XXII OLIMPIADE ITALIANA DI MATEMATICA

Cesenatico, 5 maggio 2006

SOLUZIONI

1. Rosa e Savino fanno il seguente gioco con le carte napoletane (40 carte numerate da 1 a 10 di 4 semi diversi): inizialmente si dividono le 40 carte (20 per ciascuno), poi a turno appoggiano sul tavolo una carta. Quando alcune delle carte presenti sul tavolo hanno dei valori la cui somma fa esattamente 15, queste carte vengono eliminate dal gioco (se ci sono più modi di ottenere somma 15, il giocatore che ha appoggiato l'ultima carta decide quali sono le carte con somma di valori uguale a 15 da eliminare). Alla fine della partita sono rimaste 2 carte in mano a Savino (un 5 ed un 3), una carta sul tavolo (un 9) e una carta in mano a Rosa. Qual è il valore della carta di Rosa?

Soluzione: Rosa ha un 8.
La somma dei valori di tutte le carte del gioco è $\frac{10 \cdot 11}{2} \cdot 4 = 220$.
La somma di quelle eliminate è un multiplo di 15 (vengono tolte a gruppi con somma pari a 15).
Indicando con x il valore della carta di Rosa si ha:

$$220 = 15k + 5 + 3 + 9 + x,$$

quindi $203 - x$ deve essere un multiplo di 15. Poichè $1 \leq x \leq 10$, l'unica possbilità è $x = 8$.

2. Determinare tutti i valori di m, n, p tali che $p^n + 144 = m^2$, dove m ed n sono interi positivi e p è un numero primo.

Soluzione: I valori possibili di (m, n, p) sono $(13, 2, 5)$, $(20, 8, 2)$ e $(15, 4, 3)$.

Riscriviamo l'equazione nella forma $p^n = m^2 - 144 = (m + 12)(m - 12)$. Poiché gli unici divisori di p^n sono potenze di p, l'equazione è equivalente al sistema

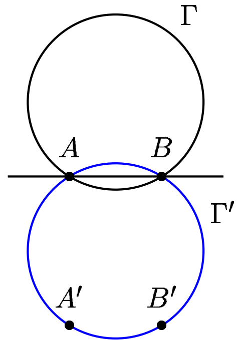
$$\begin{cases} m + 12 = p^a \\ m - 12 = p^b \end{cases}$$

dove a e b sono numeri naturali tali che $a > b \geq 0$ e $a + b = n$. Sottraendo la seconda equazione dalla prima, si ottiene

$$24 = p^b(p^{a-b} - 1).$$

Se $b = 0$, quest'ultima equazione diventa $24 = p^a - 1$, da cui si ricava immediatamente la soluzione $p = 5,\ n = 2,\ m = 13$.
Se invece $b > 0$, poiché p^b divide $24 = 2^3 \cdot 3$, allora $p = 2$ o $p = 3$. Inoltre, poiché p non divide $p^{a-b} - 1$, $p^b = 8$ o $p^b = 3$. Sostituendo, si trovano le altre due soluzioni $p = 2,\ n = 8,\ m = 20$ e $p = 3,\ n = 4,\ m = 15$.

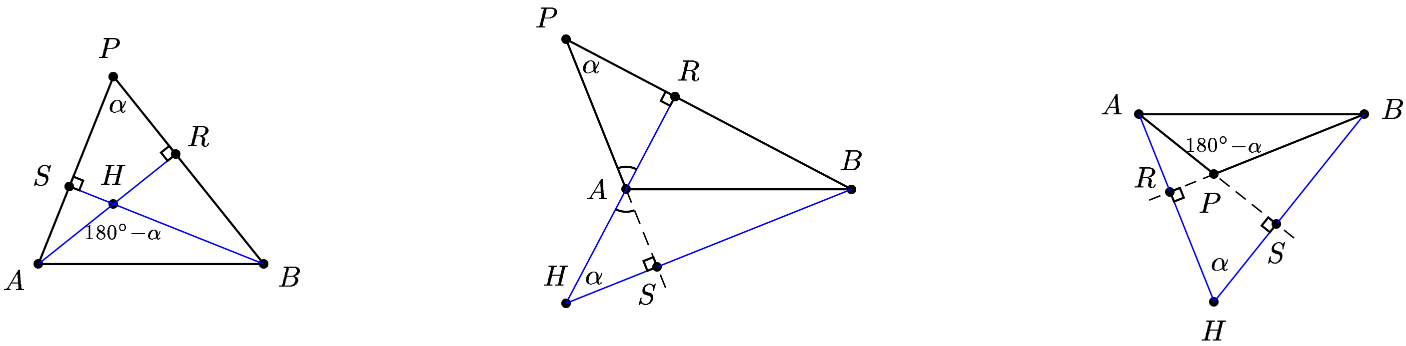
3. Sia Γ una circonferenza e siano A e B due punti distinti di Γ non diametralmente opposti. Sia P un punto variabile in Γ diverso da A e da B e sia H l'ortocentro del triangolo ABP. Determinare il luogo descritto da H al variare di P.



Sia Γ' la circonferenza simmetrica di Γ rispetto ad AB, e siano A' e B' i 2 punti di Γ' per cui AA' e BB' sono perpendicolari ad AB. Dimostreremo che il luogo richiesto è costituito dalla circonferenza Γ' meno i punti A' e B'.
Consideriamo il più lungo dei 2 archi di Γ delimitati da A e B, e sia α l'angolo sotto cui i punti di tale arco vedono il segmento AB. Con riferimento alla figura qui sopra, per dimostrare che H appartiene a Γ' ci basta dunque dimostrare che H sta al di sopra della retta AB e $A\widehat{H}B = 180° - \alpha$, oppure che H sta al di sotto della retta AB e $A\widehat{H}B = \alpha$.
Indichiamo ora con R ed S i piedi delle altezze condotte da A e B, rispettivamente, e distinguiamo vari casi.

- *Caso 1*: P sta al di sopra di AB e APB è acutangolo (figura a sinistra). In questo caso H sta sopra la retta AB e da un esame del quadrilatero $PSHR$, in cui ci sono 2 angoli retti, si ha che $A\widehat{H}B = S\widehat{H}R = 180° - \alpha$.
- *Caso 2*: P sta al di sopra di AB e APB è rettangolo. In questo caso H coincide banalmente con A o B.

- *Caso 3*: P sta al di sopra di AB e APB è ottusangolo in A (figura centrale). In questo caso H sta al di sotto di AB. Inoltre i triangoli ARP e ASH sono rettangoli ed hanno gli angoli in A opposti al vertice. Ne segue che $A\widehat{H}B = A\widehat{P}B = \alpha$. Un discorso del tutto analogo vale se APB è ottusangolo in B.
- *Caso 4*: P sta al di sotto di AB (figura a destra). In questo caso APB è ottusangolo in P e $A\widehat{P}B = 180° - \alpha$. Anche in questo caso H sta al di sotto di AB e da un esame del quadrilatero $PRHS$, in cui ci sono 2 angoli retti, si ottiene che $A\widehat{H}B = \alpha$.



Viceversa, sia H un qualunque punto di Γ'. Definiamo P come l'ortocentro di ABH. Con un ragionamento del tutto analogo al precedente (in cui semplicemente si scambiano i ruoli di Γ e Γ', nonché di P ed H) si ha che P appartiene a Γ, ed è diverso da A e B purché H sia diverso da A' e B'. Poiché P è l'ortocentro di ABH, per una nota proprietà abbiamo che a sua volta H è l'ortocentro di ABP. Questo dimostra che ogni punto di Γ' meno i punti A' e B' appartiene al luogo richiesto.

Osservazione

La prima parte è sostanzialmente equivalente al classico risultato secondo il quale il simmetrico dell'ortocentro rispetto ad un lato giace sulla circonferenza circoscritta. Dando per buono questo enunciato si ha immediatamente che il simmetrico di H rispetto ad AB giace su Γ, dunque H giace sul simmetrico di Γ rispetto ad AB, che è proprio Γ'.

Seconda soluzione

Indichiamo con C il punto su Γ diametralmente opposto a B. Essendo BC un diametro, l'angolo $C\widehat{A}B$ è retto: ne segue che le rette PH e CA sono parallele, in quanto entrambe perpendicolari ad AB. Per lo stesso motivo, anche $C\widehat{P}B$ è retto, dunque anche CP e AH sono parallele, in quanto entrambe perpendicolari a PB.

Ne segue che $AHPC$ è un parallelogramma, e perciò $PH = AC$ per ogni P in Γ. Inoltre PH ha sempre direzione perpendicolare ad AB, e quindi il vettore $\overrightarrow{PH}$ è costante.

Da ciò si deduce che il luogo richiesto è dato dalla circonferenza Γ', che è la traslata di Γ per il vettore $\overrightarrow{PH} \equiv \overrightarrow{CA}$, meno i traslati di A e B, che sono proprio A' e B'.

Terza soluzione

Indichiamo con O e r il centro e il raggio della circonferenza Γ. Determiniamo dapprima l'insieme formato dai baricentri G_P dei triangoli ABP quando P percorre Γ. Sia M il punto medio di AB. Allora G_P è dato dall'immagine di P mediante l'omotetia di centro M e rapporto $\frac{1}{3}$. Pertanto l'insieme dei punti G_P forma la circonferenza Γ' di centro O' e raggio $\frac{r}{3}$, dove O' è il punto del segmento OM tale che $MO' = \frac{1}{3}MO$ (e privata dei due punti che corrispondono ad A e B sotto l'omotetia). A questo punto, per ottenere l'insieme cercato si tratta di operare su Γ' l'omotetia di centro O e rapporto 3. Infatti, in ogni triangolo il baricentro G divide il segmento avente come estremi l'ortocentro H e il circocentro C in due parti tali che $GH = 2GC$, e nel nostro caso i triangoli ABP hanno tutti il medesimo circocentro O, che è fissato. Pertanto si ottiene la circonferenza Γ'' (privata di due punti) avente raggio r e centro nel punto O'', dove O'' è il punto sulla semiretta di origine O e passante per M, posto a distanza $2OM$ da O. In altre parole, Γ'' è la circonferenza simmetrica di Γ rispetto a M, privata di due punti.

4. Su una scacchiera infinita i numeri interi positivi sono scritti in ordine lungo una spirale: si parte da 1 e si procede allargandosi girando in senso antiorario, come in figura.
Chiamiamo "semiretta destra" della scacchiera l'insieme delle caselle formato da una casella C e da tutte le caselle che si trovano nella riga di C e a destra di C.

17	16	15	14	13
18	5	4	3	12
19	6	1	2	11
20	7	8	9	10
21	22	23	24	25

(a) Dimostrare che esiste una semiretta destra le cui caselle non contengono numeri multipli di 3.

(b) Determinare se esistono infinite semirette destre, a 2 a 2 disgiunte, le cui caselle non contengono numeri multipli di 3.

SOLUZIONE: Per la domanda (a) basta considerare la semiretta destra con estremo nella casella centrale (quella che contiene 1). Sia infatti a_n l'n-esimo numero a destra di 1. Partendo da a_n e spostandoci di $n-1$ caselle verso il basso e di una casella a sinistra troviamo il quadrato di $2n-1$; poiché in questo percorso troviamo numeri consecutivi, abbiamo

$$a_n = (2n-1)^2 + n = 4n^2 - 3n + 1 = 3(n^2 - n) + (n^2 + 1).$$

Se n è multiplo di 3, di sicuro n^2+1 non lo è. Se n non è multiplo di 3, si può scrivere nella forma $3m \pm 1$ per un opportuno m, e quindi $n^2 + 1 = 9m^2 \pm 6m + 2$ non è multiplo di 3. In conclusione, n^2+1 non è mai un multiplo di 3, dunque neanche a_n lo è.

Per la domanda (b), dimostriamo che esistono infinite semirette destre della scacchiera, a 2 a 2 disgiunte, le cui caselle non contengono numeri multipli di 3. Consideriamo infatti le semirette destre con estremo in 1^2, 7^2, 13^2, $\ldots$, e cioè in un numero del tipo $(6k+1)^2$.

È evidente che tali semirette sono a 2 a 2 disgiunte. Inoltre, con un ragionamento del tutto analogo al precedente, si vede che l'n-esimo numero a destra di $(6k+1)^2$ è dato dalla formula

$$(6k + 2n - 1)^2 + n = (6k)^2 + 12k(2n-1) + 3(n^2 - n) + (n^2 + 1),$$

dunque è un multiplo di 3 più una quantità, n^2+1, che abbiamo già dimostrato non essere mai multipla di 3.

5. Si consideri la disuguaglianza

$$(x_1 + ... + x_n)^2 \geq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1).$$

(a) Determinare per quali $n \geq 3$ è vera per ogni possibile scelta di numeri reali positivi $x_1, \ldots, x_n$.

(b) Determinare per quali $n \geq 3$ è vera per ogni possibile scelta di numeri reali $x_1, \ldots, x_n$.

SOLUZIONE: Dimostreremo che la disuguaglianza

- è vera per ogni scelta $x_1, \ldots, x_n$ di numeri reali positivi se e solo se $n \geq 4$;
- è vera per ogni scelta $x_1, \ldots, x_n$ di numeri reali se e solo se $n = 4$.

Suddividiamo la dimostrazione in vari passi.

Passo 1. Dimostriamo che per $n = 3$ la disuguaglianza è falsa, anche per terne di numeri reali positivi.

Ponendo infatti $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, il termine di sinistra è uguale a 9 mentre quello di destra è uguale a 12.

Passo 2. Per $n = 4$ la disuguaglianza è vera per ogni scelta di numeri reali x_1, x_2, x_3, x_4 (positivi, negativi o nulli).

Svolgendo infatti il quadrato e portando tutto al primo membro otteniamo la disuguaglianza

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_4 - 2x_4x_1 + 2x_1x_3 + 2x_2x_4 \geq 0,$$

e cioè

$$(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 \geq 0,$$

che è banalmente sempre vera.

Passo 3. Per ogni $n \geq 5$ esiste almeno una scelta $x_1, \ldots, x_n$ di numeri reali (non tutti positivi) per cui la disuguaglianza è falsa.

Ponendo infatti $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = -2$, $x_5 = \ldots = x_n = 0$ il termine di sinistra si annulla, mentre il termine a destra è uguale a 4.

Passo 4. Per ogni $n \geq 4$ la disuguaglianza è vera per ogni scelta $x_1, \ldots, x_n$ di numeri reali positivi.

Dimostriamo questo fatto per induzione su n. Supponiamo che la tesi sia vera per $n \geq 4$ e dimostriamola per $n+1$. Siano $x_1, \ldots, x_{n+1}$ numeri reali positivi. Osserviamo che la disuguaglianza non cambia se permutiamo ciclicamente i numeri $x_1, \ldots, x_{n+1}$, e pertanto possiamo supporre che x_1 sia un numero maggiore o uguale a tutti gli altri. Dalla disguguaglianza per n termini otteniamo

$$\begin{aligned}(x_1 + \cdots + x_{n-1} + (x_n + x_{n+1}))^2 &\geq 4(x_1x_2 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1} + \\ &\quad +x_{n-1}(x_n + x_{n+1}) + (x_n + x_{n+1})x_1) \\ &= 4(x_1x_2 + \cdots + x_nx_{n+1} + x_{n+1}x_1) + 4y\end{aligned}$$

dove $y = x_{n-1}x_{n+1} + x_n(x_1 - x_{n+1}) > 0$ per la nostra ipotesi su x_1. La disuguaglianza è dimostrata.

6. Alberto e Barbara si sfidano al seguente gioco: inizialmente su un tavolo ci sono alcune pile di gettoni (il numero di gettoni può variare da pila a pila). A turno, partendo da Alberto, uno dei due giocatori fa una e una sola delle seguenti mosse:

- o toglie un gettone da una pila a sua scelta e lo elimina dal gioco;
- oppure suddivide una pila in due pile più piccole, ognuna di almeno un gettone (senza aggiungere o togliere gettoni dal tavolo).

Vince chi toglie l'ultimo gettone dal tavolo. Determinare, a seconda del numero di pile presenti sul tavolo all'inizio e di quanti gettoni contengono, quale dei due giocatori ha una strategia vincente.

Soluzione: Supponiamo innanzitutto che si parta da una situazione in cui c'è almeno un gettone presente sul tavolo, altrimenti il gioco non può nemmeno iniziare.

Siano $C_0, C_1, C_2, \ldots$ le combinazioni di pile presenti all'inizio del gioco, dopo la prima mossa, dopo la seconda mossa, eccetera. Per ogni combinazione C_i sia r_i il numero di pile che hanno un numero di gettoni $a_1, a_2, \ldots, a_{r_i}$ maggiore di 1 ed s_i il numero di pile che hanno un gettone. Sia poi $m_i = (a_1 - 1) + \cdots + (a_{r_i} - 1)$. Dimostriamo che Barbara ha una strategia vincente se m_0 ed s_0 sono entrambi pari e che Alberto ha una strategia vincente in tutti gli altri casi. La strategia vincente è quella di lasciare all'avversario ad ogni mossa una combinazione C_i tale che m_i ed s_i siano entrambi pari.

Infatti, osserviamo che se un giocatore si trova di fronte ad una combinazione in cui m_i ed s_i sono entrambi pari, ogni sua mossa deve portare ad una combinazione in cui almeno uno fra m_{i+1} ed s_{i+1} è dispari. Viceversa, supponiamo che un giocatore si trovi di fronte ad una combimazione in cui m_i ed s_i non sono entrambi pari:

- se m_i è pari ed s_i è dispari, può eliminare una pila con 1 gettone;
- se m_i è dispari ed s_i è pari, può eliminare un gettone da una pila con almeno 3 gettoni (se esiste), oppure dividere una pila con 2 gettoni in due pile con un gettone;
- se m_i ed s_i sono entrambi dispari, può dividere una pila con $a \geq 3$ gettoni (se esiste) in due pile con $a-1$ ed 1 gettone, oppure può togliere un gettone da una pila che ne contenga 2.

In tutti i casi, il giocatore riesce a riproporre una combinazione in cui m_{i+1} ed s_{i+1} sono entrambi pari.

Poiché durante il gioco si può lasciare invariato il numero di gettoni presenti sul tavolo al massimo m_0 volte, il gioco certamente finisce e chiaramente la vittoria andrà a colui che riesce a proporre la combinazione C_n in cui $m_n = s_n = 0$, entrambi pari.

Soluzione alternativa: Sia s_i il numero di pile con un solo gettone ed m_i il numero di pile con un numero pari di gettoni. Anche con questa definizione Barbara ha una strategia vincente se e solo se s_0 ed m_0 sono pari, e la strategia vincente consiste nel lasciare sempre all'avversario una configurazione in cui s_i ed m_i sono pari. Infatti se un giocatore si trova di fronte ad una combinazione in cui s_i ed m_i sono pari, ogni sua mossa porta ad una combinazione in cui almeno uno tra s_{i+1} ed m_{i+1} è dispari. Viceversa, se un giocatore si trova di fronte ad una combinazione in cui s_i ed m_i non sono entrambi pari, muovendo come indicato precedentemente riesce a riproporre una configurazione in cui s_{i+1} ed m_{i+1} sono entrambi pari.