

# VII GARA NAZIONALE A SQUADRE

Gara del pubblico – 6 maggio 2006

## Istruzioni Generali

- ★ Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- ★ Se la quantità richiesta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato, si indichi la sua parte intera.
- ★ Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- ★ Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.

## Scadenze importanti

- ★ **10 minuti dall'inizio:** termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista).
- ★ **30 minuti dall'inizio:** termine ultimo per fare domande sul testo.
- ★ **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.

## 1. Una pausa di svago

[15]

Tra una lezione e l'altra, i nostri amici Hardy, Hermita e Ron si divertono con le parole crociate. Aiutateli a risolvere il cruciverba, sapendo che lo schema contiene tutte e sole le cifre da 1 a 9. Qual è il numero contenuto nella colonna in grigio (letto dall'alto verso il basso)?

1		2
3		

### Orizzontali:

1. Un quadrato.
3. Un numero la cui somma delle cifre è 9.

### Verticali:

1. Un cubo.
2. Un numero con cifre solo pari.

## 2. Impostori svelati

[40]

Spesso ci si chiede come sia possibile riconoscere un matemago da un *matebbano*, cioè qualcuno a digiuno di matematica. Spesso è più semplice di quanto si creda. Un matebbano non saprebbe mai trovare il più grande valore di  $x$  per cui

$$\sqrt[3]{x+1184} - \sqrt[3]{x-1184} = 4.$$

## 3. Rapporti burrascosi

[35]

Gli studenti di matematica della Scuola Matematica Superiore sono divisi in cinque case: *Rapportareo*, *Partimmaginario*, *Perognesiste*, *Inclusionesclusione* e *Righecompasso*. Le case sono a due a due alleate oppure nemiche. Ogni alleata di una casa nemica è anche nemica. In quanti differenti modi possono essere i mutui rapporti tra le cinque case?

## 4. La prima prova

[60]

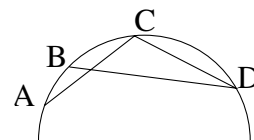
Finalmente è giunto il gran giorno del torneo TreAngoli. I concorrenti sono messi di fronte alla prima prova: determinare il minimo valore di

$$\frac{4a^3}{b} + \frac{b+1}{a}$$

al variare di  $a > 0$  e  $b > 0$  numeri reali.

**5. Questione di posizioni****[ 40 ]**

Per far riuscire gli incantesimi di gruppo in geomanzia è necessario essere piuttosto precisi nel collocarsi al posto giusto. Hardy, Ron e i suoi due fratelli, Henri e Smale, si posizionano nei punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  che sono, nell'ordine, su una circonferenza come in figura.



Sappiamo che  $AC = CD = 10\sqrt{5}$  e che  $BC = 5\sqrt{5}$ . Detto  $E$  il piede della perpendicolare da  $C$  a  $BD$ , si ha  $CE = 10$ . Determinare  $AB$ .

**6. Seduttore da strapazzo****[ 35 ]**

Ron ha scoperto l'altra metà del cielo, le ragazze! La sua passione è la più bella della scuola di matemaghi: Chiara, della casa di *Righecompasso*.

Il numero della camera di Chiara è pari al coefficiente del termine  $x^{2006}$  del polinomio

$$(1+x)^2(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)^3(1+x^{16})(1+x^{32})^4(1+x^{64})(1+x^{128})(1+x^{256})(1+x^{512})(1+x^{1024}).$$

In quale camera della casa di *Righecompasso* dovrebbe entrare Ron?

**7. Allenamento di Quamditch****[ 20 ]**

In un allenamento di Quamditch, la leggiadra Hermita Lagrange sta studiando una figura molto difficile: vuole risalire lentamente a elica (cioè prendendo quota in maniera regolare mentre gira lungo la superficie laterale di un cilindro immaginario), in modo che la sua scopa percorra una distanza complessiva di 2006 metri in esattamente 15 giri, risalendo in tutto di un numero intero di metri. Per giunta vuole che la circonferenza del cilindro sia lunga un numero intero di metri. Quanto può valere (se esiste) questo numero?

**8. Meritate vacanze****[ 80 ]**

Per lunga tradizione, il numero di giorni di vacanza straordinaria della Scuola Matematica Superiore viene deciso ogni anno solare in base ad una antica tradizione. Esso è sempre un numero compreso tra 1 e 9, e nell'anno  $n$  deve corrispondere all'ultima cifra diversa da zero del fattoriale di  $5^n$  (che viene fatta calcolare alle matricole in una apposita cerimonia). Quanti giorni di vacanza ci saranno nei prossimi quattro anni? Rispondere un numero le cui quattro cifre siano nell'ordine i giorni di vacanza degli anni dal 2006 al 2009.

**9. Il torneo TreAngoli****[ 45 ]**

Negli anni che hanno almeno 36 divisori, la Scuola Matematica Superiore organizza il torneo TreAngoli. Dalla sua fondazione nell'anno 1006, fino a quest'anno, il 2006, in quali anni si è organizzato il torneo? Rispondere con la somma di tali anni.

**10. Alla lezione di pozioni****[ 65 ]**

Durante la lezione di pozioni, Hardy e il suo amico Ron Perelman devono scegliere due ingredienti sui 36 disponibili e mischiarli nella speranza di ottenere una pozione con qualche proprietà. La loro amica Hermita gli ha detto che se i primi due ingredienti non hanno effetto conviene riprovare con altri due (cambiandoli entrambi): può capitare che anche in questo caso non ottenga nulla, ma allora – lo assicura – mischiando un ingrediente da ciascuna coppia (in qualunque modo) si otterrà per forza una pozione utile. Quante sono come minimo le combinazioni di due ingredienti che danno una pozione utile?

**11. Un espediente truffaldino****[ 15 ]**

Fracto Malpoysto odia perdere! Decide allora di truccare un comune dado con un incantesimo, che si basa sugli otto numeri magici del dado. Questi si ottengono, a partire da ognuno dei vertici, sommando i numeri scritti sulle tre facce che vi concorrono.

L'incantesimo consiste nel disporre accuratamente i numeri da 1 a 6 sulle facce del dado in modo che la differenza tra il numero magico massimo ed il numero magico minimo sia la più piccola possibile.

Trovare la disposizione, indicando in ognuna delle 4 cifre, ordinatamente da sinistra a destra, il numero che si trova opposto a 1, quello opposto a 2, poi a 3 e infine a 4.

**12. La squadra di Quamditch****[40]**

Hardy, il capitano della squadra di Quamditch della casa di *Rapportareo* deve decidere la rosa dei nove giocatori della squadra di Quamditch della sua casa.

Quanti sono i sottoinsiemi non vuoti di  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  tali che la somma degli elementi sia multipla di 3?

**13. L'esame di divinazione****[70]**

La preparatissima Hermita ha appena superato, con facilità, l'esame di divinazione, nonostante la predizione di radici sia, a detta di Hardy e Ron, un argomento piuttosto ostico.

Si trattava di calcolare la radice quinta di 107 187 643 912 857 507, sapendo che è un intero di 4 cifre e che la terza cifra (contando da destra verso sinistra) è 5. Qual è la soluzione?

**14. La seconda prova****[50]**

Per i concorrenti al torneo TreAngoli sopravvissuti alla prima prova, è ora tempo di affrontare il secondo quesito. Essi devono determinare il resto della divisione intera tra  $4 \cdot 7^{23} + 3^{11}$  e 101. Qual è?

**15. La finale di Quamditch****[60]**

Nella finale scolastica di Quamditch, si scontrano le squadre di *Rapportareo* e *Partimmaginata*. Per decidere il possesso della palla Hardy, il capitano di *Rapportareo*, e Fracto, il capitano di *Partimmaginata*, fanno il seguente gioco: tirano entrambi un normale dado. Se il numero sul dado di Hardy è maggiore di quello di Fracto, allora la palla tocca a *Rapportareo*. Se i numeri sono uguali, allora la palla tocca a *Partimmaginata*. Se infine il numero di Fracto è il più grande, allora si ripete il gioco a parti invertite.

Calcolare la probabilità che la palla tocchi a *Rapportareo*. Esprimere il risultato come somma del numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

**16. Uno schema di Quamditch****[25]**

Hardy, il capitano della squadra di Quamditch della casa di *Rapportareo*, istruisce i suoi compagni di squadra su un nuovo schema di gioco che ha elaborato.

Se si considera nello spazio l'insieme  $Q$  dei punti che hanno coordinate intere e comprese tra 0 e 10 (inclusi), quanti cubi esistono con gli spigoli paralleli agli assi cartesiani e con i vertici appartenenti a  $Q$ ?

**17. Situazione di pericolo****[40]**

A seguito dell'intrusione nel castello della Scuola Matematica Superiore dei seguaci di *Colui-che-non-può-essere-dimostrato*, tutte le parole d'ordine per entrare nelle case della scuola sono cambiate.

Non appena Hardy, Ron e Hermita tentano di entrare nella casa di *Rapportareo*, il fantasma di guardia chiede loro quanti sono gli insiemi formati da interi consecutivi e la cui somma sia un miliardo. Quale risposta bisogna dare per entrare?

**18. La bella ingannatrice****[40]**

Ron è ormai completamente cotto di Chiara, la bella della scuola. La bella Chiara sa che Ron è piuttosto debole in Aritmologia, cosicché per prendersi gioco di lui gli dà appuntamento presso una delle sale del castello.

Il numero della sala è pari al denominatore minimo possibile tra tutte le frazioni la cui scrittura decimale contiene un periodo di esattamente quattro cifre, tutte distinte.

Presso quale sala dovrebbe andare Ron?

**19. Alla lezione di divinazione****[10]**

Il povero Ron è stato bendato e l'insegnante di divinazione ha scritto una formula alla lavagna. Sapendo che nell'espressione compaiono solo cifre 2 e segni di moltiplicazione, e che il risultato ha quattro cifre ed è il massimo possibile, che risposta dovrebbe dare Ron?

**20. Difesa contro la matemagia oscura** [25]

Lezione di gruppo al corso di difesa contro la matemagia oscura! Dodici studenti, indicati ordinatamente con  $S_1, S_2, \dots, S_{12}$ , si dispongono ai vertici di un dodecagono regolare. Se si tracciano i segmenti  $S_1S_6$ ,  $S_5S_{10}$  e  $S_9S_2$ , si formano quattro triangoli. Sia  $A$  l'area del triangolo centrale e  $B$  la somma delle aree degli altri tre. Si calcoli  $1000A/B$ .

**21. Matricole ambiziose** [20]

Le matricole della Scuola Matematica Superiore sono destinate alla loro casa di appartenenza a seconda delle loro attitudini matematiche. Quest'anno, per entrare nell'ambito casa di *Rapportareo*, era necessario trovare la somma di tutti i razionali positivi che, ridotti ai minimi termini, hanno la forma  $\frac{a}{30}$ , e che sono minori di 10. Che risposta hanno dato le matricole di *Rapportareo*?

**22. Una condanna da evitare** [10]

I seguaci di *Colui-che-non-può-essere-dimostrato*, accaniti sostenitori di una matemagia oscura e piena di contraddizioni, sono alla sbarra!

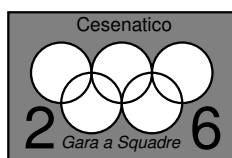
Anche domande semplici possono rivelare le loro distorte conoscenze matematiche. Ad esempio, il giudice ha chiesto quanti sono gli interi positivi strettamente maggiori di 9 le cui cifre in base 10 sono strettamente crescenti da sinistra verso destra. Cosa si deve rispondere per evitare la condanna?

**23. Matricole allo sbando** [20]

Le matricole della Scuola Matematica Superiore sono destinate alla loro casa di appartenenza a seconda delle loro attitudini matematiche. Quest'anno, ad esempio, per poter entrare nella casa di *Inclusionesclusione* era necessario saper dire quanti sono gli interi pari, compresi tra 4000 e 7000, che hanno tutte le cifre diverse. Qual è la risposta giusta?

**24. Un illecito sportivo** [60]

Un matemago non troppo onesto ha stregato tutti i dadi di Horton. Per decidere allora a chi toccherà il possesso della palla nella finale di Quamditch, i due capitani Hardy e Fracto giocano in questa maniera: i due tirano a turno una moneta, ed il primo a cui esce testa vince. A questo punto i due ripetono il gioco, ma questa volta tira per primo chi ha perso. Se Hardy ha tirato per primo la prima volta, calcolare la probabilità che Hardy vinca la nona partita. Dare come risultato il numeratore della frazione ridotta ai minimi termini.



# VII GARA NAZIONALE A SQUADRE

Gara del pubblico – SOLUZIONI – 6 maggio 2006

Nr.	Problema	Pti	Soluzione
1	Una pausa di svago	15	0793
2	Impostori svelati	40	2912
3	Rapporti burrascosi	35	0052
4	La prima prova	60	0004
5	Questione di posizioni	40	0015
6	Seduttore da strapazzo	35	0064
7	Allenamento di Quamditch	20	0118
8	Meritate vacanze	80	4862
9	Il torneo TreAngoli	45	8160
10	Alla lezione di pozioni	65	0594
11	Un espediente truffaldino	15	2143
12	La squadra di Quamditch	40	0175
13	L'esame di divinazione	70	2547
14	La seconda prova	50	0000
15	La finale di Quamditch	60	0027
16	Uno schema di Quamditch	25	3025
17	Situazione di pericolo	40	0020
18	La bella ingannatrice	40	0101
19	Alla lezione di divinazione	10	9768
20	Difesa contro la matemagia oscura	25	1000
21	Matricole ambiziose	20	0400
22	Una condanna da evitare	10	0502
23	Matricole allo sbando	20	0728
24	Un illecito sportivo	60	9842