OLIMPIADI DI FISICA

Senigallia – 21 Aprile 2006

Gara Nazionale: SOLUZIONE della Prova Teorica

PROBLEMA n. 1 – Attenti alla colla!

100 Punti

Quesito n. 1.

Poiché l'attrito è trascurabile, l'energia si conserva. Misurando l'energia potenziale gravitazionale a partire dal piano orizzontale passante per l'asse di rotazione, la legge di conservazione dell'energia si scrive:

$$mg\left(\frac{2}{3}L\cos\theta\right)+\frac{1}{2}m\omega^2\left(\frac{2}{3}L\right)^2-mg\left(\frac{1}{3}L\cos\theta\right)+\frac{1}{2}m\omega^2\left(\frac{1}{3}L\right)^2=\frac{2}{3}L\,mg-\frac{1}{3}L\,mg$$

Semplificando, possiamo ricavare la velocità angolare, ω:

$$\omega=\sqrt{\frac{6g}{5L}(1-\cos\theta)} \tag{1}$$

Quesito n. 2.

Scriviamo la seconda legge della dinamica per la sferetta 1, più lontana dall'asse di rotazione. Poiché le forze che agiscono su di essa sono il peso, $\vec{P}$, e la forza $\vec{F}$ esercitata dall'asta, abbiamo:

$$\vec{P}+\vec{F}=m\vec{a}$$

Scomponendo lungo la direzione radiale e quella tangenziale abbiamo:

$$\begin{cases} mg\cos\theta+F_{\mathrm{r}}=ma_{\mathrm{c}} \\ mg\,\mathrm{sen}\,\theta+F_{\mathrm{t}}=ma_{\mathrm{t}} \end{cases} \tag{2}$$

dove a_{c} e a_{t} indicano rispettivamente la componente centripeta e quella tangenziale dell'accelerazione.

Occupiamoci dapprima della componente radiale. L'accelerazione centripeta risulta:

$$a_{\mathrm{c}}=\omega^2\left(\frac{2}{3}L\right)=\frac{4}{5}g\,(1-\cos\theta)$$

Sostituendo questo valore nella prima delle (2) si ottiene facilmente l'espressione data nel testo:

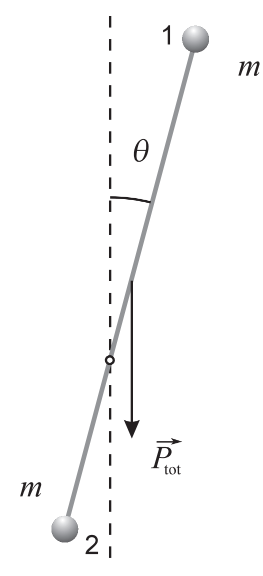
$$F_{\mathrm{r}}=\frac{1}{5}\,mg\,(4-9\cos\theta)$$

Consideriamo ora la componente tangenziale. Il manubrio nel suo complesso è un corpo rigido avente momento d'inerzia:

$$I=m\left(\frac{1}{3}L\right)^2+m\left(\frac{2}{3}L\right)^2=\frac{5}{9}\,mL^2 \tag{3}$$

e il suo peso totale (di modulo $2mg$) può pensarsi concentrato nel centro di massa, la cui distanza dall'asse di rotazione, d, è (v. figura):

$$d=\frac{m(2/3)L-m(1/3)L}{2m}=\frac{1}{6}L \tag{4}$$



L'unica forza esterna, agente sul manubrio, che ha un momento non nullo rispetto all'asse di rotazione è il peso totale. L'equazione della rotazione del manubrio risulta allora:

$$2mg\,d \operatorname{sen}\theta = I\alpha$$

dove α indica l'accelerazione angolare. Usando la (3) e la (4) possiamo ricavare α:

$$\alpha = \frac{3g}{5L}\operatorname{sen}\theta \tag{5}$$

E di conseguenza:

$$a_\mathrm{t} = \alpha\left(\frac{2}{3}L\right) = \frac{2}{5}g\operatorname{sen}\theta \tag{6}$$

Sostituendo la (6) nella seconda delle (2) otteniamo:

$$F_\mathrm{t} = -\frac{3}{5}mg\operatorname{sen}\theta$$

NOTA: Soluzioni alternative per il calcolo di F_t

Scriviamo la componente tangenziale della seconda legge della dinamica per la sferetta 2:

$$-mg\operatorname{sen}\theta + F_\mathrm{t2} = ma_\mathrm{t2} \tag{1'}$$

Poiché la sferetta 2 dista metà della prima rispetto all'asse di rotazione, risulta:

$$a_\mathrm{t2} = \frac{1}{2}a_\mathrm{t} \tag{2'}$$

Inoltre, poiché l'asta ha massa trascurabile, sono trascurabili anche il suo peso e il suo momento d'inerzia. Ne segue che il momento delle forze esterne ad essa applicate dev'essere nullo, e dunque:

$$F_\mathrm{t2} = -2F_\mathrm{t} \tag{3'}$$

Sostituendo la (2') e la (3') nella (1') otteniamo:

$$-mg\operatorname{sen}\theta - 2F_\mathrm{t} = \frac{1}{2}ma_\mathrm{t}$$

Mettendo in sistema questa equazione con la seconda delle (2) è facile ricavare il risultato richiesto.

Un terzo modo per arrivare al risultato richiesto consiste nel ricavare l'espressione (5) dell'accelerazione angolare α derivando rispetto al tempo la velocità angolare, espressa nella (1) in termini dell'angolo θ. Si trova

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\,\omega = \frac{6g\ \operatorname{sen}\theta/(5L)}{2\omega}\omega = \frac{3g}{5L}\ \operatorname{sen}\theta\,.$$

Quesito n. 3.

Possiamo ora ricavare il modulo di $\vec{F}$:

$$F = \sqrt{F_\mathrm{r}^2 + F_\mathrm{t}^2} = \frac{1}{5}mg\sqrt{72\cos^2\theta - 72\cos\theta + 25}$$

Il distacco della sferetta 1 avviene quando

$$\frac{1}{5}mg\sqrt{72\cos^2\theta - 72\cos\theta + 25} = 1.8\,mg$$

ovvero quando:

$$9\cos^2\theta - 9\cos\theta - 7 = 0$$

Questa equazione ha come unica soluzione accettabile:

$$\cos\theta_\mathrm{d} = -0.514 \quad\Rightarrow\quad \theta_\mathrm{d} = 121^\circ$$

Quesito n. 4.

Al momento del distacco della sferetta 1, l'altra sferetta ha una velocità:

$$v_{2,\mathrm{d}} = \omega_{\mathrm{d}} \frac{1}{3} L = \sqrt{\frac{6g}{5L}(1-\cos\theta_{\mathrm{d}})}\,\frac{L}{3} = \sqrt{\frac{2}{15} Lg(1-\cos\theta_{\mathrm{d}})} \tag{7}$$

Anche durante il moto del manubrio "monco" l'energia si conserva. Uguagliando l'energia tra l'istante del distacco e quello dell'inversione del moto abbiamo:

$$-mg\frac{L}{3}\cos\theta_{\mathrm{d}} + \frac{1}{2} m v_{2,\mathrm{d}}^2 = -mg\frac{L}{3}\cos\theta_{\mathrm{i}}$$

Inserendo in questa espressione la (7) e semplificando otteniamo:

$$\cos\theta_{\mathrm{i}} = \frac{1}{5}(6\cos\theta_{\mathrm{d}} - 1) = -0.817 \quad \Rightarrow \quad \theta_{\mathrm{i}} = 145^\circ$$

Il moto della sferetta 2 è dunque un'oscillazione di ampiezza angolare 145°.

Quesito n. 5.

Uguagliando l'energia della sferetta 2 tra l'istante dell'arresto e quello in cui passa per il punto più basso della sua traiettoria (in cui ha la sua massima velocità, $v_{2,\max}$) abbiamo:

$$-mg\frac{L}{3}\cos\theta_{\mathrm{i}} = \frac{1}{2} m v_{2,\max}^2 - mg\frac{L}{3}$$

da cui:

$$v_{2,\max}^2 = \frac{2}{3}\, gL\,(1-\cos\theta_{\mathrm{i}})$$

Scriviamo la seconda legge della dinamica per la sferetta:

$$\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$$

Nel punto considerato i tre vettori hanno un'unica componente radiale, e l'equazione precedente si scrive:

$$F = m\frac{v_{2,\max}^2}{L/3} + mg = (3 - 2\cos\theta_{\mathrm{i}})\, mg = 4.63\, mg$$

Per il terzo principio della dinamica, questo è anche il modulo della forza che la sferetta esercita sull'asta in questa posizione. Siccome l'asta ha massa trascurabile, l'unica altra forza che agisce su di essa è quella esercitata dal vincolo, e la risultante delle due forze dev'essere nulla. Se ne deduce che la forza che il vincolo esercita sull'asta è anch'essa di $4.63\, mg$, e dunque il rapporto richiesto è 4.63.

PROBLEMA n. 2 Zig-zagando...

50 Punti

Quesito n. 1.

Si considerino 10 spostamenti consecutivi a partire da un punto qualsiasi, per esempio, dalla posizione indicata con il numero 1. Una misura della loro lunghezza in quadretti, avendo stimato il quarto di quadretto, e trasformata nella loro scala effettiva è riportata nella tabella sottostante.

Prima posizione utilizzata: n. 1

Posizione	Spostamento n.	lunghezza in figura (quadretti)	lunghezza effettiva ℓ (μm)	ℓ^2 ($\mu\mathrm{m}^2$)
1	-	-	-	
2	1	3.25	10.40	108.16
3	2	1.25	4.00	16.00
4	3	3.00	9.60	92.16
5	4	2.75	8.80	77.44
6	5	3.50	11.20	125.44
7	6	4.00	12.80	163.84
8	7	2.25	7.20	51.84
9	8	1.50	4.80	23.04
10	9	1.75	5.60	31.36
11	10	1.50	4.80	23.04
				$\Sigma\,\ell^2 = 712.3 \times 10^{-12}\,\mathrm{m}^2$

Lo spostamento quadratico medio vale $\langle\, \ell^2 \,\rangle = \Sigma\, \ell^2/10 = 71.23 \times 10^{-12}\,\mathrm{m}^2$.

Sostituendo $\langle\, \ell^2 \,\rangle$ e $\Delta t = 30\,\mathrm{s}$ nella formula di Einstein, si ottiene una stima del Numero di Avogadro

$$\mathcal{N}_A = \frac{R\,T\,\Delta t}{\pi\eta a\,\langle\, \ell^2 \,\rangle} = 6.3 \times 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}\,.$$

Quesito n. 2.

L'incertezza sperimentale della misura dipende dall'imprecisione della lettura degli spostamenti nel grafico e dall'errore statistico.

Nella soluzione precedente il primo tipo di errore ($\delta_{\,\mathrm{lett}}$) è stato assunto dell'ordine di 1/4 di quadretto. Questa incertezza, legata alla determinazione della posizione nel reticolato di ciascun punto considerato, è essenzialmente casuale e produce un errore relativo variabile da un minimo del 6 % (1/4 di quadretto su uno spostamento di 4.00 quadretti in tabella) ad un massimo del 20 % (1/4 di quadretto su uno spostamento di 1.25 quadretti in tabella).

Circa l'errore statistico ($\delta_{\,\mathrm{stat}}$) si deve tener presente che la relazione $\langle\, \ell^2 \,\rangle = 6D\,\Delta t$ vale a condizione che $\langle\, \ell^2 \,\rangle$ sia calcolato su un gran numero di spostamenti della particella, e quindi l'incertezza dipende dal fatto che il numero di spostamenti utilizzati nel calcolo è finito e in realtà piccolo (10). Tale incertezza può essere stimata ripetendo la serie di misure diverse volte su diverse sequenze di spostamenti con lo stesso numero di punti. Secondo l'analisi statistica degli errori, per un insieme di n misure ripetute, la migliore stima della grandezza – della quale l'insieme delle misure prese rappresenta un campione – è data dalla media aritmetica e la migliore stima dell'incertezza dalla deviazione standard della media.

Possono essere trascurate altre cause di incertezza (come i valori delle costanti di partenza, la non perfetta conformità dell'immagine, e così via) che in questo contesto sono certamente trascurabili rispetto a $\delta_{\,\mathrm{lett}}$ e $\delta_{\,\mathrm{stat}}$. Fra queste ultime, se una di esse risulta molto minore dell'altra, può essere anche trascurata; in caso contrario, trattandosi di due incertezze di natura casuale e non sistematica, e concettualmente indipendenti l'una dall'altra, una stima complessiva dell'incertezza δ di misura può essere data da

$$\delta = \sqrt{\delta^2_{\,\mathrm{lett}} + \delta^2_{\,\mathrm{stat}}}\,.$$

PROBLEMA n. 3 – Pierino in laboratorio

100 Punti

Quesito n. 1.

La forza prodotta sullo ione dai campi – elettrico e magnetico – e la sua accelerazione sono, in termini vettoriali:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{q}{m}(E\,\hat{\imath} - v_z B\,\hat{\imath} + v_x B\,\hat{k}\,)$$

Il modulo dell'accelerazione è quindi

$$a = \frac{q}{m}\sqrt{(E - v_z B)^2 + v_x^2 B^2}$$

Quesito n. 2.

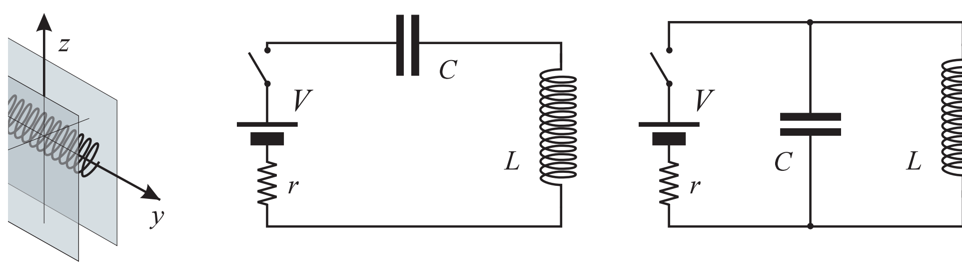
Perché il moto sia uniforme deve essere nulla l'accelerazione; nell'espressione precedente si deve imporre

$$v_x = 0, \qquad v_z = E/B \quad \text{mentre} \quad v_y \quad \text{può essere qualsiasi.}$$

La minima energia cinetica si ha per $v_y = 0$ cioè quando la particella si muove ortogonalmente sia ad $\vec{E}$ che a $\vec{B}$

Quesito n. 3.

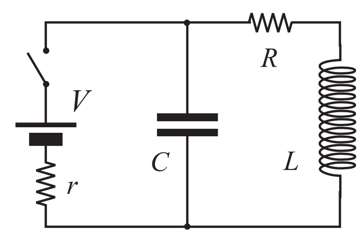
Tracciata una terna di assi cartesiani ortogonali, le due piastre del condensatore devono essere parallele al piano $y - z$ e l'asse del solenoide parallelo all'asse y. Poiché si vuole che in una stessa regione spaziale siano presenti entrambi i campi, si hanno due alternative: alloggiare il solenoide tra le armature del condensatore oppure inserire il condensatore nella parte interna del solenoide; con le condizioni poste nel testo del problema è possibile realizzare solo la prima disposizione, come mostrato nella figura seguente, a sinistra.



Quesito n. 4.

La configurazione in serie (al centro nella figura precedente) consente di caricare il condensatore, ma la corrente a regime è nulla (e di conseguenza $B = 0$); quella in parallelo (a destra) consente una corrente di regime non nulla e costante nel solenoide: di conseguenza la f.e.m. indotta è nulla ed essendo nulla la resistenza del solenoide sono nulle sia la d.d.p. che la carica sul condensatore (quindi $E = 0$).

Quesito n. 5.



Per fare in modo che a regime il condensatore sia carico mentre scorre corrente nel solenoide occorre comunque modificare uno dei due circuiti con l'aggiunta di un resistore. La cosa si può fare in due modi: nel circuito "serie" (al centro) si deve aggiungere il resistore in parallelo al condensatore; nel circuito "parallelo" (a destra) lo si deve aggiungere in serie all'induttanza. Il circuito usato è quello mostrato in figura.

Comunque, in entrambi i modi, a regime, la corrente nel solenoide è

$$I = \frac{V}{R + r} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 V N}{(R + r)\,\ell}$$

e la d.d.p. sul condensatore è uguale a quella ai capi della resistenza R, ovvero

$$V_C = RI = V\frac{R}{R+r} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{VR}{(R+r)\,d}$$

La velocità (minima se diretta lungo l'asse z) risulta quindi

$$v = \frac{E}{B} = \frac{R\,\ell}{\mu_0\,d\,N}\ ; \quad \text{notare che è indipendente da } V.$$

Quesito n. 6.

Invertendo la relazione precedente e sostituendo i dati del problema si ha

$$R = \frac{\mu_0\,d\,N\,v}{\ell} = 1.00\,\mathrm{k\Omega}$$

Quesito n. 7.

Si può osservare che, con i valori dati, $r \ll R$ e dunque porre nelle espressioni precedenti $R + r \approx R$.

L'energia dissipata dalla resistenza è quella immagazzinata a regime nel circuito; è data dalla somma di due termini relativi al condensatore e all'induttanza:

$$U = U_{\rm el} + U_{\rm m} = \frac{1}{2}C\,V^2 + \frac{1}{2}LI^2 \quad \text{dove} \quad C = \varepsilon_0\frac{S}{d}, \quad L = \mu_0\frac{\pi a^2 N^2}{\ell} \quad \text{e} \quad I = \frac{V}{R}$$

da cui

$$U_{\rm J} = \frac{1}{2}\,V^2\left(\frac{\varepsilon_0 S}{d} + \frac{\mu_0 \pi a^2 N^2}{\ell\,R^2}\right) = 0.24\,\mu\mathrm{J}$$

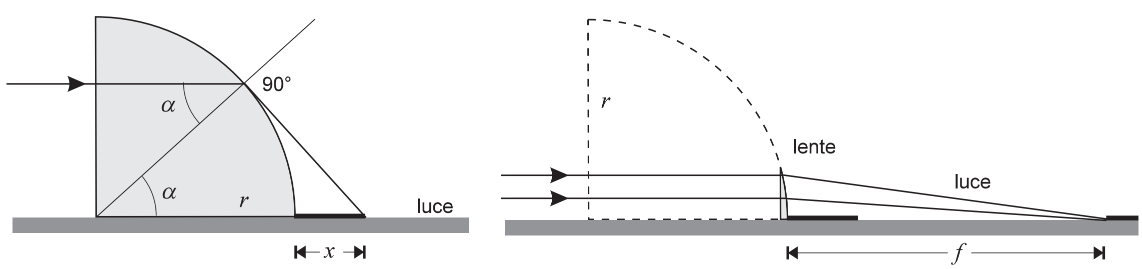
PROBLEMA n. 4 – Luci e ombre

50 Punti

La luce che incide sulla faccia verticale la attraversa senza essere deviata, a qualunque altezza. Essa incide quindi orizzontalmente sulla superficie curva. La normale a questa superficie ha semplicemente la direzione radiale.

Quesito n. 1.

Si consideri un raggio di luce che incide sulla superficie curva ad un'altezza $r\,\mathrm{sen}\,\alpha$, quindi con un angolo di incidenza α (vedi figura, a sinistra). Per i valori di α più elevati si ha riflessione totale, e la luce, dopo riflessioni multiple, va a cadere sotto il cilindro. Per valori di α al di sotto del valore limite per riflessione totale, la luce emerge deviata verso il basso e quindi incide sul tavolo. Quanto minore è α, tanto minore è la deviazione verso il basso e tanto più lontano avviene l'incidenza sul piano del tavolo, come si evidenzia anche nello studio di una caustica.



Si tratta quindi di trovare l'angolo limite per riflessione totale $\alpha_{\rm lim}$. Esso è dato da $\mathrm{sen}\,\alpha_{\rm lim} = 1/n$. Il raggio di luce uscente è tangente alla superficie e, detta x la distanza, chiesta dal problema, fra il bordo posteriore del cilindro e la posizione di incidenza di tale raggio sulla superficie del tavolo, si ha (vedi ancora la figura a sinistra) che $(r + x)\cos\alpha_{\rm lim} = r$.

Sostituendo, si ha che $\quad x = r\left(\dfrac{n}{\sqrt{n^2-1}} - 1\right) \quad$ da cui $\quad x = 1.71\,\mathrm{cm}$.

Quesito n. 2.

Per valori decrescenti di α al di sotto di α_{lim} si ha un progressivo allontanarsi del punto di incidenza, e l'incidenza più distante si deve avere per valori molto piccoli di α.

Per valori molto piccoli possiamo considerare la porzione di prisma attraversata come: una lastra a facce piane e parallele (che non influenza la direzione dei raggi luminosi ortogonali ad essa) più una lente piano–convessa che per α sufficientemente piccoli possiamo considerare sottile (vedi figura, a destra).

Si tratta allora di trovare la distanza focale f di questa lente, che al limite risulta posizionata proprio sul bordo posteriore del cilindro. Per una lente sottile, dall'equazione dei costruttori di lenti si ricava

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{r}, \quad \text{ovvero} \quad f = 10\,\text{cm}.$$

La luce incide quindi sul tavolo in una fascia compresa fra 1.71 e 10.0 cm di distanza dal bordo posteriore del cilindro.

NOTA: Soluzione alternativa del Quesito 2

Per trovare il punto di incidenza più distante possibile, si deve trovare tale posizione per α molto piccolo, cioè si può calcolare il punto di incidenza di un generico fascio corrispondente ad un angolo α, eseguendo il passaggio al limite per $\alpha \to 0$.

Per α sufficientemente piccoli (cioè trascurando i termini in α^2 e superiori negli sviluppi in serie delle funzioni trigonometriche coinvolte) il punto di incidenza del fascio sulla superficie curva del cilindro si trova ad un'altezza $r \operatorname{sen}\alpha \approx r\alpha$ dal piano del tavolo, sulla verticale del bordo posteriore del cilindro (cioè a distanza dall'asse pari a $r\cos\alpha \approx r$). L'angolo di rifrazione è (per la legge di Snell, passando al limite) $\operatorname{arcsen}(n \operatorname{sen}\alpha) \approx n\alpha$ e quindi l'angolo fra tale raggio e la superficie del tavolo è $n\alpha - \alpha = (n-1)\alpha$.

La distanza x dal bordo del cilindro, a cui il raggio rifratto incide sul tavolo, è fornita dalla relazione

$$r\alpha = x\tan[(n-1)\alpha] \approx x(n-1)\alpha, \quad \text{quindi} \quad x = \frac{r}{n-1} = 10\,\text{cm},$$

come si era ottenuto con la soluzione precedente.

Materiale prodotto dal gruppo

PROGETTO OLIMPIADI

Segreteria Olimpiadi Italiane della Fisica

presso Liceo Scientifico "U. Morin"

VENEZIA MESTRE

fax: 041.584.1272

e-mail: olifis@libero.it

La Gara Nazionale è realizzata con il sostegno di

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Comune di Senigallia

Liceo Scientifico "E. Medi" di Senigallia

Zanichelli editore

PROBLEMA n. 2 Zig-zagando...

50 Punti

Misure di tutti gli spostamenti in figura.

Nella tabella seguente sono riportati tutti i valori del Numero di Avogadro, ottenuti a partire da successive posizioni iniziali.

Posizione	Spostamento n.	lunghezza (quadretti)	lunghezza effettiva ℓ(μm)	ℓ^2 (μm^2)	$\Sigma\ell^2$ (μm^2)	$\mathcal{N}_A$ $10^{23}\,mol^{-1}$
1	-	-	-	-		
2	1	3.25	10.400	108.16		
3	2	1.25	4.0000	16.000		
4	3	3.00	9.6000	92.160		
5	4	2.75	8.8000	77.440		
6	5	3.50	11.200	125.44		
7	6	4.00	12.800	163.84		
8	7	2.25	7.2000	51.840		
9	8	1.50	4.8000	23.040		
10	9	1.75	5.6000	31.360		
11	10	1.50	4.8000	23.040	712.32	6.27
12	11	2.25	7.2000	51.840	656.00	6.08
13	12	4.00	12.800	163.84	803.84	5.56
14	13	3.25	10.400	108.16	819.84	5.45
15	14	2.25	7.2000	51.840	794.24	5.62
16	15	3.00	9.6000	92.160	760.96	5.87
17	16	1.50	4.8000	23.040	620.16	7.20
18	17	3.50	11.200	125.44	693.76	6.44
19	18	1.25	4.0000	16.000	686.72	6.50
20	19	1.25	4.0000	16.000	671.36	6.65
21	20	2.75	8.8000	77.440	725.76	6.15
22	21	1.00	3.2000	10.240	684.16	6.53
23	22	1.00	3.2000	10.240	530.56	8.41
24	23	1.00	3.2000	10.240	432.64	10.3
25	24	4.00	12.800	163.84	544.64	8.20
26	25	2.50	8.0000	64.000	516.48	8.65
27	26	2.50	8.0000	64.000	557.44	8.01
28	27	1.75	5.6000	31.360	463.36	9.64
29	28	2.25	7.2000	51.840	499.20	8.95
30	29	3.75	12.000	144.00	627.20	7.12
31	30	4.00	12.800	163.84	713.60	6.26
32	31	1.50	4.8000	23.040	726.40	6.15
33	32	2.25	7.2000	51.840	768.00	5.82
34	33	3.00	9.6000	92.160	849.92	5.26
35	34	2.50	8.0000	64.000	750.08	5.95

Posizione	Spostamento n.	lunghezza (quadretti)	lunghezza effettiva ℓ (μm)	ℓ^2 (μm^2)	$\Sigma\ell^2$ (μm^2)	$\mathcal{N}_A$ $10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$
36	35	2.25	7.2000	51.840	737.92	6.05
37	36	4.50	14.400	207.36	881.28	5.07
38	37	2.00	6.4000	40.960	890.88	5.01
39	38	5.25	16.800	282.24	1121.3	3.98
40	39	3.25	10.400	108.16	1085.4	4.11
41	40	2.25	7.2000	51.840	973.44	4.59
42	41	0.75	2.4000	5.7600	956.16	4.67
43	42	0.50	1.6000	2.5600	906.88	4.93
44	43	3.75	12.000	144.00	958.72	4.66
45	44	0.75	2.4000	5.7600	900.48	4.96
46	45	1.50	4.8000	23.040	871.68	5.12
47	46	5.25	16.800	282.24	946.56	4.72
48	47	2.25	7.2000	51.840	957.44	4.66

Il Numero di Avogadro ottenuto facendo la media dei 47 valori di ℓ^2 fornisce il risultato

$$\mathcal{N}_A = 5.89 \times 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}\,.$$