

# VII GARA NAZIONALE A SQUADRE

Finale nazionale – 6 maggio 2006

## Istruzioni Generali

- ★ Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- ★ Se la quantità richiesta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato, si indichi la sua parte intera.
- ★ Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- ★ Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.

## Scadenze importanti

- ★ **10 minuti dall'inizio:** termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista).
- ★ **30 minuti dall'inizio:** termine ultimo per fare domande sul testo.
- ★ **120 minuti dall'inizio:** termine della gara.

### 1. Una pausa di svago

Tra una lezione e l'altra, i nostri amici Hardy, Hermita e Ron si divertono con le parole crociate. Aiutateli a risolvere il cruciverba, sapendo che lo schema contiene tutte e sole le cifre da 1 a 9. Qual è il numero contenuto nella colonna in grigio (letto dall'alto verso il basso)?

|   |  |   |
|---|--|---|
| 1 |  | 2 |
|   |  |   |
| 3 |  |   |

#### Orizzontali:

1. Un quadrato.
3. Un numero la cui somma delle cifre è 9.

#### Verticali:

1. Un cubo.
2. Un numero con cifre solo pari.

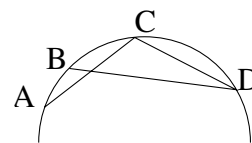
### 2. Rapporti burrascosi

Gli studenti di matematica della Scuola Matematica Superiore sono divisi in cinque case: *Rapportareo*, *Partimmaginario*, *Perognesiste*, *Inclusionesclusione* e *Righecompasso*. Le case sono a due a due alleate oppure nemiche. Ogni alleata di una casa nemica è anche nemica. In quanti differenti modi possono essere i mutui rapporti tra le cinque case?

### 3. Questione di posizioni

Per far riuscire gli incantesimi di gruppo in geomanzia è necessario essere piuttosto precisi nel collocarsi al posto giusto. Hardy, Ron e i suoi due fratelli, Henri e Smale, si posizionano nei punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  che sono, nell'ordine, su una circonferenza come in figura.

Sappiamo che  $AC = CD = 10\sqrt{5}$  e che  $BC = 5\sqrt{5}$ . Detto  $E$  il piede della perpendicolare da  $C$  a  $BD$ , si ha  $CE = 10$ . Determinare  $AB$ .



### 4. Seduttore da strapazzo

Ron ha scoperto l'altra metà del cielo, le ragazze! La sua passione è la più bella della scuola di matematici: Chiara, della casa di *Righecompasso*.

Il numero della camera di Chiara è pari al coefficiente del termine  $x^{2006}$  del polinomio

$$(1+x)^2(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)^3(1+x^{16})(1+x^{32})^4(1+x^{64})(1+x^{128})(1+x^{256})(1+x^{512})(1+x^{1024}).$$

In quale camera della casa di *Righecompasso* dovrebbe entrare Ron?

**5. Alla lezione di pozioni**

Durante la lezione di pozioni, Hardy e il suo amico Ron Perelman devono scegliere due ingredienti sui 36 disponibili e mischiarli nella speranza di ottenere una pozione con qualche proprietà. La loro amica Hermita gli ha detto che se i primi due ingredienti non hanno effetto conviene riprovare con altri due (cambiandoli entrambi): può capitare che anche in questo caso non ottenga nulla, ma allora – lo assicura – mischiando un ingrediente da ciascuna coppia (in qualunque modo) si otterrà per forza una pozione utile. Quante sono come minimo le combinazioni di due ingredienti che danno una pozione utile?

**6. Un espediente truffaldino**

Fracto Malpoysto odia perdere! Decide allora di truccare un comune dado con un incantesimo, che si basa sugli otto numeri magici del dado. Questi si ottengono, a partire da ognuno dei vertici, sommando i numeri scritti sulle tre facce che vi concorrono.

L'incantesimo consiste nel disporre accuratamente i numeri da 1 a 6 sulle facce del dado in modo che la differenza tra il numero magico massimo ed il numero magico minimo sia la più piccola possibile.

Trovare la disposizione, indicando in ognuna delle 4 cifre, ordinatamente da sinistra a destra, il numero che si trova opposto a 1, quello opposto a 2, poi a 3 e infine a 4.

**7. Potenza magica**

Come perfino gli apprendisti matemaghi ben sanno, la potenza di un incantesimo si rafforza ripetendone più volte la formula. Il calcolo della potenza però non è semplice.

Sia  $f(n)$  il quadrato della somma delle cifre di  $n$ . Sia poi  $f^{(2)}(n) = f(f(n))$ ,  $f^{(3)}(n) = f(f(f(n)))$  e così via. Trovare  $f^{(2006)}(11)$ .

**8. La parola d'ordine**

Il fantasma posto a guardia dell'ingresso della casa di *Rapportareo*, cui Hardy, Hermita e Ron appartengono, permette l'ingresso solo a coloro che sanno risolvere facili quesiti di natura matematica.

Il fantasma chiede quale sia il più piccolo multiplo intero di 73 tale che il suo quadrato abbia almeno 63 divisori. Qual è la parola d'ordine?

**9. Alla lezione di manufatti geomantici**

Alla lezione di manufatti geomantici, Hardy, Hermita e Ron devono svolgere un compito in gruppo: hanno a disposizione 6 colori diversi e vogliono verniciare un prisma a base quadrata (che ha l'altezza maggiore dello spigolo di base) in modo tale che ogni colore sia usato per una e una sola faccia.

1. Quanti modi diversi hanno i nostri eroi per colorare il prisma?
2. Prima di iniziare a colorare, la coscienziosa Hermita si accorge che il giallo è quasi finito, e i tre sono quindi costretti a usarlo per una delle facce quadrate. Quanti modi diversi restano per colorare il prisma?

Si scriva la risposta (1) nelle prime due cifre e la risposta (2) nelle ultime due.

**10. La pianta del castello**

La pianta del castello di Hortona, sede della Scuola Matematica Superiore, è costituita dall'unione di 6 cerchi di raggio pari a 100, i cui centri sono disposti sui vertici di un esagono regolare di lato 100. Quanto misura il perimetro del castello? Si risponda con il risultato a meno del fattore  $\pi$  (in altre parole, se ad esempio il risultato è  $10\pi$ , allora la risposta da dare è 0010).

**11. Giochi pericolosi**

Giocare con gli intrugli può essere piuttosto pericoloso. I 5000 allievi della casa di *Rapportareo* hanno bevuto una pozione che li costringe a dire sempre la verità, mentre i 5000 allievi della casa di *Partimmaginaria* hanno bevuto una pozione che li costringe sempre a mentire.

I 10000 allievi delle due case si dispongono in cerchio e ognuno scrive su una pergamena *Il mio vicino di destra è di Rapportareo* oppure *Il mio vicino di destra è di Partimmaginaria*. Naturalmente, tutti sanno a che case appartengono i vicini.

Quanti fogli *Il mio vicino di destra è di Rapportareo* ci possono essere, al massimo?

**12. Uno schema di Quamditch**

Hardy, il capitano della squadra di Quamditch della casa di *Rapportareo*, istruisce i suoi compagni di squadra su un nuovo schema di gioco che ha elaborato.

Se si considera nello spazio l'insieme  $Q$  dei punti che hanno coordinate intere e comprese tra 0 e 10 (inclusi), quanti cubi esistono con gli spigoli paralleli agli assi cartesiani e con i vertici appartenenti a  $Q$ ?

**13. Alla lezione di divinazione**

Il povero Ron è stato bendato e l'insegnante di divinazione ha scritto una formula alla lavagna. Sapendo che nell'espressione compaiono solo cifre 2 e segni di moltiplicazione, e che il risultato ha quattro cifre ed è il massimo possibile, che risposta dovrebbe dare Ron?

**14. Difesa contro la matemagia oscura**

Lezione di gruppo al corso di difesa contro la matemagia oscura! Dodici studenti, indicati ordinatamente con  $S_1, S_2, \dots, S_{12}$ , si dispongono ai vertici di un dodecagono regolare. Se si tracciano i segmenti  $S_1S_6, S_5S_{10}$  e  $S_9S_2$ , si formano quattro triangoli. Sia  $A$  l'area del triangolo centrale e  $B$  la somma delle aree degli altri tre. Si calcoli  $1000A/B$ .

**15. Un manufatto magico di inusitata potenza**

La brillante Hermita è alle prese con un incantesimo estremamente difficile, che mira a creare un quadrato magico (ovvero un quadrato in cui la somma dei numeri su ogni riga, ogni colonna ed ogni diagonale sia lo stesso valore, detto costante mistica del quadrato). L'incantesimo, come si vede dalla figura, è purtroppo ancora incompleto. Qual è la costante del quadrato magico?

|    |    |    |
|----|----|----|
|    |    | 33 |
|    |    |    |
| 31 | 28 |    |

**16. Matricole ambiziose**

Le matricole della Scuola Matemagica Superiore sono destinate alla loro casa di appartenenza a seconda delle loro attitudini matemagiche. Quest'anno, per entrare nell'ambita casa di *Rapportareo*, era necessario trovare la somma di tutti i razionali positivi che, ridotti ai minimi termini, hanno la forma  $\frac{a}{30}$ , e che sono minori di 10. Che risposta hanno dato le matricole di *Rapportareo*?

**17. Una condanna da evitare**

I seguaci di *Colui-che-non-può-essere-dimostrato*, accaniti sostenitori di una matemagia oscura e piena di contraddizioni, sono alla sbarra!

Anche domande semplici possono rivelare le loro distorte conoscenze matemagiche. Ad esempio, il giudice ha chiesto quanti sono gli interi positivi strettamente maggiori di 9 le cui cifre in base 10 sono strettamente crescenti da sinistra verso destra. Cosa si deve rispondere per evitare la condanna?

**18. Matricole allo sbando**

Le matricole della Scuola Matemagica Superiore sono destinate alla loro casa di appartenenza a seconda delle loro attitudini matemagiche. Quest'anno, ad esempio, per poter entrare nella casa di *Inclusionesclusione* era necessario saper dire quanti sono gli interi pari, compresi tra 4000 e 7000, che hanno tutte le cifre diverse. Qual è la risposta giusta?

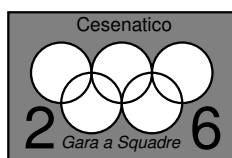
**19. L'odioso Fracto**

Hardy, Hermita e Ron vanno a lezione con l'odioso Fracto Malpoysto. I quattro si dispongono casualmente su 2 file da 5 posti ciascuna. Calcolare la probabilità che tutti vedano bene, cioè che nessuno abbia qualcun altro davanti. Esprimere il risultato come somma del numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

## 20. Impostori svelati

Spesso ci si chiede come sia possibile riconoscere un matemago da un *matebbano*, cioè qualcuno a digiuno di matemagia. Il metodo è molto semplice! Provate a chiedere a un matebbano il seguente quesito.

Sia  $ABC$  un triangolo, con  $\widehat{ABC} = 75^\circ$  e  $\widehat{ACB} = 53^\circ$ . Disegnata la circonferenza circoscritta ad  $ABC$ , siano  $E$  il punto medio dell'arco  $BC$  non contenente  $A$ , e  $D$  il punto medio dell'arco  $BC$  contenente  $A$ . Quanto vale l'angolo  $\widehat{AED}$ ?



# VII GARA NAZIONALE A SQUADRE

Finale nazionale – SOLUZIONI – 6 maggio 2006

| Nr. | Problema                                 | Soluzione   |
|-----|--|-------------|
| 1   | Una pausa di svago                       | <b>0793</b> |
| 2   | Rapporti burrascosi                      | <b>0052</b> |
| 3   | Questione di posizioni                   | <b>0015</b> |
| 4   | Seduttore da strapazzo                   | <b>0064</b> |
| 5   | Alla lezione di pozioni                  | <b>0594</b> |
| 6   | Un espediente truffaldino                | <b>2143</b> |
| 7   | Potenza magica                           | <b>0169</b> |
| 8   | La parola d'ordine                       | <b>1752</b> |
| 9   | Alla lezione di manufatti geomantici     | <b>9030</b> |
| 10  | La pianta del castello                   | <b>0400</b> |
| 11  | Giochi pericolosi                        | <b>9998</b> |
| 12  | Uno schema di Quamditch                  | <b>3025</b> |
| 13  | Alla lezione di divinazione              | <b>9768</b> |
| 14  | Difesa contro la matemagia oscura        | <b>1000</b> |
| 15  | Un manufatto magico di inusitata potenza | <b>0096</b> |
| 16  | Matricole ambiziose                      | <b>0400</b> |
| 17  | Una condanna da evitare                  | <b>0502</b> |
| 18  | Matricole allo sbando                    | <b>0728</b> |
| 19  | L'odioso Fracto                          | <b>0029</b> |
| 20  | Impostori svelati                        | <b>0011</b> |