Associazione per l'Insegnamento della Fisica

Progetto Olimpiadi

OLIMPIADI DI FISICA 2006

10 Febbraio 2006

Gara di 2° Livello – SOLUZIONE dei QUESITI

Quesito n.1

La massa di Babbo Natale è – come il peso – 2/3 di quella della slitta, cioè $m = 80\,\text{kg}$.

Siano X e x le posizioni del centro di massa della slitta e di Babbo Natale quando questi è appena salito; detto s lo spostamento (all'indietro) della slitta, le posizioni finali saranno rispettivamente $X - s$ e $x + d - s$.

Sul sistema slitta+Babbo Natale non agiscono forze esterne non equilibrate, quindi il centro di massa rimane fermo:

$$\frac{MX + mx}{M + m} = \frac{M(X - s) + m(x + d - s)}{M + m} \quad \Rightarrow \quad -Ms + m(d - s) = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{m}{M + m}\,d = 1.12\,\text{m}$$

Quesito n.2

Trascurando i tempi di accelerazione e frenata, e trattando quindi i moti come uniformi, la differenza dei tempi è data da

$$\Delta t = \left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_1}\right)\Delta s = \left(\frac{1}{70\,\text{km/h}} - \frac{1}{100\,\text{km/h}}\right) 2\,\text{km} = 0.00857\,\text{h} = 30.9\,\text{s} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 100\,\frac{\Delta t}{T} = 100\,\frac{30.9\,\text{s}}{2280\,\text{s}} \approx 1.4\,\%$$

Come si vede il risparmio di tempo è irrisorio e non vale certo il rischio corso.

Quesito n.3

La minima quantità di acqua è certamente quella per cui il ghiaccio fonde completamente ma la temperatura finale dell'acqua resta quella del punto di fusione. Detto Q il calore scambiato,

$$Q = m_\text{a}\,c_\text{a}\,(T_\text{a} - T_\text{fin}) = \lambda_\text{f}\,m_\text{g} + m_\text{g}\,c_\text{g}(T_\text{fin} - T_\text{g}) \quad \Rightarrow \quad m_\text{a} = \frac{\lambda_\text{f} - c_\text{g}\,t_\text{g}}{c_\text{a}\,t_\text{a}}\,m_\text{g}$$

avendo indicato con t la temperatura in scala centigrada ed essendo $t_\text{fin} = 0°\text{C}$.

La minima quantità di acqua necessaria si ottiene adesso scegliendo il massimo valore della temperatura dell'acqua allo stato liquido, cioè 100°C. Si ottiene $m_\text{a} = 26.6\,\text{g}$

Quesito n.4

Immergendo il piccolo oggetto l'acqua determina su questo una spinta verso l'alto (forza di Archimede) e quindi, per il terzo principio il corpo determina sull'acqua una spinta verso il basso; di conseguenza il piatto della bilancia scende e si porta un po' più in basso.

Quesito n.5

Tutte le facce si comportano come condensatori piani in parallelo; poiché lo spessore è costante questo equivale ad un unico condensatore che ha per superficie la superficie totale del parallelepipedo.

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} S}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}\, 2(2a^2 + 4a^2 + 8a^2)}{\delta} = \frac{28\, \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}\, a^2}{a/1000} = 2.8 \times 10^4\, \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}\, a = 79\,\mathrm{nF}$$

Notare che se si usasse il valore della superficie interna della scatola, invece di quella esterna, si otterrebbe un risultato coincidente entro le incertezze usuali (2 cifre significative corrette).

Quesito n.6

Il coefficiente β di dilatazione termica (volumica, trattandosi di un liquido) è definito – per una stessa massa di liquido – dall'equazione

$$V(T) - V(T_0) = V(0°\mathrm{C})\, \beta\, (T - T_0)$$

ovvero, in modo equivalente, utilizzando la temperatura centigrada t e indicando con il pedice 0 le grandezze a 0°C

$$V(t) = V_0\, (1 + \beta\, t)\ .$$

Detta m la massa di una generica quantità di liquido e ρ_0 la sua densità a 0°C, si ha:

$$\frac{m}{\rho(t)} = \frac{m}{\rho_0}\, (1 + \beta\, t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho(t)} = \frac{1}{\rho_0}\, (1 + \beta\, t)$$

Se adesso si fissa il volume, V, si ottiene una relazione sulle masse contenutevi in funzione della temperatura:

$$\frac{V}{m(t)} = \frac{V}{m_0}\, (1 + \beta\, t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m(t)} = \frac{1}{m_0}\, (1 + \beta\, t) \quad \text{da cui} \quad \beta = \frac{m_0 - m(t)}{m(t)\, t} = 0.00111\,\mathrm{K}^{-1}\ .$$

Non è da considerare corretto il valore $0.00104\,\mathrm{K}^{-1}$ che discende dal considerare come valore di riferimento quello a 60°C, né quello $-0.00104\,\mathrm{K}^{-1}$ che discende dal considerare la diminuzione della massa invece dell'aumento di volume.

Quesito n.7

L'energia di un fotone è data da $\varepsilon = h\nu = hc/\lambda$; a 500 nm è $\varepsilon = 3.98 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

In un secondo i fotoni corrispondenti alla sensibilità oculare sono

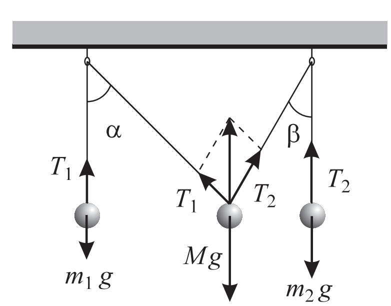
$$\frac{(20.7 \times 10^{-18}\,\mathrm{W})\,(1\,\mathrm{s})}{3.98 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}} = 52$$

e quindi in 60 ms i fotoni sono circa 3. Questo significa che quando l'occhio è bene adattato al buio si ha un impulso nervoso dalla retina in media ogni tre fotoni in arrivo.

Quesito n.8

Come mostrato in figura, dal diagramma delle forze applicato alla palla di massa M si ottiene

$$\begin{cases} T_1 = m_1 g \\ T_2 = m_2 g \\ T_1 \operatorname{sen}\alpha = T_2 \operatorname{sen}\beta \\ T_1 \cos\alpha + T_2 \cos\beta = Mg \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m_2 = \sqrt{2}\, m_1 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, m_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, m_2 = M \end{cases}$$



da cui

$$\begin{cases} m_2 = \dfrac{2}{\sqrt{3}+1}\, M = \left(\sqrt{3} - 1\right)\, M = 22.0\,\mathrm{g} \\ m_1 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\, M = 15.5\,\mathrm{g} \end{cases}$$

Quesito n.9

La risonanza, ovvero un'onda stazionaria in un tubo aperto ad una estremità, avviene quando la lunghezza della colonna d'aria è pari ad un multiplo dispari di un quarto di lunghezza d'onda: $h = n\lambda/2 + \lambda/4 = (2n+1)\lambda/4$, con n intero, per cui il valore minimo è

$$h = \lambda/4 \quad \Rightarrow \quad v = \lambda\,\nu = 4h\,\nu = 4\,(7.0 \times 10^{-2}\,\mathrm{m})\,(1.2 \times 10^{3}\,\mathrm{s}^{-1}) = 336\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,.$$

Quesito n.10

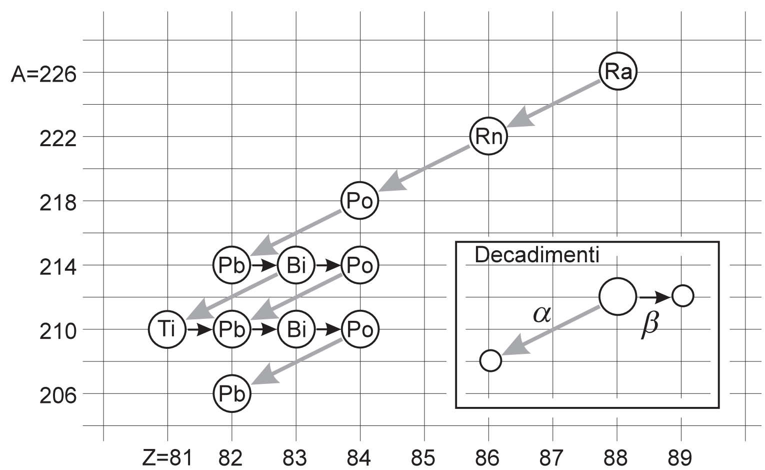
Il decadimento α (emissione di un nucleo di elio ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$) modifica il numero di massa (A) e il numero atomico (Z) dell'isotopo, facendo diminuire il primo di 4 unità e il secondo di 2 unità; il decadimento β (emissione di un elettrone), invece, modifica solo il numero atomico, facendolo aumentare di 1 unità.

Pertanto il numero N_α di decadimenti coinvolti nel processo sarà

$$N_\alpha = \frac{\Delta A}{A_\alpha} = \frac{226 - 206}{4} = 5\,.$$

Dopo 5 processi di disintegrazione α il numero atomico sarà diminuito di 10 unità, mentre la differenza di numero atomico tra il radio ed il piombo è $88 - 82 = 6$. Dunque saranno necessari 4 processi di disintegrazione β.

In figura sono rappresentate nel piano (A, Z) due possibili catene di decadimenti dal radio all'isotopo stabile del piombo.



Materiale prodotto dal gruppo

PROGETTO OLIMPIADI

Segreteria Olimpiadi Italiane della Fisica

presso Liceo Scientifico "U. Morin"

VENEZIA MESTRE

fax: 041.584.1272

e-mail: `olifis@libero.it`

OLIMPIADI DI FISICA 2006

10 Febbraio 2006

Gara di 2° Livello – SOLUZIONE dei PROBLEMI

PROBLEMA n. 1 – Una trave come bilancia.

Quesito n. 1.

Basta imporre l'equilibrio dei momenti rispetto al punto di sospensione (cosicché la forza vincolare incognita si cancella)

$$F_{\mathrm{el}}\,\frac{L}{3} = Mg\,\frac{L}{6} \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{el}} = \frac{Mg}{2} = \frac{kh}{2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{Mg}{h} \approx 7.2\,\mathrm{kN/m}$$

Quesito n. 2.

L'equilibrio delle forze, limitatamente alla componente verticale, dà invece

$$R = F_{\mathrm{el}} + Mg = \frac{3}{2}Mg = 5.4\,\mathrm{kN}$$

Quesito n. 3.

Se la molla può essere trattata come verticale si allunga, rispetto alla posizione di equilibrio, di un ulteriore tratto z dato da

$$k\left(\frac{h}{2} + z\right)\frac{L}{3} = Mg\,\frac{L}{6} + 2mg\,\frac{L}{3} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{(M+4m)g}{2k} - \frac{h}{2} = \frac{(1+4m/M)h}{2} - \frac{h}{2} = \frac{2m}{M}\,h$$

Se lo spostamento rispetto all'equilibrio precedente è z all'estremo della molla risulta il doppio sull'altro estremo:

$$d = 2z = \frac{4m\,h}{M} = \frac{h}{5} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{M}{20} = 18\,\mathrm{kg}$$

Il peso del bambino è quindi di circa 180 N.

PROBLEMA n. 2 – Una lente e due immagini.

Quesito n. 1.

La lente è convergente perché una singola lente divergente produce un'immagine virtuale di una sorgente al finito, che non può essere raccolta su uno schermo.

Quesito n. 2.

La distanza minima $p+q$ fra sorgente e immagine, con una lente convergente, si ha quando $p = q = 2f$ ed è quindi pari a 4 volte la distanza focale. Per qualsiasi valore di f inferiore a un quarto della distanza fra sorgente e immagine è possibile la formazione di immagini in due posizioni simmetriche rispetto al punto mediano, quindi per la situazione descritta è sufficiente che

$$f < \frac{120\,\mathrm{cm}}{4} = 30\,\mathrm{cm}\,.$$

Approccio alternativo più formale:

Se la distanza fra sorgente e lo schermo è d, e la lente interposta deve formare un'immagine sullo schermo, è $p+q=d$. L'equazione dei punti coniugati

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \tag{1}$$

si può allora scrivere

$$f = \frac{p(d-p)}{d}\,.$$

Il valore di p non può essere minore di f, perché altrimenti il fascio uscente dalla lente sarebbe divergente e non formerebbe un'immagine reale, né maggiore di $d-f$ perché altrimenti sarebbe $q<f$, cosa impossibile perché implicherebbe un fascio convergente da una sorgente puntiforme. Per entrambi questi valori $f=0$; occorre quindi trovare un massimo intermedio.

Per trovare il valore di p per cui f ha un massimo si può scrivere l'equazione precedente nella forma

$$f = -\frac{1}{d}\left(p^2 - dp\right) = -\frac{1}{d}\left[\left(p - \frac{d}{2}\right)^2 - \frac{d^2}{4}\right]$$

che è l'equazione di una parabola con la concavità rivolta in basso e il vertice per $p = d/2$; alternativamente se ne può calcolare la derivata: $df/dp = 0$ implica nuovamente che $p = d/2$.

Il valore di f per $p = d/2$ è $f = d/4$ e quindi il valore massimo della distanza focale è 30 cm.

Quesito n. 3.

A causa della simmetria fra p e q dell'equazione dei punti coniugati (1) le due soluzioni si devono ottenere scambiando p e q, e poiché l'ingrandimento è q/p, il rapporto dimensionale fra le due immagini dev'essere $(q/p)^2$. Quindi $q/p = 3$ o $1/3$; per cui le due posizioni con cui si ha immagine nitida corrispondono a $p = 30\,\mathrm{cm}$, $q = 90\,\mathrm{cm}$ oppure a $p = 90\,\mathrm{cm}$, $q = 30\,\mathrm{cm}$.

Usando l'equazione precedente si ottiene che $f = 22.5\,\mathrm{cm}$.

Approccio alternativo più formale:

Detta d la distanza fra sorgente e schermo, le posizioni in cui si forma l'immagine devono soddisfare a

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{d-p} = \frac{1}{f} \quad \text{da cui} \quad p(d-p) = fd\,. \quad \text{Risolvendo l'equazione, si ha}$$

$$p = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 4fd}}{2}\,, \quad \text{cui corrisponde} \quad q = d - p = \frac{d \mp \sqrt{d^2-4fd}}{2}$$

Il rapporto di ingrandimento nei due casi è

$$I_1 = \left.\frac{q}{p}\right|_1 = \frac{d - \sqrt{d^2-4fd}}{d + \sqrt{d^2-4fd}} \quad \text{e} \quad I_2 = \left.\frac{q}{p}\right|_2 = \frac{d + \sqrt{d^2-4fd}}{d - \sqrt{d^2-4fd}}$$

e quindi il rapporto dimensionale fra le due immagini è

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\left(d + \sqrt{d^2-4fd}\right)^2}{\left(d - \sqrt{d^2-4fd}\right)^2} = 9 \quad \text{da cui}$$

$$d + \sqrt{d^2-4fd} = 3\left(d - \sqrt{d^2-4fd}\right) \quad \Rightarrow \quad 2d = 4\sqrt{d^2-4fd} \quad \Rightarrow \quad d^2 = 4d^2 - 16fd \quad \Rightarrow$$

$$f = \frac{3}{16}\,d = 22.5\,\mathrm{cm}\,.$$

Quesito n. 4.

Poiché il rapporto dimensionale fra le due immagini è $1 : 9$, il rapporto delle rispettive aree è $1 : 81$. Inoltre la luce che incide sulla lente (di dimensioni fisse), e quindi concorre alla formazione dell'immagine, è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dalla sorgente. Quando l'immagine è più piccola la lente si trova a distanza tripla dalla sorgente e quindi riceve solo $1/9$ della luce che riceve nell'altro caso. Per cui il rapporto degli irradiamenti (potenza/area) è

$$\frac{1/9}{1/81} = 9\,.$$

PROBLEMA n. 3 – Carica di un condensatore.

Quesito n. 1.

La carica sul condensatore, alla fine, è $Q = CV = 2.4\,\mathrm{C}$ e il tempo necessario

$$T = Q/I = 4.8\,\mathrm{s}$$

Quesito n. 2.

La d.d.p. ai capi del filo è costante e pari a $V_R = RI = 3.75\,\mathrm{V}$ mentre quella ai capi del condensatore è $V_C = 6\,\mathrm{V}$. La potenza erogata è quindi

$$W_G = (V_R + V_C)I_0 = 4.37\,\mathrm{W}$$

Quesito n. 3.

L'energia dissipata per effetto Joule è alla fine $U_J = RI_0^2\,T = 9\,\mathrm{J}$. Quella immagazzinata nel condensatore è $U_C = {}^1\!/_2\,CV^2 = 14.4\,\mathrm{J}$.

Dunque la frazione richiesta è

$$\eta = \frac{U_C}{U_C + U_J} = 0.62 \quad\Rightarrow\quad 62\,\%$$

Quesito n. 4.

Chiamando i la corrente di carica del condensatore, deve essere $i \geq \eta I_0$, con $\eta = 0.97$.

All'istante iniziale il condensatore è scarico per cui $V_\mathrm{C} = 0$; dunque si può scrivere subito l'espressione della corrente i (partitore di corrente)

$$i = \frac{R_\mathrm{G}}{R_\mathrm{G} + R} I_0 \geq \eta I_0 \quad\Rightarrow\quad R_\mathrm{G} \geq \frac{\eta R}{1-\eta} = 242\,\Omega$$

Materiale prodotto dal gruppo

PROGETTO OLIMPIADI

Segreteria Olimpiadi Italiane della Fisica

presso Liceo Scientifico “U. Morin”

VENEZIA MESTRE

fax: 041.584.1272

e-mail: olifis@libero.it

⇒ Materiale riservato alla Commissione ⇐

PROBLEMA 1 – Una trave come bilancia.

GRIGLIA DI VALUTAZIONE :		Totale Punti 20	
1	*Costante elastica*	**8**	
1.a	Equilibrio dei momenti		5
1.b	Espressione della costante elastica		2
1.c	Valore numerico		1
2	*Forza vincolare*	**6**	
2.a	Equilibrio delle forze		3
2.b	Espressione della forza vincolare		2
2.c	Valore numerico		1
3	*Peso del bambino*	**6**	
3.a	Nuova condizione di equilibrio		3
3.b	Espressione del peso del bambino		2
3.c	Valore numerico		1

PROBLEMA 2 – Una lente e due immagini.

GRIGLIA DI VALUTAZIONE :		Totale Punti 20	
1	*Caratteristica della lente*	**3**	
1.a	Affermazione che è convergente		1
1.b	Corretta motivazione		2
2	*Focale massima della lente*	**3**	
2.a	Minima distanza schermo–sorgente come $4f$ oppure dimostrazione		2
2.b	Valore di $f_{\max}$		1
3	*Distanza focale della lente*	**8**	
3.a	Espressione dell'ingrandimento lineare q/p		2
3.b	Rapporto q/p ricavato da considerazioni di simmetria per poi ottenere f, oppure risoluzione dell'equazione per f		5
3.c	Valore numerico di f		1
4	*Rapporto di irradiamento*	**6**	
4.a	Calcolo del rapporto fra le aree		2
4.b	Calcolo del rapporto fra le potenze sulla lente		3
4.c	Valore numerico		1

PROBLEMA 3 – Carica di un condensatore.

GRIGLIA DI VALUTAZIONE :		Totale Punti 20
1	*Tempo necessario*	**3**
1.a	Espressione della carica, usando la capacità del condensatore	1
1.b	Espressione del tempo	1
1.c	Valore numerico corretto	1
2	*Potenza erogata*	**6**
2.a	Determinazione della carica a metà tempo	1
2.b	Determinazione della d.d.p. ai capi del condensatore	1
2.c	D.d.p. ai capi della resistenza (Legge di Ohm)	1
2.d	Determinazione della d.d.p. ai capi del generatore	1
2.e	Espressione della potenza	1
2.f	Valore numerico corretto	1
3	*Frazione di energia nel condensatore*	**7**
3.a	Energia del condensatore carico	1
3.b	Potenza dissipata per effetto Joule	2
3.c	Energia dissipata per effetto Joule	1
3.d	Energia totale erogata	1
3.e	Determinazione della frazione richiesta	1
3.f	Valore numerico corretto	1
4	*Stima della resistenza interna*	**4**
4.a	Espressione della corrente di carica	2
4.b	Soluzione formale	1
4.c	Valore numerico corretto	1

Materiale prodotto dal gruppo

PROGETTO OLIMPIADI
Segreteria Olimpiadi Italiane della Fisica
presso Liceo Scientifico "U. Morin"
VENEZIA MESTRE
fax: 041.584.1272
e-mail: olifis@libero.it