UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PISA

RELAZIONE DI TIROCINIO

Corso di perfezionamento

"Strategie didattiche per promuovere un atteggiamento positivo verso la matematica e la fisica"

Relazione di Stefania Pancanti

Corsiste:

Agnese De Rito
Chiara Dini
Chiara Marmeggi
Stefania Pancanti
Angela Putortì
Ester Vatteroni

ANNO ACCADEMICO 2006-07

Indice

Introduzione

Nell'ambito del progetto "Lauree Scientifiche", il Corso di Laurea in Matematica dell'Università di Pisa ha organizzato per il terzo anno consecutivo la "Settimana Matematica". Dal 5 all'8 febbraio 2007, circa 130 studenti degli ultimi due anni delle Scuole Superiori interessati alla matematica hanno potuto conoscere il Dipartimento di Pisa, assistere a seminari e conferenze, conoscere le opportunità di lavoro che offre una laurea in Matematica tramite le testimonianze di giovani laureati, stare a contatto con studenti iscritti a Matematica, frequentare un "laboratorio" opportunamente ideato.
L'iniziativa è stata così strutturata:

	Lunedì	Martedì	Mercoledì	Giovedì
MATTINA		**Prof. Fabrizio Broglia -** Una lezione universitaria di Matematica **Prof. Dario Bini**: Matematica e Mondo Reale: il problema di Google e altre storie	**Visita** alla struttura **Incontro** con giovani laureati sulle prospettive di lavoro della laurea in Matematica	
POMERIGGIO	**Presentazione Laboratori**	**Laboratori**	**Laboratori**	**Compilazione questionari** di valutazione **Incontro** con studenti del Corso di Laurea in Matematica **Prof. Giovanni Alberti**: presentazione del Corso di Laurea in Matematica **Consegna attestati**

Cosa è successo…..

Il nostro tirocinio si è svolto durante le mattine di martedì e mercoledì e nel pomeriggio di giovedì.
Durante queste poche ore, abbiamo seguito insieme ai ragazzi le attività proposte cercando di osservare il modo in cui essi affrontavano questa esperienza.
Infine, ciascuna abbiamo analizzato le risposte da loro fornite al questionario di valutazione somministrato durante l'ultima giornata di stage.

La lezione tipo universitario

Il prof. Broglia ha svolto la lezione cercando di rispecchiare il più possibile lo standard di una classica lezione universitaria. In particolare, i tempi sono stati gestiti in maniera diversa durante l'esposizione: all'inizio il ritmo è stato lento e la spiegazione

meticolosa, mentre in seguito, è aumentato sempre più fino a rendere difficile la comprensione della parte finale della lezione.
L'argomento è stato: le coniche. Il docente ha inizialmente spiegato il motivo di tale scelta. Le coniche sono oggetti che quasi tutti conoscono per cui alla portata dei ragazzi presenti, trasversali a tutta la matematica e vengono trattati già dal primo anno di corso universitario.
Innanzitutto il docente ha ricordato le definizioni di tali curve:

Ellisse = insieme dei punti P del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi F' e F" detti fuochi (PF' + PF" = k= costante).

Iperbole = insieme dei punti P del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi F' e F" detti fuochi (PF' - PF" = k= costante).

Parabola = insieme dei punti P del piano equidistante da un punto fisso F detto fuoco e da una retta fissa detta direttrice.

In particolare ciò che il prof. Broglia aveva intenzione di mostrare ai presenti era che ciascuna delle curve sopra citate può essere ottenuta attraverso una sezione conica e che, viceversa, ogni sezione conica dà origine a una delle tre curve.

In altre parole il suo scopo era quello di dimostrare l'uguaglianza tra l'insieme A={sottoinsieme del piano formato da ellissi, iperboli, parabole} e l'insieme B={sezione di un cono circolare retto con un piano non passante per il suo vertice} (limitandosi a considerare il cono circolare retto per semplicità).
Ma come si fa a dimostrare che due insiemi sono uguali? Preso un qualsiasi elemento di A si dimostra che esso appartiene anche a B (ossia $A \subset B$) e preso un qualsiasi elemento di B si dimostra che esso appartiene anche ad A (ossia $B \subset A$).

Il docente ha subito evidenziato una classica tecnica "universitaria": le dimostrazioni sono spesso divise in due parti e non è detto che si debba iniziare da quella che appare scritta per prima nell'enunciato, ma da quella "più conveniente" ai fini della dimostrazione stessa.

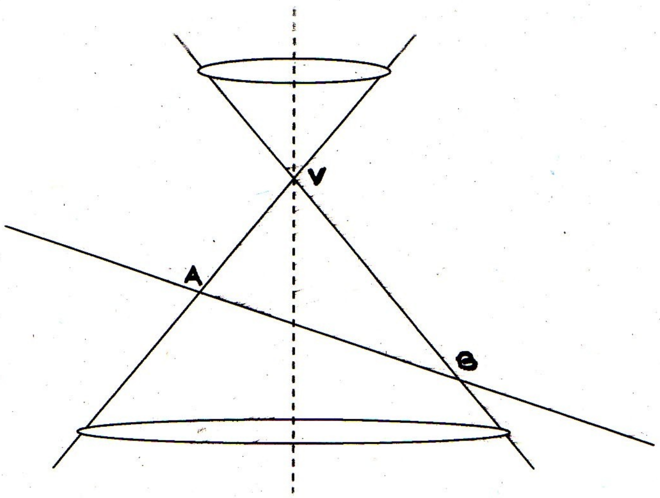
Infatti il prof. Broglia inizia con $B \subset A$.

Dim
Si consideri una qualsiasi sezione conica ottenuta con un piano non passante per l'origine del cono. Dimostrare che $B \subset A$ equivale a dimostrare che la curva ottenuta attraverso la sezione è o un ellisse, o un'iperbole, o una parabola. A tale scopo si deve prendere in considerazione un punto P sulla curva e si deve dimostrare che P verifica una delle tre proprietà relative alle curve appartenenti all'insieme *A*.

Ovviamente a seconda della posizione del piano considerato si avrà una diversa curva. Iniziamo dal caso dell'ellisse.
Per dimostrare quanto detto abbiamo bisogno di considerare una sfera tangente internamente al cono e al piano. Sorge quindi spontanea una domanda: una sfera cosiffatta esiste? Se si, quante ne esistono? Le risposte a queste domande si ritrovano nella seguente proposizione che andremo a dimostrare:

<u>PROPOSIZIONE 1</u>
Esiste almeno una sfera tangente internamente al cono e al piano.

Dim prop1
Dimostrare la proposizione 1 equivale a individuare il centro e il raggio di una sfera che abbia le caratteristiche richieste. Il centro della sfera, per questioni di simmetria, deve appartenere all'asse del cono e deve essere equidistante dal piano e dal cono. Per individuare un punto con tali caratteristiche ci si limita, in un primo momento, a studiare il problema in due dimensioni considerando il triangolo VAB rappresentato in figura (V è il vertice del cono e VA,VB le due generatrici).

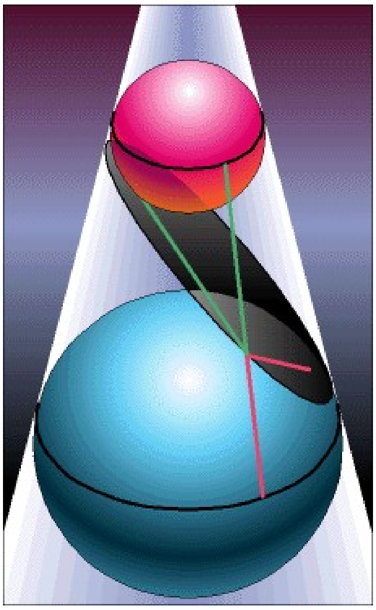


Per tale triangolo siamo interessati a trovare una circonferenza inscritta al triangolo stesso o, in altre parole, a individuarne il centro e il raggio. Il centro di tale circonferenza deve essere un punto equidistante dai lati del triangolo; sappiamo che un punto di questo tipo esiste ed è unico: è l'incentro, incontro delle bisettrici degli angoli interni del triangolo.
Individuati il centro e il raggio di tale circonferenza, per ricondurci al problema iniziale in tre dimensioni, è a questo punto sufficiente ruotare la medesima rispetto all'asse del cono ottenendo così una sfera tangente internamente al cono e al piano considerati. Dato che siamo riusciti a trovare una sfera di questo tipo, si conclude che almeno una sfera tangente internamente al cono esiste e dunque abbiamo dimostrato la proposizione.

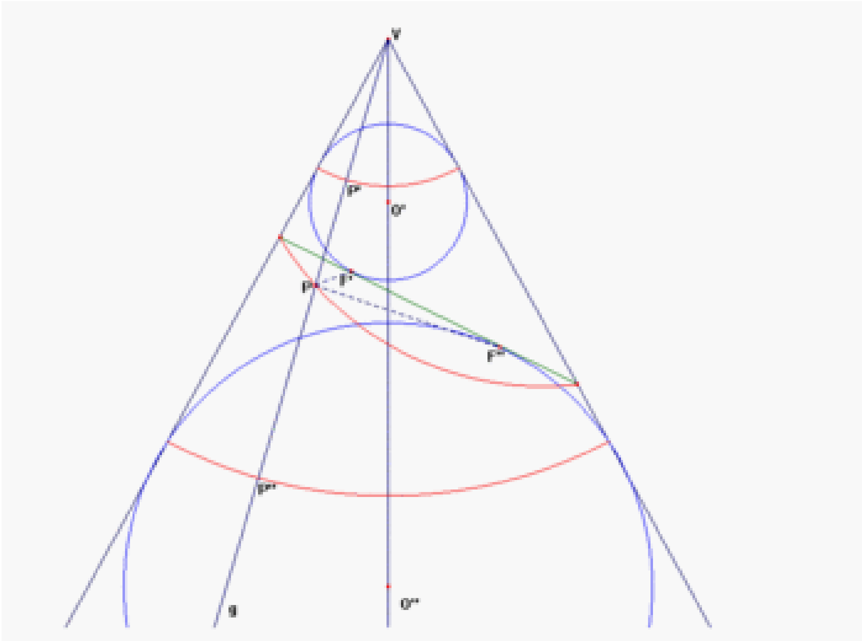
Si osserva però che esiste un'altra sfera con tali caratteristiche e dunque si può enunciare una seconda proposizione:

PROPOSIZIONE 2
Esistono due sfere tangenti internamente al cono.

L'esistenza di questa seconda sfera è abbastanza intuitiva soprattutto se si considera la seguente figura e pertanto ci accontentiamo della figura!



Riprendiamo quindi in considerazione il punto P, citato prima delle proposizioni, appartenente all'intersezione del piano e del cono e consideriamo la generatrice PV (che risulta essere tangente alle due sfere). Ciascuna delle due sfere tocca il piano in un punto. Denotiamo questi due punti con F' e F". Siano inoltre P' e P" i punti di incontro tra la generatrice PV e le due circonferenze di contatto tra il cono e le due sfere, come è illustrato nella seguente figura.



Dalla costruzione, risulta evidente che il punto P è *esterno alle due sfere*. Pertanto i due segmenti PF' e PP' sono uguali, perché segmenti di tangenti condotte da un punto esterno ad una stessa sfera. Analogamente, sarà anche PF"=PP". Sommando membro a membro le due uguaglianze trovate abbiamo la relazione:
PF' + PF" = P'P" = costante

che costituisce, appunto, la definizione dell'ellisse considerata come luogo dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi.

Conclusa la dimostrazione nel caso dell'ellisse, il prof. Broglia osserva che il caso dell'iperbole e quello della parabola possono essere dimostrati in modo analogo. Il docente si limita pertanto a dare qualche indicazione servendosi della figura 1 per il caso dell'iperbole e della figura 2 per il caso della parabola. Invita inoltre i ragazzi a concludere tale dimostrazione a casa e a completarla con la seconda parte ($A \subset B$) di cui fa solo un breve cenno.

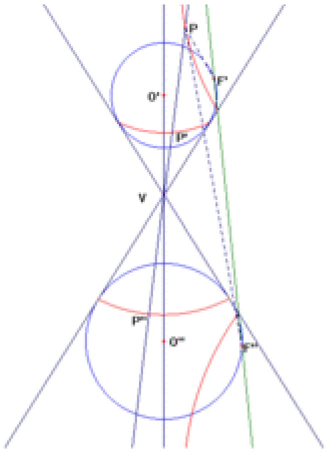


Figura 1

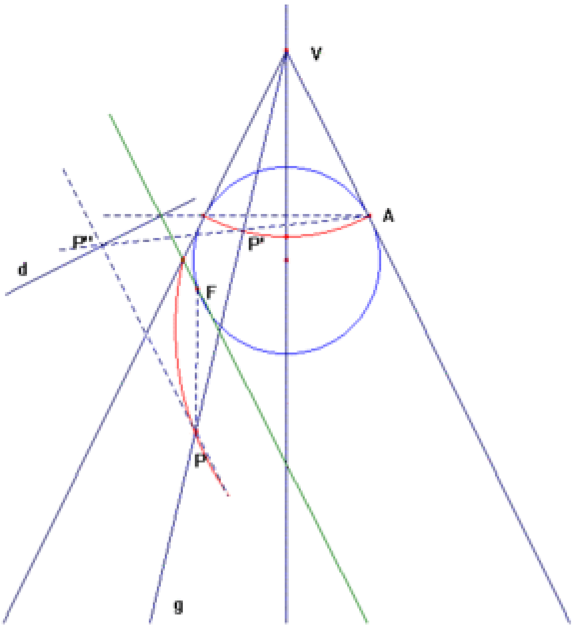
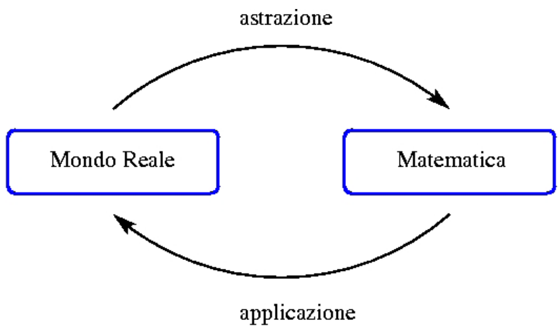


Figura 1

La conferenza

La conferenza è stata tenuta dal prof. Dario Bini, docente di Analisi Numerica presso l'Università di Pisa.
Il prof. ha esordito evidenziando come esistono molti luoghi comuni sulla matematica, come il fatto di vederla come una scienza arida, priva di fantasia, di immaginazione, di completa inutilità, troppo rigida. Invece le caratteristiche per essere un buon matematico sono: fantasia, immaginazione, creatività, libertà di pensiero, attrazione per l'eleganza, attrazione per la singolarità, rigore logico. Il mondo della matematica è molto più vasto del mondo reale.
Il prof. Bini ha sottolineato l'importanza della matematica nella vita di tutti noi e come matematica e realtà siano legate. Infatti nuove idee matematiche permettono di risolvere problemi del mondo reale e nuovi problemi del mondo reale stimolano lo sviluppo di nuove idee matematiche.



Senza la matematica non esisterebbero gran parte della tecnologia che ci circonda quotidianamente come la telefonia mobile, i compressori di mp3, il volo automatico, le risonanze magnetiche. Ma ritroviamo la matematica anche nei modelli statistici (gli exit-pool), nella matematica finanziaria, nella crittografia, cioè la generazione di codici di cui siamo sommersi (bancomat,codici per accedere ad internet, ecc.). Il prof. Bini si è soffermato in particolare sull'utilizzo della matematica nel Web, presentando il problema di Google, cioè il reperimento in ordine di importanza delle pagine web ricercate. Ai ragazzi è stato fatto vedere come questo problema sia risolvibile con un apposito modello matematico. Il prof. Bini ha presentato anche come matematica e fantasia-creatività siano in relazione, illustrando alcuni esempi. Particolarmente interessante è stata la generazione di frattali con l'utilizzo di un apposito software. Il prof. ha sottolineato come i frattali non sono oggetti lontani dalla nostra realtà: le foglie degli alberi, le nuvole, le coste dei territori geografici sono solo alcuni degli esempi che si possono prendere in considerazione. Sono modelli che si possono usare per studiare molti aspetti della realtà.
Gli argomenti trattati sono forse risultati complicati per il livello scolastico del pubblico, ma sono stati sicuramente uno stimolo per i ragazzi più curiosi verso la matematica.

L'incontro con i laureati

Le opportunità di lavoro che offre una Laurea in Matematica sono spesso sottovalutate; l'insegnamento e la ricerca sembrano essere gli unici sbocchi professionali. L'incontro con alcuni giovani laureati in matematica ha fatto conoscere agli studenti delle Scuole Superiori molte possibilità di impiego, alternative a quelle classiche.
L'incontro è stato così strutturato: la prima parte è stata dedicata al racconto dell'esperienza universitaria e lavorativa dei laureati; la seconda agli interventi e alle domande degli studenti, con la partecipazione di alcuni iscritti a Matematica (Tutors nei vari laboratori).

I ragazzi si sono così presentati:

- Valentina insegna con incarichi a tempo determinato da quando ha finito gli studi e la sua ambizione è l'immissione in ruolo. Ha sempre amato questa materia e non potrebbe immaginare un lavoro diverso;
- Samuela si occupa di modelli di ottimizzazione nel settore del trasporto pubblico;
- Anna è un analista programmatore e responsabile di progetti informatici;
- Elena realizza sistemi di sicurezza basati su crittografia in ambito finanziario;
- Lucia è docente a contratto presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università di Siena;
- Jama ricopre il ruolo di analist senior presso il settore Information and Communication Technology presso Netikos (ex Finsiel, ex Tecsiel);
- Claudia è responsabile della "Digitization" nell'area Global Services presso GE Nuovo Pignone (GE - Oil & Gas);
- Giuseppe è assunto presso la Ask com dove si occupa del trattamento di una mole considerevole di dati;
- Mattia lavora presso l'Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia, per lo sviluppo di modelli numerici nella simulazione di fenomeni legati alle eruzioni vulcaniche.

I laureati hanno sottolineato più volte quanto siano stati utili, per il lavoro che svolgono, gli argomenti e le metodologie apprese durante il corso di studi in matematica.
Capacità di astrazione, familiarità con il linguaggio scientifico, elasticità nell'affrontare i problemi, capacità di creare modelli matematici della realtà che si studia e sistemi di ottimizzazione, sono stati utili per affrontare qualsiasi tipo di impiego. Le stesse aziende ricercano laureati in matematica perché posseggono più di altri un'ottima flessibilità sul lavoro, riescono ad affrontare con facilità ruoli differenti e a passare facilmente da un settore ad un altro.
Dall'incontro è emerso inoltre come possa capitare che un giovane laureato in matematica trovi impiego in un'azienda, e poi decida successivamente di passare all'insegnamento; molto meno frequente invece risulta il passaggio inverso.
I ragazzi delle superiori sono rimasti colpiti dalle esperienze raccontate e allo stesso tempo stupiti per la facilità con cui i laureati hanno trovato lavoro in una società, la nostra, che non sembra offrire molte possibilità di impiego.
Dal racconto dell'esperienza universitaria è emerso che, comunque, chi si iscrive a matematica lo deve fare non pensando principalmente ad un lavoro futuro, ma spinto dall'amore per la matematica. Molte saranno le difficoltà e le volte che si uscirà da una lezione con le idee molto confuse senza aver compreso quasi nulla (può accadere anche in altri corsi di laurea), ma tutto ciò non deve spaventare, con un buon lavoro di revisione personale, costante e fatto fin dalle prime lezioni, e l'uso delle ore di ricevimento dei docenti, gli ostacoli possono essere superati.

Alla luce anche delle esperienze personali, o di conoscenti, i laureati e i tutors hanno suggerito che nel dubbio è sempre meglio iscriversi a matematica e poi eventualmente cambiare dopo; molto più difficile è il passaggio contrario.
L'ambiente è cordiale e si possono stringere facilmente amicizie che durino nel tempo.

…o meglio cosa non è successo…..

Mi sembra importante guardare alla Settimana Matematica con gli "occhi" del questionario di valutazione che vuole un po' essere la risposta dei ragazzi a questa iniziativa. Soprattutto se si pensa che tipo di "occhi" abbiamo a disposizione e cioè gli "occhi" dei ragazzi che sono "bravi" a matematica, magari non propriamente tutti intenzionati ad intraprendere un corso di Laurea in Matematica, ma pur sempre ragazzi che solitamente sperimentano una relazione di successo con la materia. Analizzando le risposte alle domande aperte del questionario di valutazione mi sono sembrate molto significative quelle relative alla domanda numero 6):
"Per quale motivo non ti sono piaciute le attività che hai apprezzato meno?".
Alcune risposte (nei laboratori 3 e 5) sono state:
"Perché gli argomenti trattati sono stati un po' troppo complessi per le conoscenze che ho acquisito fino a questo momento e non ho potuto capirli del tutto";
"Perché non avevo la preparazione adeguata per imbattermi in alcuni argomenti trattati";
"Difficoltà nella comprensione degli argomenti trattati";
"Perché alcune cose non le ho capite";
"Perché alcune cose non erano molto chiare".
In modo particolare, riferite alla lezione universitaria:
"Sono state difficili e mi hanno fatto sentire non all'altezza della situazione";
"La lezione universitaria mi è piaciuta, ma poiché non ho solide basi riguardanti le coniche non sono riuscita a seguire molto";
"la lezione universitaria era complessa e la spiegazione troppo veloce".
Queste risposte sono anche in contraddizione con quanto invece evidenziato nelle risposte alla domanda chiusa numero 4) d): "La tua preprazione scolastica era sufficiente per seguire l'attività?" riguardo sempre alla lezione universitaria, dove la maggioranza dei ragazzi (sia nei laboratori 3 e 5 sia negli altri) , afferma di avere una preparazione sufficiente.
Non solo, guardando alle risposte della domanda 4) f)"I docenti sono stati chiari?" la maggior parte sono affermative mentre la lezione direi che è stata molto poco chiara.
Queste osservazioni mi fanno pensare che la maggior parte dei ragazzi non abbiano capito bene né il problema proposto nella lezione né il tipo di argomentazione portata avanti dal professore. E sinceramente questo lo ritengo ancora più preoccupante delle

difficoltà esplicitate da alcuni di loro e riportate sopra, soprattutto perché sono tornati a casa con delle idee sbagliate su quello che hanno ascoltato e su di sé.
Forse anche i ragazzi che hanno raccontato delle loro difficoltà sono tornati a casa con idee sbagliate, nel senso della responsabilità delle difficoltà: dipendevano da loro o da come gli argomenti erano stati trattati, almeno rispetto alla lezione universitaria? Cosa è stato fatto, anzi non è stato fatto per superare queste difficoltà?
Ecco che cosa secondo me non è successo...non c'è stato un "luogo" dove raccogliere e verificare con i ragazzi l'esperienza fatta e neppure, come nel caso della lezione universitaria, se potevano avere gli strumenti per superare le difficoltà incontrate.

...e che invece sarebbe dovuto succedere!

Secondo me sarebbe stato molto più utile per i ragazzi invertire il programma, proponendogli prima la conferenza e poi la lezione universitaria.
Infatti con la conferenza si prova a scardinare quell'immagine statica-strumentale che i ragazzi direi, al momento, inevitabilmente, hanno maturato nel loro percorso scolastico. Non solo, penso che sia molto affascinante(e i risultati del questionario lo rinforzano) vedere cosa ci si può fare con la matematica e vedere cosa e come il "mondo", che molte volte vede i matematici come delle persone in una realtà tutto loro, sfrutta molti risultati matematici nella quotidianità e penso che diventi anche motivante rispetto a quella astrattezza, che ha spaventato molti ragazzi. Nel senso che molti problemi diversi possono essere risolti utilizzando lo stesso modello e più si riesce ad astrarre dalla realtà il problema e più quel tipo di modello potrà essere applicabile ad un maggior numero di situazioni "pratiche". Anche e soprattutto perché la bellezza dell'astrazione in sé, io penso si possa apprezzare solo più avanti nel corso degli studi.
Una volta che i ragazzi hanno apprezzato questo tipo di considerazioni possono "motivare" e comprendere di più una lezione universitaria quale quella del Broglia, contenuto e metodo.
Però, secondo me non ci saremmo dovuti fermare alla lezione universitaria e basta… .nel senso….che senso dare a tutto quello che non è stato compreso? Cosa vogliamo che i ragazzi portino a "casa"? Solo la consapevolezza di aver incontrato delle difficoltà? O in qualche modo dargli e fargli sperimentare gli strumenti che servono per "vincere" di fronte a tali difficoltà?
Ecco perché secondo me sarebbe potuto essere interessante e utile prevedere una prova di lavoro individuale, con rielaborazione della lezione (le famose quattro ore per aggiustare gli appunti presi…), aver modo di riconfrontarsi con il professore poi sui risultati ottenuti, andando ad analizzare cosa e come è stato fatto.

Comunque sarebbe stato interessante pensare ad uno o più momenti in cui tutte le cose che non sono state chiare potevano essere discusse e magari vedere quelle che sono imputabili alla preparazione e alla "bravura" dei ragazzi e quanto invece dipende da come le cose sono state presentate e rielaborate nei vari momenti.
In questo modo mi sembrerebbe più coerente nei confronti dei ragazzi che non "lanciare un sasso, e poi nascondere la mano….."
Anche perché cosa vuol dire avere la passione della matematica, quando in pochi giorni gli abbiamo "distrutto" la loro idea di matematica e quindi quasi a dire che quella passione era per una cosa sbagliata…….? Mi sembrano significativi due commenti alla domanda numero 11): "Dopo questa esperienza, qual è la tua idea riguardo alla possibilità di iscriverti a Matematica?". Una risposta è stata: "**Ci vuole passione per la materia…..avrò quella necessaria?" (**e io aggiungo quella giusta?!)
"**Mi piacerebbe molto iscrivermi ma sono intimorita perché nelle lezioni semplificate del Puglisi, già non ho capito varie cose…figuriamoci dopo!**"
D'altra parte non si può neppure scommettere su un certo percorso solo affidandoci alla fiducia delle parole degli altri (vedi commenti dei laureati….).

E ora cosa succederà?

Sempre con l'intenzione di sfruttare al massimo le informazioni date da un pubblico di qualità come quello della Settimana Matematica, che tipo di conclusioni si possono fare sulle risposte date alla domanda numero 13):"Nell'insegnamento della matematica vorresti che si desse maggiore attenzione a:

- A dare motivazioni delle cose che si studiano
- All'aspetto sperimentale e pratico
- Ad attività in cui gli studenti a gruppi affrontano problemi significativi
- All'aspetto formale
- Ai problemi che hanno ispirato le teorie e gli argomenti che si studiano
- All'inquadramento storico
- Alle ricerche fondamentali più recenti
- Alle relazioni con altre discipline e alle applicazioni tecnologiche
- Alle implicazioni nella vita quotidiana
- Altro…."

I primi quattro classificati (su tutti i laborataori) sono stati:

1. relazioni con altre discipline
2. aspetto sperimentale
3. implicazioni nella vita quotidiana
4. dare motivazioni

mentre il fanalino di coda è "l'aspetto formale", come era facile prevedere.

Queste conclusioni penso che possano essere un buon banco di verifica per la nostra didattica, anche perché ritengo che se avessimo fatto rispondere a questa domanda anche quei ragazzi che invece non presentano interesse per la matematica la risposta sarebbe stata la stessa.
Mi sembra significativo anche il primo posto. Penso che la nostra disciplina ha grandi opportunità di collegamento con molte altre materie che al momento forse sono sfruttate poco, mentre stimolare i ragazzi a vedere le cose da più punti di vista è sempre un'ottima attività di crescita.
Secondo me è molto importante anche il punto 4.: a volte rischiamo di sottovalutare i ragazzi, credendoli non all'altezza di certi tipi di approfondimenti che invece darebbero più senso al lavoro che facciamo in classe. Quindi direi che a volte dovremmo essere più "coraggiosi" e "fiduciosi" in quello che proponiamo in classe…….

Conclusioni

Penso che l'iniziativa della settimana matematica sia una bella occasione per un ragazzo che, di fronte alla scelta universitaria, è incerto se fare matematica o meno, una bella opportunità che sicuramente può favorirli nell'orientamento.
Risposte del questionario somministrato che reputo significative a questo proposito sono:
Valeva la pena partecipare all'esperienza?
101 ragazzi su 125 dicono "Decisamente si", 22 "Più si che no" …Il 98% risponde positivamente.
L'esperienza dello stage ti sarà utile nella scelta dei tuoi studi futuri?
Ben 112 ragazzi si esprimono positivamente, e aquesto proposito ad una domanda aperta qualcuno ha risposto: *"Perché mi hanno dato le risposte che cercavo riguardo a questa facoltà, e mi hanno chiarito molto le idee".*
D'altra parte penso che sia migliorabile soprattutto nella direzione di renderla più "interpretabile" sia dal punto di vista disciplinare sia per quanto riguarda l'esperienza personale di ogni ragazzo.