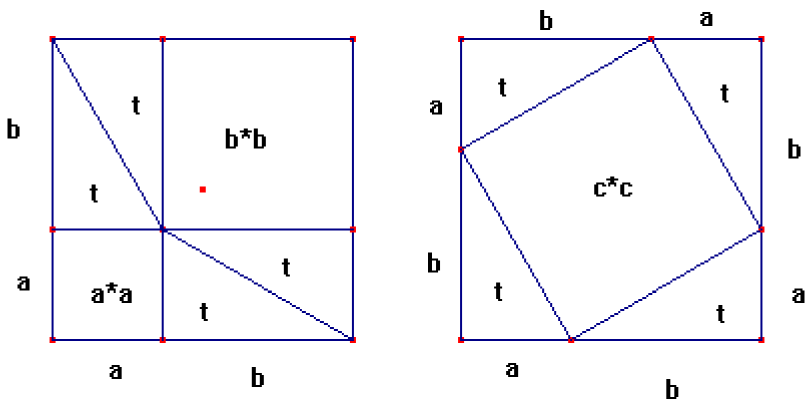
Dimostrazione: Nego la Th, se r e s // tagliate dalla trasversale passante per AB allora per il Teorema 12 se due rette sono // hanno gli angoli coniugati interni supplementari, questo è un assurdo perché i due angoli coniugati interni sono la metà di due dei tre angoli di un triangolo la cui somma è un angolo piatto, quindi è impossibile che la somma di due metà di due angoli sia un angolo piatto => sono arrivato ad un assurdo => la Th è vera.

Teorema 43: Le bisettrici dei tre angoli di un triangolo si incontrano in un unico punto detto incentro che è sempre interno al triangolo.



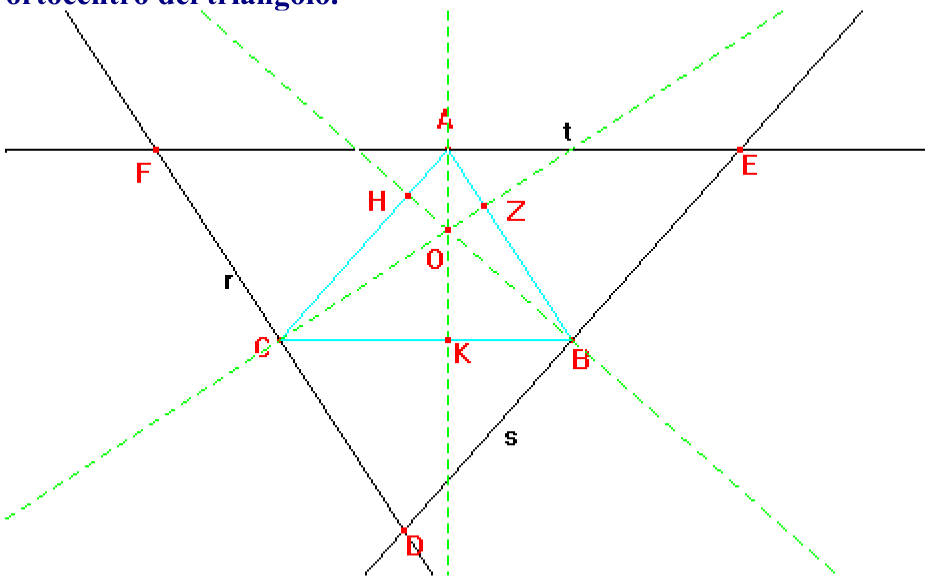
Hp) Angolo BAO=CAO, ACO=OCB
Th) O appartiene alla bisettrice di ABC.
Dimostrazione: Per il Teorema 42, due bisettrici di un triangolo si incontrano, le bisettrici di ACB e di CBA si incontrano in O.
Il punto O appartiene alla bisettrice di CAB perché per il Teorema 41, luogo geometrico della bisettrice, OH=OK.
Il punto O appartiene alla bisettrice di ACB perché per il Teorema 41, luogo geometrico della bisettrice, OH=OL. Quindi per la proprietà transitiva dell'uguaglianza ho che OH=OK=OL => OH=OL allora per il Teorema 41 O deve essere sulla bisettrice dell'angolo ABC.

Teorema 44 di Pitagora.



Dimostrazione: c*c=a*a+b*b => c*c= (a+b)^2-2(a*b), cioè (a+b)^2-4t e a*a+b*b= (a+b)^2-2(a*b) cioè (a+b)^2-4t.

Teorema 45:Le tre altezze di un triangolo si incontrano in un medesimo punto detto ortocentro del triangolo.



Hp) ABC=triangolo; AB//r; CB//t; AC//s; CZ, AK, BH=altezze, quindi cadono perpendicolarmente sui lati opposti;
Th) O=ortocentro del triangolo ABC;
Dimostrazione: dato il triangolo ABC e tracciate le parallele s, t, ed r ai tre lati del triangolo, facciamo le seguenti considerazioni:

- **Considerando il quadrilatero ACBE esso è un parallelogramma perché per ipotesi CB//t (quindi AE), AC//s (quindi EB), quindi per il Primo Criterio del Parallelogramma AEBC è un parallelogramma. Per il teorema 17, proprietà del parallelogramma, i lati opposti sono uguali, quindi: CB=AE, AC=EB;**
- **Considerando il quadrilatero FABC esso è un parallelogramma perché per ipotesi CB//t (quindi FA), AB//r (quindi FC), quindi per il Primo Criterio del Parallelogramma FABC è un parallelogramma. Per il teorema 17, proprietà del parallelogramma, i lati opposti sono uguali, quindi: CB=FA, AB=FC;**
- **Considerando il quadrilatero ABCD esso è un parallelogramma perché per ipotesi AB//r (quindi CD), CA//s (quindi BD), quindi per il Primo Criterio del**

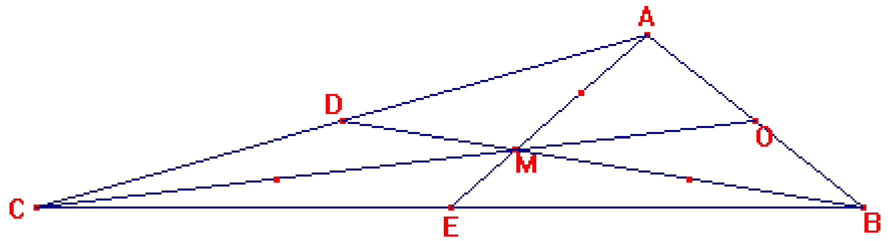
Parallelogramma ABCD è un parallelogramma. Per il teorema 17, proprietà del parallelogramma, i lati opposti sono uguali, quindi: AB=CD, BD=CA;

Per le precedenti dimostrazioni:

- **CB=AE, CB=FA => per la proprietà transitiva FA=AE;**
- **AC=EB, AC=BD => EB=BD;**
- **AB=FC, AB=CD => FC=CD;**

Ora, visto che CB//t =>AK è perpendicolare a t, perché, per l'assioma 13 delle rette parallele, considerando le due rette parallele per ipotesi CB e t, e la trasversale AK, gli angoli alterni interni sono uguali, perciò essendo AKB=AKC=retti, anche KAE=KAF=retti; la stessa cosa vale per le altre coppie di lati-rette parallele, quindi si ha che le altezze del triangolo ABC coincidono con gli assi del triangolo FDE (per definizione un asse cade perpendicolarmente sul lato opposto e lo dimezza). Quindi siccome per un teorema gli assi di un triangolo si incontrano in un unico punto, anche le altezze si incontrano in un unico punto detto ortocentro.

Teorema 46: Le tre mediane di un triangolo si incontrano in un unico punto detto baricentro e incontrandosi si dividono in due parti: una il doppio dell'altra.



Hp) AD=DC perché BD è la mediana di CA; BE=EC perché AE è la mediana di CB; M è l'intersezione di AE e BD;

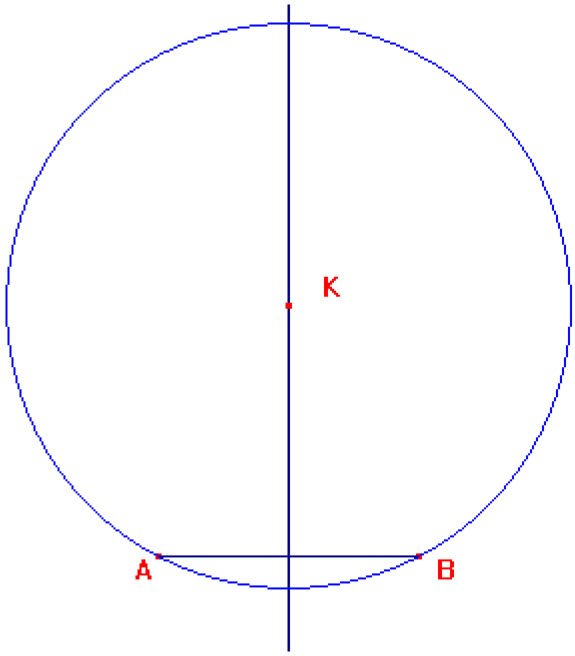
Th) AM=2ME; MB=2MD; CO=mediana;

Dimostrazione: per un teorema già dimostrato il segmento che unisce D con E è parallelo ad AB ed è la metà di esso (teorema: in un triangolo il segmento che unisce i punti medi di esso, è parallelo al terzo lato ed è la metà di esso). Considerando adesso il triangolo AMB per lo stesso teorema FG è parallelo ad AB ed è la metà di esso. Quindi per la proprietà transitiva FG=DE ed FG//DE. Ora avendo una coppia di lati opposti uguali e paralleli (DE, FG) il quadrilatero DEGF è un parallelogramma per il Terzo Criterio del Parallelogramma. Per il Teorema 17, proprietà del parallelogramma, le diagonali FE e DG si incontrano nei loro punti medi => FM=ME, DM=MG.

Essendo F e G punti medi di AM e di BM, AF=FM, e BG=GM => per l'assioma somma di segmenti uguali AM=2ME, MB=2MD.

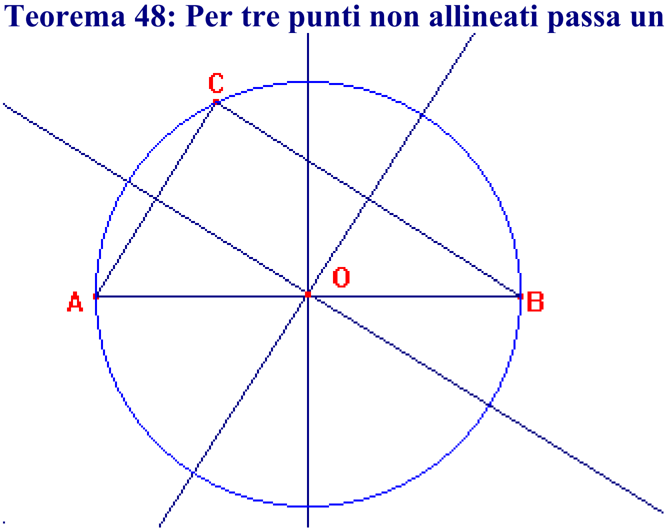
Ora CO mediana passa da M per la stessa dimostrazione prendendo per esempio CO e AE. Siccome esiste solo un punto che divide i segmenti in un certo rapporto => M è il punto di intersezione delle tre mediane del triangolo ABC.

Teorema 47: per due punti passano infinite circonferenze.



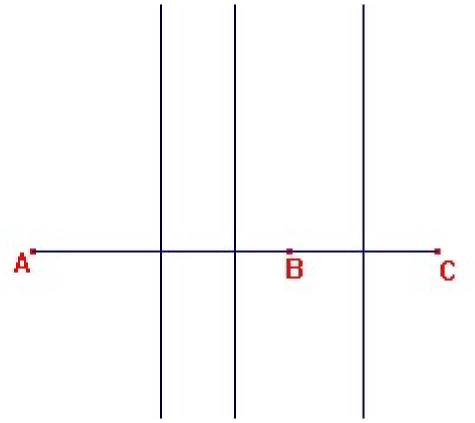
Dato il segmento AB, traccio il suo asse. Individuo casualmente sull'asse il punto K sul quale puntando il compasso traccio la circonferenza di raggio AK che passa anche per B, per il teorema che dice che l'asse è il luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi del segmento. Quindi ci sono infinite circonferenze perché posso individuare sull'asse infiniti punti K.

Teorema 48: Per tre punti non allineati passa un'unica circonferenza.



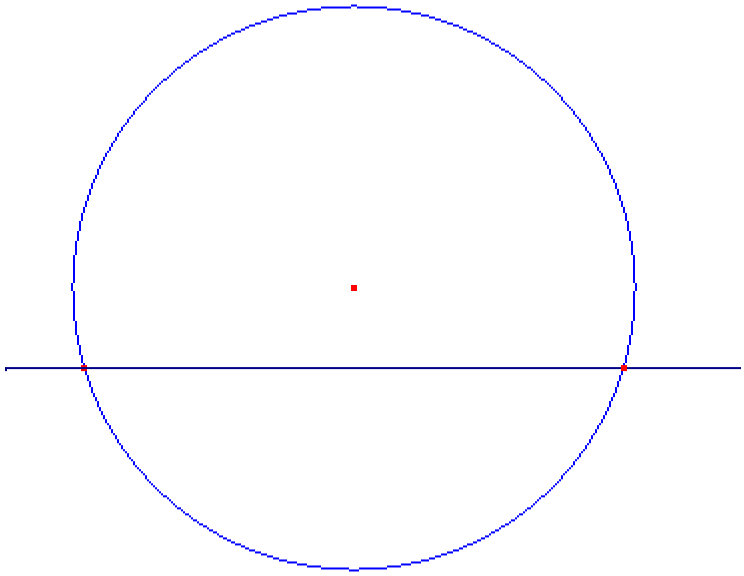
Dati tre punti non allineati A, B, C, traccio gli assi del triangolo ABC che si incontrano nel circoncentro O per il teorema 37. Essendo il circoncentro l'unico luogo geometrico equidistante dagli estremi del triangolo, esiste una sola circonferenza di centro O passante per A, B, e C.

Teorema 49: Per tre punti allineati non passa alcuna circonferenza.



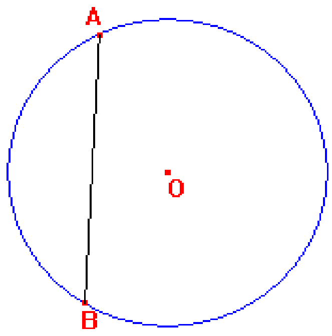
Dati tre punti allineati A, B, C, traccio gli assi del triangolo ABC che per il teorema che dice che tre rette perpendicolari alla stessa retta sono parallele, i tre assi non si incontrano mai, quindi non esiste alcun baricentro che sia il centro della circonferenza passante per A, B e C.

Corollario del teorema 49: Una circonferenza non può avere più di due punti allineati.



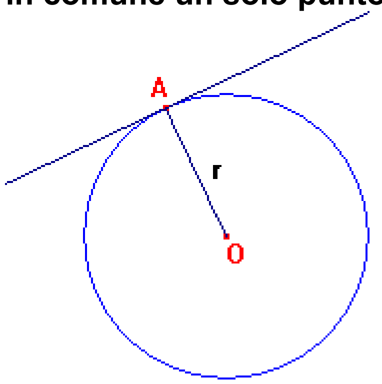
Per assurdo si nega la tesi => una circonferenza può avere più di due punti allineati, ma questo è assurdo perché per il Teorema 49 per tre punti allineati non passa alcun circonferenza, quindi la tesi è vera.

Definizione di corda e arco:
Dati due punti A e B su una circonferenza, si divide la circonferenza in due parti, ognuna di esse detta arco. Il segmento AB che unisce tali punti è detto corda.

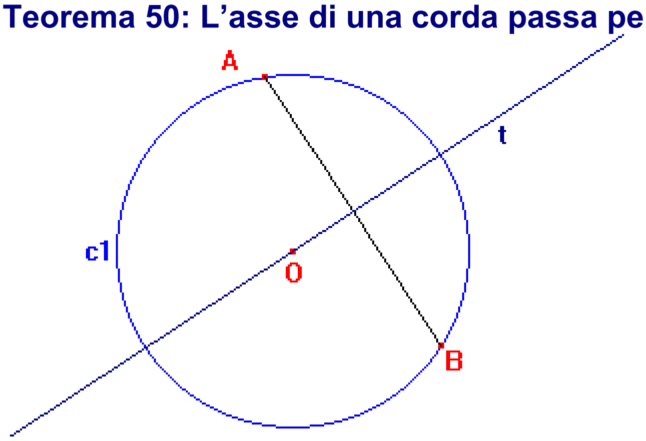


Definizione di punto interno ed esterno alla circonferenza: Dicesi punto interno alla circonferenza qualunque punto che dista dal centro meno del raggio. Mentre si dice punto esterno alla circonferenza se dista dal centro più del raggio.

Definizione di retta tangente alla circonferenza: La retta tangente è una retta che ha in comune un solo punto con la circonferenza.



Teorema 50: L'asse di una corda passa per il centro.



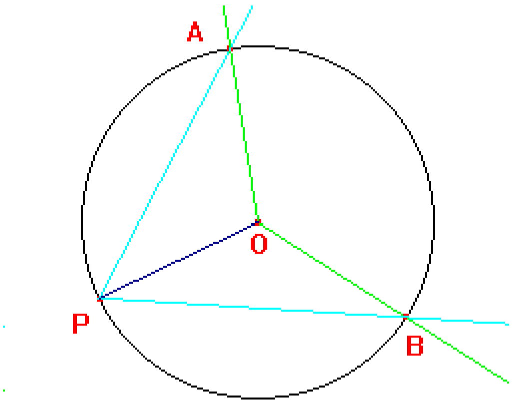
Hp) AB=corda di C1; t=asse di AB;
Th) O appartiene a t
Dimostrazione: volendo dimostrare che l'asse di una corda passa per il centro faccio le seguenti considerazioni:
- Per il teorema secondo il quale l'asse di un segmento è il luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi del segmento, esiste un unico punto equidistante da

A e da B e poiché A ed B sono sulla circonferenza allora per definizione l'unico punto equidistante dalla circonferenza è il centro; quindi il centro è sull'asse.

Teorema 51:Ogni angolo alla circonferenza è la metà dell'angolo al centro che insiste sullo stesso arco.

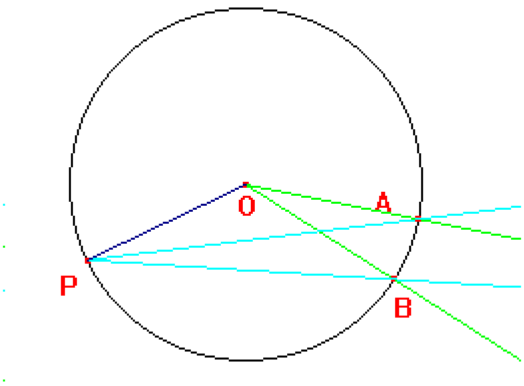
Hp) OP, OB, OA raggi di C1;
Th) APB= ½ AOB;

Dimostrazione1:



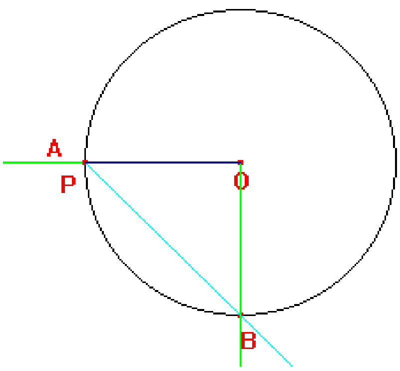
Il triangolo BOP è isoscele perché PO=OB per ipotesi => angolo OPB=PBO. Allora l'angolo esterno BOD è uguale a OPB+PBO e siccome sono uguali => ½ di BOD=OPB.
Ora prendo AOP che è isoscele in quanto OP e OA sono uguali per ipotesi => APO=OAP => angolo esterno AOD è uguale ad APO+PAO => ½ AOD=APO.
Ora APO+OPB=½ AOD+ ½ DOB => APB=½ (AOD+DOB) => APB= ½ AOB.

Dimostrazione 2:



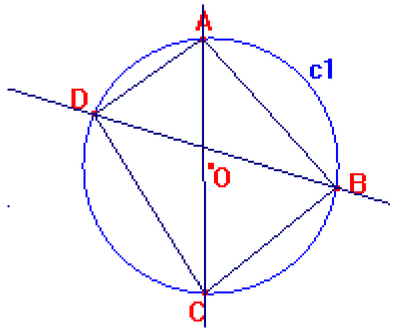
AOB=AOC-BOC => AOB=2APC (quindi 2α)-2BPC (quindi 2β) => AOB=2(α - β) => AOB=2APB => APB=½ AOB.

Dimostrazione3:



Essendo AO=OB => AOB è un triangolo isoscele => ha gli angoli alla base uguali. Ora AOB retto, la somma degli angoli interni è un piatto => OAB+OBA= retto => OAB=OBA= metà retto.

Teorema 52: Ogni quadrilatero inscritto in una circonferenza ha gli angoli opposti supplementari.



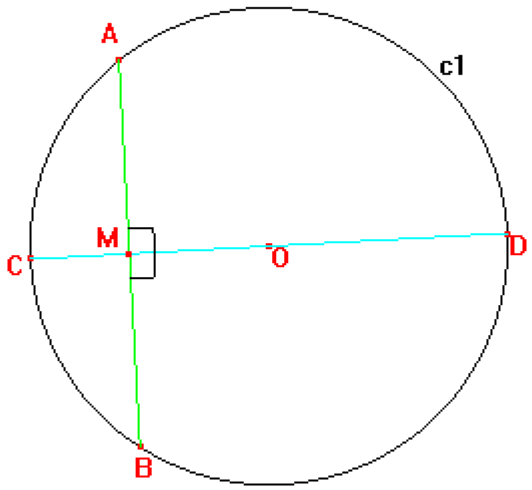
Hp) Quadrilatero ABCD inscritto nella circonferenza C1;
Th) ADC+ABC=angolo piatto; DAB+DCB=angolo piatto;

Dimostrazione: volendo dimostrare che il quadrilatero ABCD ha gli angoli opposti supplementari traccio le diagonali. Considero il triangolo ADC:
- **L'angolo AOC essendo anche il diametro di C1 è un angolo piatto, quindi per il teorema 51, ADC=½ AOC => ADC=angolo retto;**

Considero adesso il triangolo ABC:
- **L'angolo AOC essendo anche il diametro di C1 è un angolo piatto, quindi per il teorema 51, ABC=½ AOC => AOC=angolo retto;**

Quindi si è dimostrato che ADC+ABC=angolo piatto.
Se prendiamo in considerazione l'altra diagonale del quadrilatero ABCD, la dimostrazione è la stessa, prendendo in considerazione gli angoli alla circonferenza DAB e DCB e l'angolo DOB al centro.

Teorema 53: Il diametro perpendicolare ad una corda la dimezza.



Hp) DC perpendicolare ad AB; CD=diametro; AB=corda, C1;
Th) AM=MB
Dimostrazione: volendo dimostrare che AM=MB considero i due triangoli AOM e BOM. Essi ahnno:
- **AO=OB perché raggi di C1;**

- **OM in comune;**
- **Angolo AMO=OMB=retti per ipotesi;**

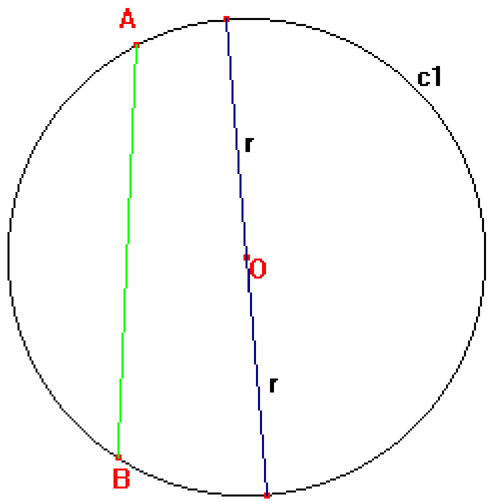
Per il teorema d'uguaglianza dei triangoli rettangoli AOM=BOM. Essendo uguali hanno tutti gli elementi corrispondenti uguali; in particolare AM=MB perché entrambi opposti agli angoli uguali AOM e MOB.

Definizione di angolo alla circonferenza e angolo alla circonferenza che insiste su un arco o su una corda: **Dicesi angolo alla circonferenza APB un angolo che ha il vertice V sulla circonferenza e i lati che incontrano la circonferenza stessa nei punti A e B. I punti A e/o B possono anche andare a coincidere con il vertice stesso. In quest'ultimo caso la retta che contiene uno dei lati dell'angolo o entrambi diventa tangente. Considerando la corda AB si dice che AVB insiste sulla corda AB e si dice anche che insiste sull'arco AB che non contiene V.**

Definizione di retta secante ed esterna ad una circonferenza: **Una retta r si dice secante ad una circonferenza c se ha in comune con la circonferenza due punti. Se la retta r non ha punti in comune con la circonferenza allora si dice che la retta è esterna alla circonferenza.**

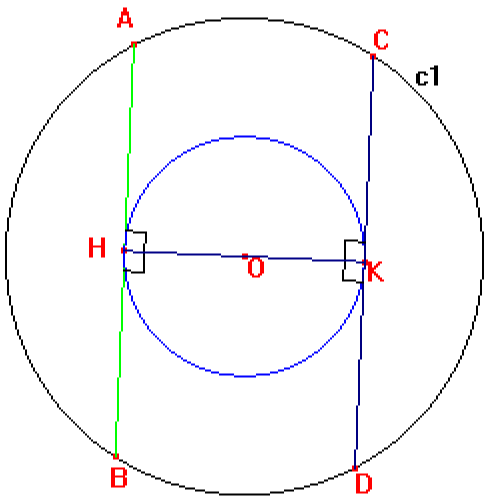
Definizione di punto interno ed esterno ad una circonferenza: Un punto si dice interno alla circonferenza se dista dal centro meno del raggio, mentre si dice esterno quando dista dal centro più del raggio.

Teorema 54: Tutti i diametri sono uguali e un diametro è maggiore di qualsiasi altra corda che non passa per il centro.



Hp) AB=corda non passante per il centro;
Th) tutti i diametri sono uguali; 2r>AB;
Dimostrazione1: tutti i diametri sono uguali perché ciascuno è il doppio di un raggio (per definizione tutti i raggi sono uguali).
Dimostrazione2: per la disuguaglianza triangolare la somma di OA+OB è maggiore di AB => 2r>AB => diametro≥ corda AB.

Teorema 55: Corde uguali hanno la stessa distanza dal centro e viceversa.



Hp) AB=CD, OH perpendicolare ad AB; OK perpendicolare CD;
Th) OH=OK
Dimostrazione: i triangoli AHO e DKO sono uguali perché essendo triangoli rettangoli hanno:

- **L'ipotenusa uguale: infatti OA ed OD sono raggi;**
- **KD=HA per il teorema secondo il quale una retta perpendicolare ad una corda la dimezza; in questo caso le due rette perpendicolari a le due corde uguali le dividono in due parti uguali ciascuna;**

Quindi per il Criterio di Uguaglianza dei triangoli rettangoli sono uguali e hanno tutti gli elementi corrispondenti uguali; in particolare OH=OK perché entrambi opposti agli angoli uguali OAH e ODK.

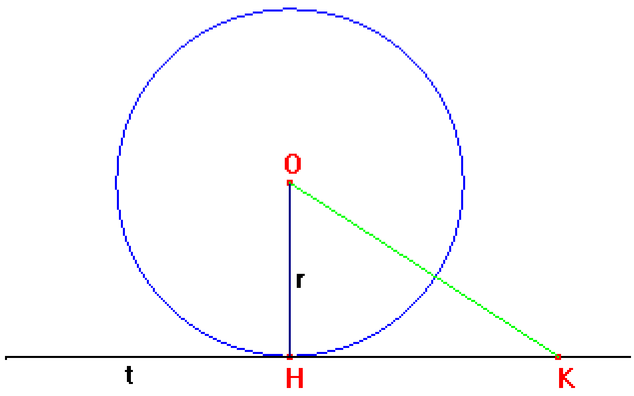
Linea: **Ente primitivo.**

Assioma 16: **Per due punti passano infinite linee.**

Definizione di linea chiusa: **La linea chiusa è una linea che unisce due punti A e B che coincidono.**

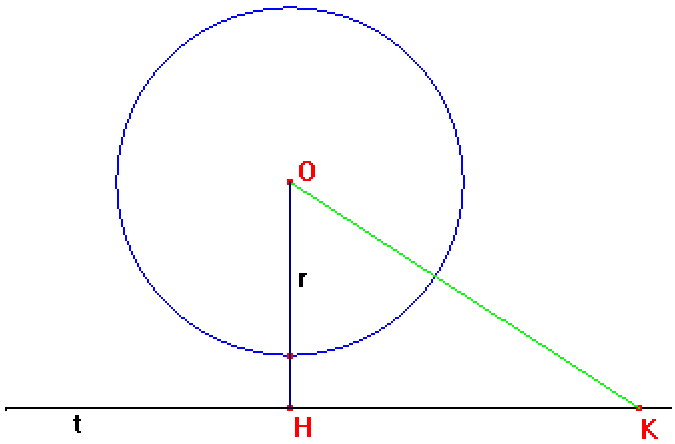
Assioma 17 della linea chiusa: **Una linea che unisce due punti, uno interno ad una circonferenza e uno esterno ad essa incontra questa in almeno un punto.**

Teorema 56: **Se una retta dista dal centro quanto il raggio è tangente alla circonferenza, se una retta dista dal centro più del raggio è esterna alla circonferenza, se una retta dista dal centro meno del raggio è secante alla circonferenza in due punti; e viceversa.**



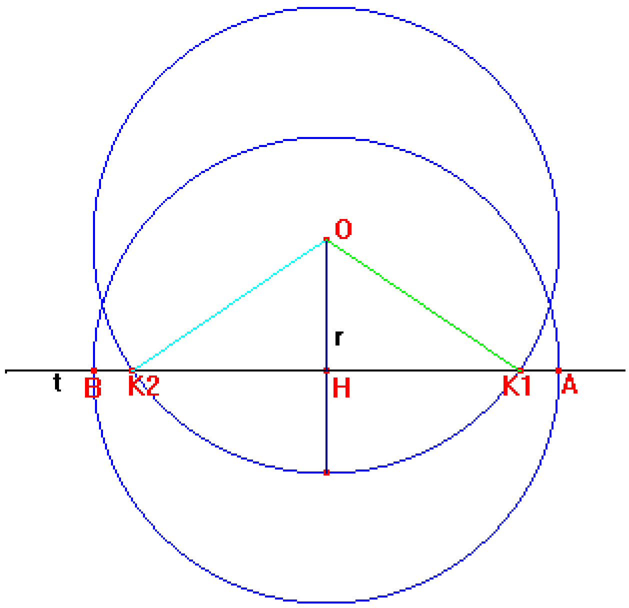
Hp) OH perpendicolare a t, H appartiene a t, OH = r => H appartiene a cfr
Th) t retta tangente alla circonferenza

Dimostrazione: OK > OH per il teorema che dice che in un triangolo rettangolo l'ipotenusa è maggiore dei cateti, essendo OH = r => OK > r => ogni K preso sulla retta t è esterno a Cfr => solo H è in comune fra t e cfr => t è per definizione, avendo un solo punto in comune con cfr, una retta tangente.



Hp) OH perpendicolare a t, OH > r, H appartiene a t
Th) t retta esterna a cfr

Dimostrazione: OK, ipotenusa, > OH, cateto, > r => tutti i punti appartenenti a t sono esterni alla circonferenza. => Tt è una retta esterna alla circonferenza per definizione.



Per costruzione traccio una circonferenza di raggio r con centro H, che incontra t in due punti, A e B, esterni a cfr.
Hp) OH < r, H appartiene a t
Th) t retta secante a cfr in K1 e K2

Dimostrazione: Per l'Assioma 17 una linea che unisce un punto esterno con uno intero incontra la circonferenza in almeno un punto K1, lo stesso accade per K2. Ora per un teorema una circonferenza non può avere più di due punti allineati => t incontra cfr in K1 e K2 => t è per definizione retta secante alla cfr.

INVERSO 1

Hp) t retta tangente alla cfr
Th) OH = r

Dimostrazione:
Nego la Th => OH > r o < r. Se OH > r => t è esterna alla circonferenza. Se OH < r => t è secante alla circonferenza. In ogni caso arrivo ad un assurdo perché per Hp t è tangente a cfr => la Th è vera.

INVERSO 2

Hp) t retta esterna alla circonferenza, H appartiene a t
Th) OH > r

Dimostrazione: Nego la Th => OH può essere = a r o < . Se OH = r => t è tangente a cfr, se OH < r => t è secante a cfr. In ogni caso nego l'Hp => assurdo => la Th è vera.

INVERSO 3

Hp) t retta secante
Th) OH < r

Dimostrazione: Nego la Th => OH può essere = o > di r. Se OH è maggiore di r allora la retta è esterna, se OH = r => la retta è tangente alla circonferenza. In ogni caso nego l'Hp => assurdo => la Th è vera.