E se portiamo il “PORTA” in classe…?

Perché il progetto Porta?

Abbiamo progettato un’attività di “rinforzo” di uno degli argomenti già trattati in classe, prefiggendoci i seguenti obiettivi:

- Rendere lo studente consapevole delle proprie <u>conoscenze</u>, <u>capacità</u> e <u>limiti</u> riguardo all’argomento scelto
- Portare i ragazzi a misurarsi con il linguaggio matematico corretto, invitandoli a verbalizzare le proprie idee
- Sviluppare un maggiore senso critico nella trattazione degli argomenti
- Stimolare <u>funzioni di controllo</u> (saper analizzare un’idea da più punti di vista senza perderne l’aspetto unitario);
- Rendere gli <u>studenti protagonisti</u> nella costruzione delle conoscenze
- Promuove l’ascolto reciproco e democratico delle idee.

Le classi coinvolte sono state:

- 5° ITG “Niccolini” di Volterra;
- 2° ITC, 2° ITG, 3° ITG, 4° ITG degli “Istituti Scolastici Superiori” Istituto paritario “Esedra” di Lucca.

Abbiamo scelto di approfondire in classe un concetto come quello di “funzione” perché ci è sembrato un argomento trasversale a molti concetti matematici che affrontiamo in classe: in fondo quante volte utilizziamo questa parola per definire qualcos’altro.

Siamo sempre certi che quando noi diciamo la parola “funzione” loro intendano la stessa cosa a cui stiamo pensando anche noi?

Volevamo dunque essere consapevoli del pensiero il più possibile effettivo dei nostri ragazzi e per sondare in profondità la loro idea di “funzione” ed condurli ad un’idea più generale ed estesa: realizzare un’attività sullo stile progetto PORTA ci è sembrata adatta, o comunque almeno da sperimentare.

Abbiamo fatto leva sulle conoscenze dei ragazzi senza costringerli al formalismo, ma lasciandogli piena libertà di espressione. (Anche perché il test è stato rivolto a ragazzi che frequentano un istituto tecnico molto poco esigente ed hanno tutti forti difficoltà nell’espressione orale e scritta).

Il percorso si è articolato su tre passaggi

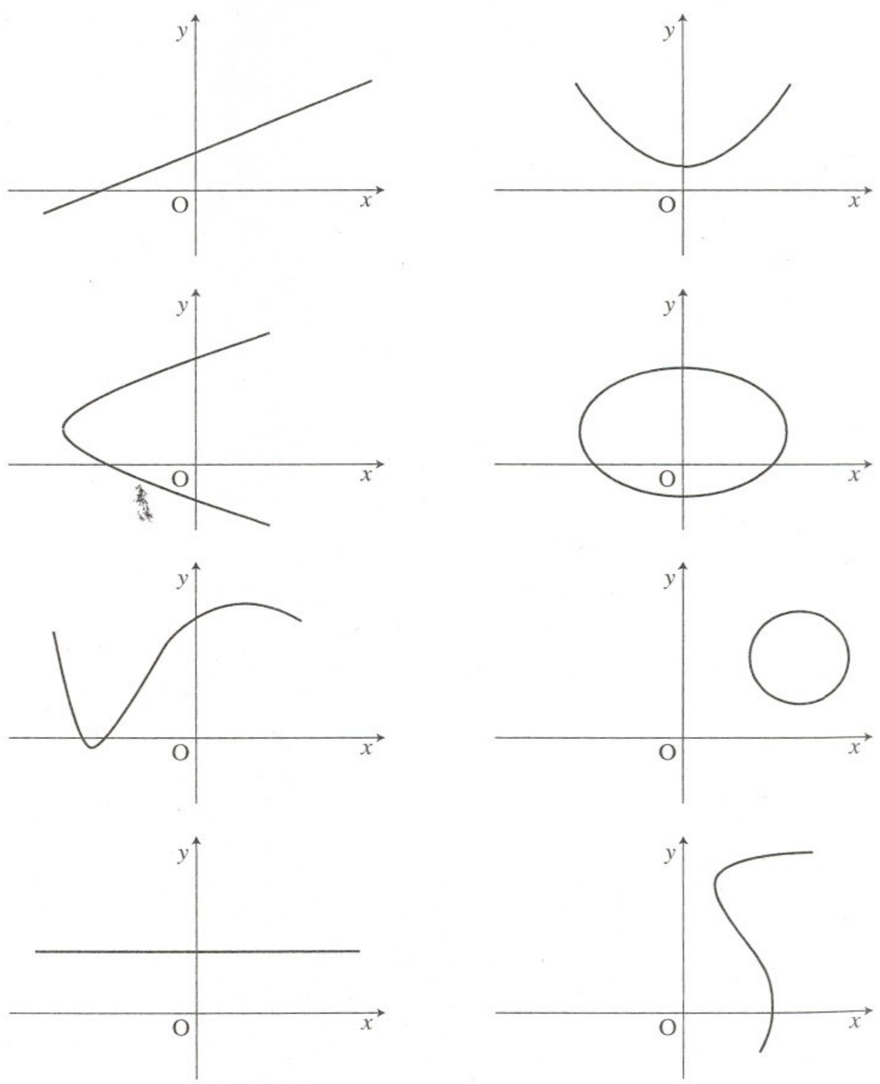
1. allenarli alla formalizzazione del concetto di funzione
2. far emergere la generalità del concetto di funzione
    - definita su insiemi qualsiasi e non necessariamente numerici

- applicabile anche in altri ambiti, non necessariamente matematici o dove si applicano formule o leggi espresse da equazioni

3. Costruire funzioni chiedendogli di pensare ad esempi oppure di contare il numero di funzioni definibili da un insieme ad un altro.

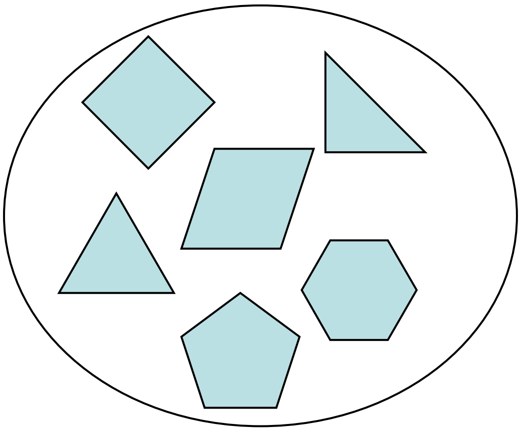
.TESTO DEL COMPITO

1. *Fai una crocetta sui termini seguenti di cui hai sentito parlare*
   Funzione
   Dominio
   Codominio
   Grafico
   Fra quelli che conosci, formulane una definizione.
2. *Quali dei seguenti grafici secondo te rappresentano grafici di funzioni? Motiva la risposta.*

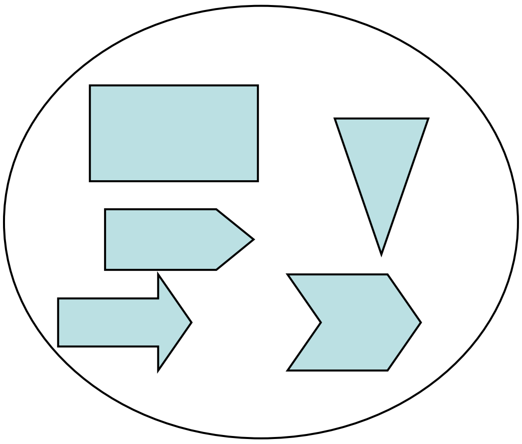


3. *Dire se la relazione che associa ad ogni numero razionale positivo la coppia di naturali primi tra loro che lo rappresentano in frazione, è o meno una funzione, motivando la risposta.*
4. *Siano dati i seguenti insiemi A e B. Dire se la relazione "x ha lo stesso numero di lati di y" con x un elemento di A e y un elemento di B è una funzione. Descrivere se è una funzione la stessa relazione ma con gli insiemi A e B invertiti.*

Insieme A



Insieme B



5. *Sia dato l'insieme di tutte le lettere dell'alfabeto e l'insieme dei cognomi degli studenti della tua classe. Considera la relazione "x è l'iniziale di y" con x elemento del primo insieme e y elemento del secondo insieme. Questa relazione è una funzione? Perché?*
6. *Fornisci un esempio di funzione tra due insiemi A e B dove*
   A è un insieme finito e B un insieme finito
   A è un insieme finito e B un insieme infinito
   A è un insieme infinito e B insieme finito;
   A è un insieme infinito e B insieme infinito.
7. *Dati gli insiemi A={a,b,c,d} e B= {e,f,g}, quante sono le funzioni definibili da A in B?*

Analizziamo le risposte ai singoli esercizi.

In particolare, in riferimento alle definizioni fornite, nell'**esercizio n.1**, si può notare che:

- Il dominio viene pensato come **insieme di numeri** e non come insieme qualsiasi.
- Sono presenti definizioni ricorsive. Infatti, la funzione è "….è una legge che associa ad ogni elemento del dominio uno ed uno solo del codominio" mentre il domino viene definito come " ….insieme dei punti di partenza della funzione" ed il codominio come "….insieme dei punti di arrivo di una funzione".
- C'è un forte riferimento al piano cartesiano. Il grafico è la rappresentazione della funzione sul piano cartesiano. Qualcuno prova a distaccarsi dal pensiero specificatamente matematico e parla di "rappresentazione visiva dei dati"

- Si trova anche una definizione *romantica* di grafico: "*Il grafico rappresenta le coordinate, la posizione di quelli che sono i punti* ***dove la x trova la sua immagine***"

Esercizio n. 2

Nella domanda si sottintende che taluni grafici possono non rappresentare funzioni. Si vuole indurre gli allievi a lavorare intanto su questa ipotesi, lasciandoli comunque in un ambiente per loro piuttosto familiare quale il piano cartesiano e con gli insiemi dominio e codominio numerici reali senza specificare comunque se il dominio fosse rappresentato sull'asse delle x o quello delle y.
Ad ogni modo solo il 10% del campione si domanda su quale dei due assi viene considerato il dominio, mentre gli altri alunni danno per scontato che il *dominio stia sull'asse delle x.*
Ci sembrava interessante in particolare sottolineare due risposte originali, che ci dicono molto sull'importanza che racchiudono certi termini e sulle macchinose tecniche di memorizzazione che adottano alcuni nostri studenti, spesso a nostra insaputa:

- Il grafico raffigurante una parabola è una funzione, proprio perché è una parabola;
- Il grafico della retta non è una funzione perché è una retta di equazione x=k.

Esercizio n. 3

Questo esercizio è utile per capire se gli allievi sanno applicare la definizione di funzione ad insiemi non del tutto "convenzionali".
Le riposte più interessanti sono state:

- *No, perché ad un numero razionale corrispondono due numeri che lo rappresentano" (V ITG)*
- Secondo me, è una funzione con dominio i razionali, ma non saprei scrivere l'insieme di arrivo" (IV ITG)
- *"E' una funzione, in quanto per essere primi tra loro i due naturali, bisogna ridurre ai minimi termini le frazioni e non ci sono due frazioni equivalenti ma diverse ridotte ai minimi termini" (V ITG)*

Si riscontra una certa confusione tra le caratteristiche dell'insieme di partenza e le caratteristiche della relazione. Inoltre, non si riesce a pensare al codominio formato da coppie di numeri!

Esercizio n. 4 e 5

Con questi esercizi si abbandona il campo dei numeri e si iniziano a formulare esempi di insiemi di oggetti di diversa natura: le figure, nel primo caso, i nomi e le lettere nel secondo caso.

Un ulteriore obiettivo è quello di valutare se una funzione risulta tale invertendo il dominio con il codominio.

Per quanto riguarda l'esercizio n. 4, la maggior parte degli allievi è d'accordo nel non considerare la relazione da A in B come una funzione e nel considerare, invece, la funzione da B in A come una funzione. Viene confuso il concetto di funzione con quello di surgettività o di iniettività:

- *Non è una funzione* (intendendo da A a B) *perché una figura dell'insieme B non ha la corrispondente nell'insieme A e dall'insieme A deve partire una sola freccia….(2° ITG)*
- *"Da A in B non è una funzione perché ogni figura di A trova una figura di ugual numero di lati in B, ma non una sola." (V ITG).*

Quasi nessuno si accorge che la relazione da B in A, non può essere una funzione perchè manca di entrambi i requisiti (la freccia non ha un corrispettivo in A ed il triangolo ne ha due).

Per quanto riguarda l'esercizio n. 5, gli animi si dividono in maniera quasi equa. Il caso ha voluto che in una classe vi fossero cognomi tutti diversi, per cui non solo si originava una funzione ma addirittura si trattava di una funzione bigettiva. Nell'altra classe, invece, si avevano più cognomi (insieme B) a cui era associata la stessa iniziale (insieme A). Persiste la difficoltà nel capire quale debba essere l'insieme in cui ad ogni elemento corrisponde uno ed un solo elemento dell'altro insieme.

Esercizio n. 6

Questo esercizio ha creato difficoltà di due livelli diversi: innanzitutto quali insiemi scegliere, ma, soprattutto quali relazioni inventare su tali insiemi.

Infatti, mentre il primo passo è stato compiuto (non da tutti) il secondo non ha prodotto risultati soddisfacenti.

- $A=\{x\in \Re \mid x<10\}$ e $B=\{x\in \Re \mid x<10\}$ (e come funzione l'identità)
- $A=\{x\in \Re \mid x<10\}$ *e* $B=\{x\in \Re \mid x>0\}$ (e come funzione l'identità)
- *A= Universo* *B=Stelle* (nessuna funzione)
- A= capelli dei ragazzi della classe B = numeri (nessuna funzione)

Si cerca, in questo modo di sviluppare la fantasia ed il senso critico degli allievi.

Riporto alcuni tentativi effettuati:

- Esseri viventi → Regni dove essi si collocano (problema di buona definizione, cosa si intende per esseri viventi? Per "regni"? E per "collocano"?)

- *Tutti i quadrati perfetti da 1 a 100 → I numeri interi che sono radici di altri* numeri (a parte la definizione della funzione, che non è ben chiara, non si capisce neppure se sia una funzione. Ad esempio 1 potrebbe avere due immagini, ± 1).
- *Cognomi e numero delle lettere che li compongono*. (è un po' da interpretare. Lo studente ha dichiarato la relazione ma non l'insieme di arrivo, che si può forse supporre N)
- *Tutti i multipli di 2 e 3 ma non di entrambi* $\rightarrow \{2,3\}$
- *R e l'iniziale del numero scritto in lettere*
- *Numeri pari →tutti i multipli dei numeri pari*
- $1 < x < \infty$ *e* $\frac{1}{x}$ *associa ad ogni numero il suo inverso*. (il dominio è stato così definito con cognizione di causa o per un puro caso?)

Esercizio n. 7

Elementi interessanti evidenziati da questo esercizio:

- Il non vedere relazioni scritte in maniera esplicita fa supporre che non ci sia una funzione tra A e B.
- Trovare elementi diversi tra dominio e codominio trae in inganno
- Bisogna ideare una funzione, tramite la creazione di criteri che possano collegare gli elementi di A con quelli di B.

Anche i questo caso vi è confusione tra dominio e codominio della funzione:

"Nessuna dato che A ha 4 elementi e B ne ha 3, non posso associare ad ogni elemento di A uno e uno solo di B" (V ITG)

IL QUESTIONARIO

I ragazzi più grandi hanno giudicato l'attività deprimente perché fanno emergere scheletri nell'armadio che gli stessi allievi non credevano di non avere.

Gli alunni delle altre classi, invece, si sono sentiti stimolati dall'esperienza, perché ha permesso loro di consolidare l'argomento giocando e riflettendo su alcuni aspetti che non avevano preso in considerazione quando lo avevano studiato.

Inoltre, il dibattito seguito al compito ha permesso si promuovere, tra i ragazzi, l'ascolto reciproco e democratico delle idee.

L’esperienza è stata particolarmente interessante ed istruttiva non solo per i ragazzi, ma anche per noi docenti: abbiamo scoperto un efficace metodo esplorativo, utile per capire come proporre in futuro l’argomento alle prossime classi.