

Corso di perfezionamento

***Strategie didattiche per favorire un atteggiamento positivo verso la
matematica e la fisica***

I laboratori della settimana matematica

Osservazioni didattiche

Gruppo: M. Ascoli, G. Fruendi, M. G. Marzario, C. Mogetta, D. Poletti

**Relazione per il tirocinio ed il 2° laboratorio
di Catia Mogetta**

Premessa

La Settimana Matematica è un'iniziativa del Dipartimento di Matematica e del Corso di Laurea in Matematica dell'Università di Pisa, realizzata all'interno del Progetto Lauree Scientifiche.

E' rivolta agli allievi degli ultimi due anni delle scuole superiori interessati alla matematica e permette loro di frequentare per una settimana il Dipartimento di Matematica, sia di mattina che di pomeriggio. In tale modo essi conoscono il Dipartimento di Matematica di Pisa (gli spazi, i servizi che offre, le sue peculiarità), seguono una lezione di tipo "universitario", frequentano per tre pomeriggi una attività di laboratorio, partecipano ad una conferenza/seminario e ad un incontro con i laureati (per conoscere le opportunità di lavoro, spesso sottovalutate, che una Laurea in Matematica offre) ed infine vengono posti in contatto con studenti iscritti a Matematica (alcuni dei quali saranno tutors nei vari laboratori), con la possibilità di confrontarsi e chiedere informazioni sull'esperienza che stanno vivendo.

All'interno della Settimana Matematica, ho svolto attività di tirocinio¹ assistendo al laboratorio 1: ***Passatempi e giochi: alla ricerca di problemi e soluzioni.***

La presente relazione può essere divisa in due parti:

1. la prima parte è relativa al lavoro di laboratorio², e consiste nell'analisi dell'impostazione data dai docenti ai laboratori e della loro riuscita didattica, sulla base delle osservazioni da noi fatte relative al lavoro dei ragazzi in tre distinti laboratori;
2. la seconda parte è relativa al lavoro di tirocinio ed è un resoconto delle tre giornate di laboratorio, non tanto dal punto di vista delle lezioni vere e proprie³, quanto dal punto di vista didattico. Cercherò di ripercorrere l'intera attività del laboratorio sui giochi, mettendo in evidenza il modo di lavorare dei docenti, la loro interazione con i ragazzi, il modo di lavorare dei ragazzi e le loro mutue interazioni.

I Parte - I laboratori della Settimana Matematica

Il nostro lavoro sulla Settimana Matematica ha avuto l'obiettivo di *analizzare*, per quanto possibile, *l'impostazione data dai docenti ai laboratori⁴ e la loro riuscita, sia dal punto di vista dei ragazzi, sia dal punto di vista di noi osservative.*

Nei laboratori viene data agli allievi la possibilità di confrontarsi con argomenti inusuali, legati alla matematica e trattati in modo piuttosto informale da docenti universitari, e di provare a 'fare matematica', da soli o in gruppo, scoprendo o costruendo ipotesi, congetture, definizioni e teoremi.

I ragazzi possono partecipare soltanto se inviati dalla propria scuola e con l'indicazione di un docente di riferimento. La partecipazione è stata quest'anno oltre i limiti previsti (120 ragazzi): hanno partecipato in tutto 126 ragazzi⁵; molti erano toscani, ma altri provenivano da tutta Italia.

I ragazzi hanno potuto scegliere tra otto laboratori⁶, corrispondenti agli argomenti più disparati, lontani dalla matematica scolastica e a volte collegati ad aspetti della realtà non "direttamente" matematici.

Nei tre pomeriggi in cui si è articolata l'attività dei laboratori, i ragazzi hanno assistito e partecipato attivamente alle lezioni di un docente universitario e di un suo collaboratore e si sono poi dedicati al lavoro sugli argomenti proposti, seguiti da uno o più tutors.

¹ Insieme a M. Grazia Marzario e Daniela Poletti.

² Svolto insieme a M. Ascoli, M. G. Marzario, G. Fruendi e D. Poletti.

³ Un resoconto dettagliato del materiale trattato nelle lezioni / laboratorio è stato scritto da Emanuele Delucchi, uno dei tutors del laboratorio. A tale testo si rimanda per i dettagli più squisitamente matematici sui giochi presentati.

⁴ Nel nostro gruppo, Mogetta, Marzario e Poletti hanno seguito il laboratorio 1, Giochi e passatempi matematici: alla ricerca di problemi e soluzioni; Ascoli ha seguito il laboratorio 4, Impossibilità di un sistema democratico; Fruendi ha seguito il laboratorio 3, A proposito di poliedri: dimostrazioni, confutazioni e robot.

⁵ Dato desunto dai questionari

⁶ I titoli dei laboratori sono in Appendice 2

I tre laboratori a cui abbiamo assistito sono stati strutturati in maniera abbastanza simile, per quanto riguarda la scansione delle attività: una lezione introduttiva, la proposta di alcuni problemi su cui lavorare e lo spazio dato ai ragazzi per produrre le loro congetture e trovare le soluzioni ai problemi dati. La diversità dei contenuti e del tipo di lavoro svolto dai ragazzi nei tre gruppi non ci hanno permesso di lavorare sugli argomenti matematici, per cui abbiamo preferito concentrarci sulle osservazioni didattiche e sulle nostre impressioni relative al modo di lavorare sia dei docenti che dei ragazzi. In particolare abbiamo osservato il modo in cui i ragazzi si rapportano alla matematica, ai suoi metodi e alla formalizzazione necessaria per produrre argomentazioni pulite. Inoltre, all'interno dei laboratori, abbiamo cercato di ritagliarci degli spazi per colloquiare con i ragazzi ed indagare un po' sulla loro disposizione verso la matematica e verso la possibilità di proseguire gli studi in ambito scientifico.

Le osservazioni raccolte in questa relazione sono un sunto dei punti di vista delle cinque partecipanti al lavoro di laboratorio per il Corso di Perfezionamento e non vogliono essere esaustive, né riferirsi alla Settimana Matematica nella sua interezza. Per avere un quadro un po' più ampio ed avere conferma (o smentita) delle nostre impressioni, abbiamo poi analizzato le risposte date da tutti i ragazzi partecipanti ai questionari forniti alla fine della Settimana Matematica.

Nel nostro lavoro abbiamo cercato di mettere in evidenza i punti comuni ai tre laboratori che abbiamo seguito, ma anche alcune peculiarità interessanti dei singoli laboratori.

Il lavoro di docenti e tutors

Il ruolo dei docenti nei tre laboratori è stato essenzialmente quello di porre delle basi "teoriche" per il successivo lavoro dei ragazzi, fornendo tutte le nozioni necessarie ad impostare un lavoro il più possibile corretto da un punto di vista matematico, su argomenti di non facile trattazione.

In tutti i laboratori i docenti hanno creato fin dall'inizio un'atmosfera distesa ed informale, cercando di coinvolgere i ragazzi e renderli partecipi. Gli argomenti sono stati generalmente presentati alla lavagna, o con l'aiuto di un proiettore in un solo caso: il tono informale e colloquiale, la teatralità dei docenti del laboratorio sui giochi, che hanno inscenato partite a Chomp e Nim, con tanto di eliminazioni, semifinali e finali, hanno permesso ai ragazzi di "rompere il ghiaccio" e partecipare alla lezione facendo interventi, osservazioni, supposizioni, congetture, o chiedendo liberamente spiegazioni ai docenti.

I materiali usati dai docenti nella fase iniziale di spiegazione "teorica", sono stati generalmente "poveri": nella maggior parte dei casi si sono avvalsi soltanto di gesso e lavagna, in altri casi hanno integrato la spiegazione con fotocopie oppure, in un solo caso, con lucidi, animazioni al computer e modelli meccanici.

Osservazioni sull'uso degli strumenti

È da rilevare che un solo docente ha fornito materiale cartaceo ai ragazzi: questo, a mio avviso, è stato un piccolo limite dal punto di vista didattico, poiché avere dei riferimenti precisi per le nozioni teoriche introdotte avrebbe potuto aiutare i ragazzi a fissare le idee e forse sarebbe servito da supporto per un'eventuale volontà di rivisitare il materiale una volta conclusa l'esperienza del laboratorio.

L'uso di gesso e lavagna è stato molto interattivo, almeno nel laboratorio 1, che ho seguito: le scritte sulla lavagna non trasmettevano semplicemente delle nozioni, ma fungevano da strumento di *costruzione sociale* delle conoscenze. Nella seconda parte analizzerò alcuni esempi di tale uso della lavagna da parte dei docenti del laboratorio sui giochi.

Nell'affrontare le possibili strategie risolutive del gioco del 15, sia nella versione tradizionale, sia in quella con il 14 ed il 15 scambiati di posizione, i docenti che ho seguito hanno fornito il gioco, per consentire ai ragazzi di cimentarsi in qualche partita prima di trovare la strategia vincente e risolvere il problema posto dai docenti. Nella giornata dedicata al Sudoku, i docenti hanno portato in aula un computer con un programma che stabilisce il numero di soluzioni di un qualsiasi Sudoku

che venga inserito al suo interno. Anche in questo caso, l'uso dello *strumento* computer non è stato imposto dall'alto come semplice verificatore di soluzioni, ma è stato introdotto con una perfetta scelta di tempi, quando i ragazzi avevano già costruito i loro Sudoku e stavano perdendo interesse all'attività. L'entrata in scena del computer e la successiva verifica dell'elevato numero di soluzioni dei Sudoku trovati (la richiesta era quella di costruire un Sudoku con soluzione unica ed un numero minimo di numeri iniziali dati), ha riacceso l'entusiasmo dei ragazzi e la loro carica agonistica, per cui molti si sono rimessi al lavoro per migliorare i loro Sudoku, accrescendo magari il numero di dati iniziali, ma diminuendo il numero di soluzioni.

Osservazioni sulle attività del laboratorio 1

Il tema del laboratorio 1, cioè giochi e passatempi matematici, è stato un pretesto per andare a simulare, in un certo modo, il "lavoro che fa un matematico" nella costruzione di una teoria:

- la sua attenzione è catturata da qualcosa (*in questo caso un gioco*)
- osserva incuriosito l'oggetto della sua attenzione (*prova a giocare*)
- inizia a porsi domande (*non gioca più, o meglio non gioca più solo per passare il tempo*)
- formula congetture (*è un gioco finito?; esistono strategie vincenti?; se sì, quali?*)
- cerca di dimostrare rigorosamente queste congetture
- generalizza gli eventuali risultati trovati (*dal chomp all'iperchomp*).

I ragazzi hanno seguito passo passo questo tipo di lavoro, interagendo con docenti e tutors nella costruzione di grafi per i giochi considerati e nell'individuazione di strategie che portassero alla vittoria sicura. Se è vero che il matematico investe tutte le sue energie in questa attività creativa, senza preoccuparsi della sua ricaduta a livello pratico e utilitaristico, è certamente più difficile per i ragazzi concentrarsi a lungo su un obiettivo e non divagare anche se i risultati tardano ad arrivare.

La bellezza delle strutture costruite, la forza della generalizzazione dei risultati ottenuti in casi particolari, hanno certamente catturato l'attenzione dei ragazzi, ed aperto la loro mente ad idee più generali: alcuni hanno cominciato a fare domande sul concetto di infinito, intavolato interessanti conversazioni con i tutors (che in questo caso erano uno studente di matematica ed un dottore in matematica, attualmente al Dipartimento di Matematica di Pisa con una borsa di post dottorato).

Anche negli altri laboratori, sono stati presentati argomenti che hanno aperto spiragli sulla bellezza della matematica e sulla passione che è necessaria per raccogliere le sfide ed arrivare alla soluzione di problemi, che a prima vista possono sembrare quasi impossibili!

Certamente, i ragazzi partecipanti al laboratorio sui giochi si sono divertiti ed appassionati ai problemi posti dai docenti ed hanno lavorato attivamente per raggiungere buoni risultati. Da qui a sviluppare una passione per la matematica tale da convincerli ad iscriversi al Corso di Laurea corrispondente, la strada è lunga, ma credo che il semplice fatto di aver lavorato alla costruzione di un pezzetto di teoria sia stata un'esperienza altamente formativa per molti di questi ragazzi.

I ragazzi al lavoro nei laboratori

Tutte le lezioni sono state seguite con entusiasmo dai ragazzi partecipanti ai tre laboratori che abbiamo osservato, le spiegazioni sono state trascritte in modo preciso ed ordinato e gli interventi sono stati frequenti e pertinenti, sia per suggerire mosse vincenti (nel caso dei giochi), sia per chiarire degli aspetti attraverso osservazioni puntuali.

Nei lavori di gruppo successivi alle lezioni più "teoriche", i ragazzi si sono aggregati spontaneamente, lavorando con impegno ed entusiasmo. La diversità degli argomenti trattati nei laboratori richiedeva anche tipi di lavoro differenti. Tuttavia, abbiamo rilevato alcuni punti comuni, come:

- la difficoltà a mettere per iscritto i ragionamenti e le argomentazioni prodotte verbalmente;
- la produzione di schizzi di configurazioni, calcoli confusi, grafi non completi e pasticciati;

- l'individuazione delle soluzioni cercate ha seguito strade poco rigorose.

La questione della dimostrazione, della formalizzazione di argomentazioni che sembravano portare alla soluzione del problema si è presentata in modi diversi nei tre laboratori. Mentre nel laboratorio 4 i ragazzi sembrano essere riusciti a formalizzare le loro soluzioni, anche se hanno commesso dei piccoli errori, nel laboratorio 1, molti ragazzi hanno mostrato una certa fretta di arrivare alla strategia vincente di questo o di quel gioco e non si sono soffermati a sufficienza sulla sistemazione rigorosa dei risultati raggiunti.

A mio avviso, il tono informale e giocoso dell'introduzione iniziale dell'argomento da parte dei docenti ha influenzato il modo di lavorare dei ragazzi nel laboratorio: presi dal gioco e dalla sua componente agonistica, hanno spesso privilegiato la ricerca della strategia in casi semplici rispetto alla generalizzazione. D'altro canto, credo che questi studenti non avessero effettivamente gli strumenti necessari alla formalizzazione richiesta. Ad esempio, nel caso del gioco del Chomp, il ragionamento induttivo richiesto è stato intuito da molti ragazzi, ma non poteva essere scritto in modo pulito proprio perché essi non hanno a disposizione lo strumento teorico richiesto. Credo che comunque siano notevoli i risultati raggiunti dai ragazzi, al di là della sistemazione finale e discuterò qualche esempio di soluzione ai problemi assegnati nella seconda parte.

Osservazioni sulle motivazioni dei ragazzi

Durante le pause e nelle fasi finali delle singole giornate abbiamo conversato con i ragazzi su temi più generali. Abbiamo cercato di comprendere le motivazioni che li avevano spinti a partecipare alla settimana matematica.

Con nostra sorpresa, molti ragazzi hanno affermato di aver partecipato alla settimana matematica sotto esplicita richiesta dei loro insegnanti di matematica, che li avevano scelti fra altri per il loro buon rendimento. In alcuni casi questa scelta è stata "subita" dai ragazzi, che non avevano un reale interesse a partecipare. Un ragazzo in particolare ci ha parlato del suo disagio nel laboratorio, di fronte a compiti che non riusciva a comprendere fino in fondo ed a svolgere bene: alla fine della terza giornata ci ha confessato di "non vedere l'ora di finire"!

A questo punto ci è sembrato naturale chiedere quanti di questi ragazzi avessero intenzione di iscriversi a Matematica: le risposte sono state tutte negative. Anche fra i ragazzi più incerti (perché in quarta e non ancora proiettati verso la scelta universitaria) le opzioni prese in considerazione non contemplavano Matematica, né altri corsi di Laurea della Facoltà di Scienze. La maggior parte degli studenti partecipanti al laboratorio 1 hanno dichiarato di essere interessati a facoltà come Economia, Ingegneria e Medicina. Mi ha colpito un ragazzo in particolare, tra i più attivi e capaci del gruppo, che ha mostrato di avere ottime capacità di intuizione, logica e di argomentazione, ma che ha affermato che la matematica fatta nel laboratorio era divertente e coinvolgente, mentre quella che faceva a scuola era spesso noiosa e priva di interesse. Di qui la sua tendenza ad orientarsi verso facoltà tecniche, più che scientifiche.

Anche negli altri laboratori sono stati veramente pochi i ragazzi che hanno dichiarato di essere interessati a Matematica e di prenderla in considerazione fra le possibili opzioni.

Questo pone senza dubbio degli interrogativi sui motivi per cui ragazzi che pure sono fra i migliori delle nostre scuole superiori (almeno in matematica) non hanno interesse verso la prosecuzione degli studi in tale ambito. Una componente può senza dubbio essere l'immagine della matematica e dell'attività matematica che viene data dalla scuola: molti fra i ragazzi con cui abbiamo parlato hanno tracciato una divisione netta fra ciò che hanno sempre visto a scuola, definito come noioso e poco interessante, e ciò a cui hanno lavorato nel laboratorio. Inoltre molti si sono lamentati dei loro insegnanti, del modo di spiegare la materia, del tipo di attività svolte in classe: ce n'è di che riflettere per tutti noi insegnanti!

I questionari

Per dare un quadro più ampio della valutazione della Settimana Matematica da parte dei partecipanti, e per avere conferma o smentita delle nostre impressioni, abbiamo analizzato i risultati dei questionari⁷ sottoposti ai ragazzi alla fine delle attività.

Dall'analisi dei questionari emerge che a quasi tutti i ragazzi è piaciuta l'attività della settimana matematica (dal 77% al 90%, a seconda se lezione universitaria o laboratorio); a quasi tutti i ragazzi sono piaciuti gli argomenti trattati alla settimana matematica (dal 67% al 86%, a seconda se lezione universitaria o laboratorio); per l'81% dei ragazzi l'attività (laboratorio, lezione universitaria) è stata impegnativa ma comunque una percentuale che varia dal 65% al 73% rispondeva che la sua preparazione scolastica era stata sufficiente per seguire l'attività; i materiali utilizzati erano chiari per il 68-84% degli studenti e le spiegazioni dei docenti lo erano per il 65-93% degli studenti (lezione-laboratorio).

Inoltre per l'82% dei ragazzi le attività sono state utili per capire cosa è la matematica; l'80,1% risponde "decisamente sì" alla domanda se sia valsa la pena di partecipare mentre rispondono "più sì che no" un altro 18,3%: tra tutti per il 98,4% è valsa la pena.

Da questo si può dedurre che l'iniziativa abbia ottenuto dei risultati senza dubbio positivi: su 126 ragazzi, per 124 è stata un'esperienza significativa, nonostante diversi studenti abbiano partecipato su insistenza dei loro insegnanti. Ciò depone a favore di docenti, collaboratori e tutors, che hanno fornito ai ragazzi la possibilità di cimentarsi con un'attività nuova, inaspettata, stimolante e soddisfacente. Anche la lezione universitaria del mattino è stata complessivamente apprezzata, anche se le valutazioni sono state discordanti: dalle nostre conversazioni con i ragazzi è emerso che alcuni l'avevano trovata troppo lunga, difficile e rigorosa, mentre altri avevano apprezzato il tipo di approccio, più simile a quello a cui erano abituati a scuola.

I ragazzi del laboratorio 4 hanno affermato che la lezione del mattino era più difficile del laboratorio, con sfumature diverse da persona a persona:

- alcuni avrebbero preferito seguire qualcosa di più matematico durante il laboratorio;
- alcuni, in un argomento come quello della legge elettorale, a cavallo fra due discipline, preferivano il lato non matematico, anche per loro interessi personali;
- alcuni preferivano sporcarsi le mani con le cose e quindi valutavano positivamente i lavori di gruppo e le lezioni meno cattedratiche del laboratorio.

Naturalmente tutti i giudizi espressi dai ragazzi sulla loro "settimana" dipendono anche dalla loro precedente esperienza con la matematica, ai vari livelli scolastici: l'apprezzamento quasi plebiscitario per i laboratori, tuttavia, apre prospettive su possibili modi alternativi di insegnare la matematica anche in classe.

Osservazioni conclusive

La valutazione data dai ragazzi alle attività della Settimana Matematica è globalmente molto positiva e conferma le impressioni da noi riportate nei singoli laboratori. Se le attività del mattino hanno dato modo ai partecipanti di conoscere l'ambiente universitario, entrare a contatto con alcuni aspetti della vita universitaria, con il modo di spiegare dei docenti in contesti diversi, come quello di una lezione cattedratica o di un seminario informale, sono stati i laboratori ad aprire loro le porte dell'attività matematica vera e propria. Nei laboratori i ragazzi hanno potuto sperimentare diversi modi di lavorare ad un problema, sono stati coinvolti nella ricerca di soluzioni, attraverso la formulazione di congetture, la ricerca di giustificazioni a tali congetture, fino ad arrivare alla sistemazione dei risultati in modo organico. Certo, il tempo a disposizione è stato limitato e il gran numero di spunti offerti, almeno nei laboratori da noi seguiti, hanno gettato dei semi che potranno dare frutto in futuro. Sicuramente i risultati ottenuti sono stati positivi da molti punti di vista.

⁷ Il testo dei questionari è riportato in Appendice 3, mentre i grafici relativi all'analisi sono riportati in Appendice 4.

Da un punto di vista matematico, i ragazzi del laboratorio 1 si sono appropriati facilmente degli strumenti necessari alla soluzione dei problemi (*la ricerca di strategie vincenti per giochi finiti*): hanno imparato a costruire grafi dei giochi, hanno risolto problemi relativi a casi particolari e si sono avviati alla generalizzazione, in una continua interazione con i tutor, che hanno avuto spesso il ruolo di stimolare i ragionamenti dei ragazzi.

Dal punto di vista motivazionale, i ragazzi, già selezionati, perché interessati alla matematica, hanno comunque mostrato ottime capacità di interagire con i docenti, mostrandosi entusiasti e vogliosi di capire e di lavorare. Per noi questa è stata una piacevole sorpresa, abituate come siamo a vedere ragazzi svogliati ed annoiati nelle nostre classi. Una delle cause di tale vivacità intellettuale e partecipativa è senza dubbio l'impostazione data dai docenti ai laboratori, con il tono informale e disteso di tutte le "lezioni" e con la volontà di far partecipare attivamente i ragazzi a tutte le fasi del lavoro.

Dal punto di vista dell'atmosfera e dell'ambiente, abbiamo notato che la "distanza" tra studenti e docenti si è davvero ridotta al minimo nei laboratori: ad esempio, nel laboratorio 1, il docente spesso sedeva fisicamente accanto ai ragazzi e guardava da lì cosa stesse succedendo alla lavagna, dove i suoi collaboratori inscenavano una partita a Chomp o a Nim. Questo ha senza dubbio contribuito ad avvicinare i ragazzi, che non esitavano ad affollarsi attorno al docente alla fine di ogni giornata, per chiedere ulteriori spiegazioni o per sottoporgli le soluzioni trovate.

Dobbiamo dire che tutto questo ci ha piacevolmente sorpreso, e fatto pensare con rammarico ai tempi in cui noi abbiamo frequentato la facoltà e in cui l'atmosfera era completamente diversa.

Anche se i ragazzi che hanno partecipato non si iscriveranno a matematica, è certo però che porteranno con sé un'immagine positiva del mondo universitario, che potrà sempre essergli di aiuto, qualunque sia la loro scelta. Inoltre, fatto non secondario, l'esperienza vissuta nei laboratori, ha dato loro la possibilità di "fare matematica", in piccolo certamente, ed in un contesto ristretto, ma con tutta la passione, l'entusiasmo ed il senso di sfida che provano i matematici nel loro lavoro quotidiano.

Il Parte – Osservazioni didattiche sul laboratorio 1

Una breve premessa

Il laboratorio si è sviluppato in tre giornate, centrate sullo stesso tema, ma su giochi differenti, per caratteristiche, per strategie di soluzione e per complessità.

I docenti, Prof. Gaiffi e Prof. Pernazza, hanno impostato il lavoro in modo informale, cercando di aggiungere elementi di teatralità e di agonismo alla presentazione dei giochi, con lo scopo di incuriosire i ragazzi e di metterli a proprio agio in un ambiente nuovo per loro.

Le osservazioni che riporto qui di seguito seguono lo sviluppo delle tre giornate e sono pertanto suddivise in tre sezioni diverse.

Osservazioni sul Giorno 1

Tema del giorno: Il gioco del Chomp

Durante una breve introduzione sui giochi matematici, Gaiffi ha messo in luce le due possibilità di azione davanti ad un gioco:

1. *giocare*
2. *chiedersi come funziona*

Il gioco è stato poi introdotto attraverso una dimostrazione pratica alla lavagna, in cui è stato giocato un vero torneo dai docenti e da un tutor. Questo ha permesso ai ragazzi di interagire e di dare suggerimenti sulle possibili mosse vincenti, e nello stesso tempo, seguendo le osservazioni dei docenti, di pensare a possibili giustificazioni delle mosse vincenti.

Nel gioco del Chomp, due giocatori si trovano davanti ad una tavoletta di cioccolato avente il quadrettino in basso a sinistra avvelenato. Ogni giocatore a turno può mangiare un pezzo di

cioccolata, staccando dei morsi rettangolari che abbiano sempre un vertice nell'angolo in lato a destra. Perde, ovviamente, il giocatore che è costretto a mangiare il boccone avvelenato.

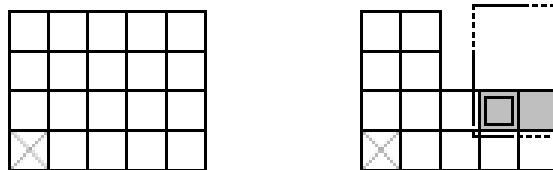


Figura 1- Il gioco del Chomp nella configurazione iniziale e dopo una prima mossa, con l'indicazione del morso da staccare nella mossa successiva

Dopo alcune partite, il docente introduce l'idea di **grafo del gioco**, partendo dalla configurazione finale, in cui resta soltanto un quadratino avvelenato (e quindi il giocatore di turno perde, perché è costretto a mangiarselo), per risalire a tutte le configurazioni precedenti, passo per passo, determinando ogni volta se la configurazione sia vincente o perdente.

Il docente introduce poi l'idea della strategia vincente, subito seguita dai ragazzi, che propongono il caso particolare in cui la tavoletta sia un quadrato $n \times n$. La breve discussione che segue porta subito all'individuazione della strategia vincente per il caso $n \times n$.

Il docente sposta poi l'attenzione su un caso generale, in cui non si conosca la dimensione della tavoletta, per portare i ragazzi a riflettere sulla possibilità che il primo giocatore riesca sempre a vincere. Vengono poi dati dei suggerimenti, come ad esempio di considerare il fatto che nel gioco considerato non ci sono cicli, cioè non si può tornare indietro dopo aver fatto una mossa.

Alla fine di questa discussione sulle varie caratteristiche del gioco, vengono assegnati dei compiti per il laboratorio, sotto forma di domande:

Domanda 1 – *Come trasformare i sospetti in ragionamenti veri? Come si può scrivere un ragionamento che mostra che esiste una strategia vincente e che il primo giocatore vince sempre?*

Domanda 2 – *Come vince il primo giocatore nel caso del Chomp $2 \times n$?*

Domanda 3 – *Come vince il primo giocatore nel caso del Chomp 3×4 ?*

A questo punto viene proposto un nuovo gioco, che si svolge nell'ambito dei divisori dei numeri interi, con regole analoghe a quelle del Chomp, in cui si devono “mangiare” ad ogni turno un divisore e tutti i suoi multipli. Il compito assegnato consiste poi nel rispondere alla:

Domanda 4 – *Cosa c'entra questo gioco con il gioco del Chomp?*

Osservazioni – Gli *strumenti* usati per introdurre il gioco sono stati quelli più tradizionali: il gesso e la lavagna. L'uso di tali strumenti, tuttavia, è stato coinvolgente: i ragazzi sono stati chiamati più volte a completare delle mosse lasciate in sospeso dal docente, a suggerire quali quadratini dovessero essere cancellati per avere una mossa vincente. Nella costruzione del grafo del gioco, dopo i primi passi, scritti completamente dal docente, i ragazzi hanno contribuito ad aggiungere i passi successivi, in una vera e propria *costruzione sociale* delle conoscenze. Il metodo di costruzione del grafo è così stato illustrato dal docente e nello stesso tempo attivamente costruito dai ragazzi stessi. Un interessante uso della lavagna è stato fatto anche nel caso dell'elenco dei “sospetti”, che si affollavano sulla lavagna, quasi a suggerire la necessità di dare una sistemazione a tutti gli indizi raccolti nel lavoro fatto fino a quel punto.

La strategia “costruttiva” è stata utilizzata anche per passare dal caso particolare al caso generale e tale gradualità si riflette nelle domande poste ai ragazzi come compito da svolgere durante il laboratorio.

Un'ultima osservazione riguarda la relativa libertà lasciata ai ragazzi nello scegliere il compito su cui lavorare, in base ai loro interessi ed alle loro conoscenze e capacità. Vedremo che la scelta dei ragazzi è spesso caduta, non sorprendentemente, sui compiti considerati più semplici, ma non sono mancati ragazzi che hanno lavorato anche su questioni più complicate, di cui non sono venuti a capo solo per motivi di tempo.

Il Laboratorio – osservazioni

Inizia il LABORATORIO vero e proprio in cui i ragazzi hanno modo di scegliere una o più domande e lavorare per trovare delle strategie vincenti nei vari casi considerati.

I ragazzi si dividono spontaneamente in gruppi, prevalentemente appartenenti alla stessa scuola. Tutti si dedicano al caso $2 \times n$, non sapendo bene come affrontare la domanda 1, che chiede di scrivere in modo rigoroso un ragionamento.

Il disorientamento di molti ragazzi davanti ad un compito di questo tipo può avere molte spiegazioni, essere legato alla loro preparazione matematica scolastica, che non abitua certo a dimostrare rigorosamente delle affermazioni e tanto meno a trascrivere i propri ragionamenti, ripulendoli di tutto ciò che è ridondante. Tuttavia, credo che l'impostazione data al laboratorio, dove le nozioni relative ai giochi sono state introdotte in modo abbastanza informale, non abbia focalizzato l'attenzione dei ragazzi su questi aspetti, bensì sulla ricerca di soluzioni, sulla individuazione di strategie vincenti, e proprio questi aspetti sono risultati prevalenti sulla ricerca di argomentazioni matematiche rigorose.

Affrontando la domanda 2, molti ragazzi hanno trovato difficoltà a partire a causa della presenza di n . Abbiamo suggerito di partire dal caso 2×3 e poi studiare i casi successivi. Dopo aver provato a giocare delle partite su Chomp 2×3 e 2×4 , i ragazzi hanno tentato di trovare l'idea vincente nel caso generale, senza riuscire a focalizzare il passo induttivo.

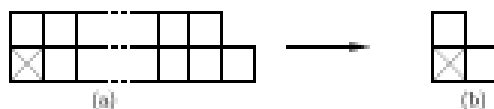


Figura 2- Strategia vincente del Chomp $2 \times n$

Solo due gruppi hanno percorso la strada ricorsiva, anche se non conoscevano questo tipo di ragionamento. Tutti hanno capito che la mossa iniziale più conveniente era quella di mangiare un quadratino e lasciare una configurazione a scalino (per la discussione delle soluzioni vedi la relazione di Delucchi).

Le intuizioni relative alla strategia di gioco sono emerse rapidamente, ma è stato molto difficile per i ragazzi arrivare a scrivere un'argomentazione corretta. Ho notato che molti gruppetti sono riusciti a "capire" la strategia, ma che non sono riusciti a costruire il ragionamento induttivo necessario per la "formalizzazione". Nonostante ciò, i ragazzi hanno lavorato con un certo entusiasmo e si sono dedicati alla domanda che hanno ritenuto più abbordabile. Nessuno ha cercato di rispondere alle domande 1, 3 e 4, sia perché hanno impiegato molto tempo a discutere la domanda 2, sia perché, a mio avviso, hanno valutato tali domande come fuori dalla loro portata.

Ho osservato che tutti i ragazzi hanno imparato subito a costruire il grafo del gioco ed hanno utilizzato questa nozione anche nei giorni successivi, per capire quali fossero le mosse vincenti e quelle perdenti nei altri giochi introdotti dai docenti.

Osservazioni sul Giorno 2

La seconda giornata inizia con un richiamo al gioco dei divisori, introdotto nella giornata precedente, ma non trattato dai ragazzi durante il laboratorio. I docenti mostrano alla lavagna, con un esempio, che il gioco dei divisori non è altro che una particolare istanza del gioco del Chomp.

Dall'esempio considerato si conclude che con i numeri che sono prodotto di due fattori primi, del tipo $p^a q^b$, il gioco dei divisori di tale numero è un Chomp $(a+1) \times (b+1)$.

Da qui il passo successivo viene quasi naturale: se i numeri considerati hanno tre fattori primi, ci si può immaginare che i divisori si dispongano non più su una griglia bidimensionale, bensì su una griglia tridimensionale. I ragazzi hanno subito capito il gioco ed hanno cominciato a chiedersi che cosa succede nel caso n -dimensionale, chiamato *iperchomp*.

Ci si chiede allora se anche negli iperchomp vale l'affermazione che il primo giocatore ha sempre la strategia vincente. Il docente mostra che costruendo il grafo del gioco, anche in questo caso generale si possono identificare le mosse come vincenti o come perdenti, e quindi il primo giocatore può seguire la strategia individuata nel caso bidimensionale.

I ragazzi sembrano aver seguito bene il processo di generalizzazione dal chomp all'iperchomp, interagendo continuamente con i docenti nella costruzione del grafo e nell'identificazione delle mosse vincenti e perdenti. I docenti stessi, a questo punto, parlano esplicitamente di *generalizzazione*, gettando luce sul fatto che si sta portando a termine un processo che è tipico dell'attività di un matematico, che parte da situazioni cercando di astrarre proprietà di carattere generale, per poi dimostrarle.

Opportunamente, a questo punto il docente passa alla sistemazione di un pezzetto di teoria, dando dei nomi a nozioni che ha utilizzato in modo informale per tutta la giornata precedente.

Il **grafo di un gioco** è uno schema del gioco che si costruisce scrivendo tutte le possibili configurazioni, collegando con delle frecce le configurazioni a cui si può passare da una configurazione data.

I giochi considerati nella prima giornata sono tutti *giochi finiti*: la questione è emersa diverse volte dalle domande dei ragazzi, che si chiedevano se ad un certo punto le mosse possibili sarebbero terminate, in tutti i giochi considerati. Essendo le mosse in numero finito, anche tutte le possibili configurazioni che compongono il relativo grafo saranno finite.

Dunque, *ogni gioco finito ha un grafo finito*.

Un ragazzo a questo punto ha sollevato il dubbio che la finitezza di un gioco coincidesse con il fatto che il gioco ha termine. Il docente ha allora introdotto l'idea dei cicli all'interno di un grafo. Il gioco termina in un numero finito di mosse, senza entrare in situazione di stallo, o di partite patte, solo se il grafo del gioco non contiene cicli. In questo caso il gioco viene chiamato *finito-finito*.

I ragazzi intuiscono immediatamente che nei giochi finiti-finiti ogni configurazione può essere etichettata come vincente o perdente, poiché nel grafo può essere ricondotta ad una mossa vincente o ad una mossa perdente.

La conclusione di tutto il discorso sui grafi dei giochi finiti e dei giochi finiti-finiti è che quando un gioco finito ha un *massimo*, cioè una configurazione dalla quale si possano raggiungere tutte le altre muovendosi lungo le frecce, allora il primo giocatore possiede una strategia vincente.

I compiti assegnati per stimolare la riflessione su questi temi sono i seguenti:

Compito 1 – *Ripensare al grafo di un gioco.*

Compito 2 – *Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme con un numero finito n di elementi?*

Tema principale del giorno: Il gioco del Nim

Il gioco del Nim viene introdotto come esempio di un gioco il cui grafo non ha massimo.

In questo gioco, per due persone, i giocatori si trovano di fronte ad un numero n di piatti, contenenti ciascuno un certo numero di biscotti. Ogni giocatore a turno deve scegliere un piatto e mangiare da questo almeno un biscotto. Perde chi non trova più biscotti nei piatti, o in altre parole, vince chi mangia l'ultimo biscotto.

I docenti iniziano a giocare delle partite a Nim alla lavagna ed inscenano un torneo, analogamente a quanto fatto il giorno prima con il Chomp. Le modalità di lavoro sono analoghe, ma ora i ragazzi

hanno a disposizione le nozioni sui grafi dei giochi e sui giochi finiti-finiti, per cui riescono a capire immediatamente la strategia.

Gli interventi dei ragazzi sono di vario tipo: intanto un ragazzo osserva che se ci sono due piatti con lo stesso numero di biscotti, il primo giocatore perde, perché il suo avversario può copiare le sue mosse.

Vengono subito avanzate ipotesi sul Nim a tre piatti: nella partita giocata come esempio, il primo giocatore riesce a vincere perché riduce il gioco ad una partita a due piatti, svuotando il terzo.

La questione di partenza, su cui lavorare nel laboratorio è dunque:

COMPITO 1- come si vince il Nim? E perché?

La traccia di soluzione che viene data dai docenti fa riferimento alla scrittura dei numeri in binario. In realtà il suggerimento è solo virtuale, perché il collegamento fra la scrittura binaria dei numeri dei biscotti nei piatti e la strategia vincente è tutta da scoprire.

Nell'interazione tra ragazzi e docenti, alcune congetture vengono ipotizzate:

- ci vuole un dispari per vincere
- se ci sono tutti pari si perde.

A questo punto gli ingredienti per arrivare alla strategia vincente ci sono tutti e sta ai ragazzi cimentarsi nello scoprire il come si vince ed il perché si vince a questo gioco, data una certa configurazione iniziale.

Prima di lasciare spazio ai ragazzi per il lavoro del laboratorio, il docente ritorna sul Chomp, proponendo il Chomp sui grafi, cioè una variante in cui invece di mangiare pezzetti di cioccolata, si mangiano pezzetti di grafi. Viene data la regola di questo gioco: ogni giocatore può scegliere se mangiare un lato o un vertice del grafo. Ogni volta che si mangia un lato non si mangiano i suoi vertici, mentre ogni volta che si mangia un vertice, si devono mangiare anche tutti i lati che lo toccano. Perde chi è costretto a mangiare l'ultimo elemento. Il compito in questo caso consiste nel *pensare a diversi tipi di grafi e trovare le strategie vincenti dei Chomp relativi.*

Il laboratorio - osservazioni

Alcuni ragazzi hanno affrontato il problema del contare il numero dei sottoinsiemi di un insieme di n elementi, lavorando a questa sfida con impegno ed entusiasmo. I ragazzi impegnati in questo compito hanno contato tutte le possibilità, partendo dal fatto che un sottoinsieme di un insieme dato può contenere o no il primo elemento, può contenere o no il secondo elemento e così via. Un gruppo che ho seguito da vicino ha costruito una sorta di diagramma ad albero, in cui venivano contate le varie possibilità. La soluzione è stata raggiunta in questo modo costruttivo, e nessuno ha cercato di dimostrare la regola per induzione.

Ancora una volta torna il discorso delle conoscenze dei ragazzi a questo livello scolastico: il grado di formalismo che forse i docenti si aspettavano,. Probabilmente non è stato ancora raggiunto da questi studenti. Inoltre, l'impostazione data dai docenti alle tre giornate è stata molto informale e le nozioni basilari sono state introdotte costruttivamente, senza troppi formalismi. Era quindi prevedibile che i ragazzi non indugiassero poi sulla sistemazione rigorosa dei loro risultati, una volta che li avessero raggiunti.

D'altra parte, va sottolineato anche il fatto che gli stimoli dati ai ragazzi sono stati numerosissimi e che il tempo a loro disposizione per affrontare i vari problemi era poco, se si voleva arrivare a chiarire bene le questioni affrontate.

Moltissimi ragazzi si sono dedicati al gioco del Nim, prima giocando delle partite con numeri di piatti e di biscotti variabili e poi, prendendo spunto dai suggerimenti dati dal docente, scrivendo i numeri in binario e cercando una strategia relativa alle somme di cifre binarie.

In questa attività la comprensione del legame tra la strategia vincente per il Nim e la scrittura in binario ha richiesto diverso tempo, ed una continua interazione con i tutors, che hanno "guidato" i

ragazzi verso la soluzione. La difficoltà principale incontrata dai ragazzi è stata capire come collegare la somma dei numeri scritti in binario con la parità dei numeri di biscotti nei piatti. In realtà le congetture su come si vince al Nim erano state elaborate sulla base delle partite giocate ed osservate. L'importanza della parità era chiara a quasi tutti i gruppi, ma mancava il passaggio al sistema binario. In questo caso, l'interazione con i tutors è stata cruciale: il lavoro di guida è stato fondamentale nell'indirizzare le congetture dei ragazzi nella giusta direzione. Con esempi, espliciti enunciati di possibili regole vincenti, controesempi a confutare supposizioni errate dei ragazzi, i tutors hanno portato gli studenti a capire che bisognava ottenere tutti numeri pari nella somma, cambiando le cifre nelle colonne dispari⁸.

Osservazioni – In questa seconda giornata è emersa come importante la figura dei tutors, che forse erano stati meno importanti nella prima. Se i docenti hanno impostato la lezione in modo analogo alla precedente, magari con meno teatralità, e cercando di sistemare alcune delle nozioni date in modo organico, sono stati poi i tutors ad aiutare i ragazzi a tessere i sottili fili che collegano il *gioco giocato* con il *gioco analizzato*. L'interazione tra tutors e studenti ha messo in luce aspetti dell'attività matematica che riproducono in piccolo il lavoro fatto dai matematici veri e propri: nel dialogo continuo fra gli studenti impegnati nella ricerca di strategie e giustificazioni e tutors, sono state prodotte congetture, esempi, controesempi, confutazioni di alcune congetture, verifiche di altre, fino ad arrivare ad una prova certa della funzionalità della strategia trovata nella pratica del gioco. L'interazione tra pari nei gruppi e gli scambi continui (e spesso richiesti esplicitamente dai ragazzi) con i più esperti tutors ha permesso il raggiungimento di ottimi risultati, anche se è mancata la formalizzazione, che come ho già rilevato, forse è ancora fuori dalla portata di studenti di questa età.

...per terminare la seconda giornata: Il gioco del 15

Alla fine del laboratorio, dopo che i ragazzi hanno terminato il loro lavoro sul Nim, i docenti, rientrati in aula, hanno proposto il *Gioco del 15*, una versione numerica di un gioco che fa parte del gruppo dei giochi a blocchetti mobili, cioè costituiti da blocchetti scorrevoli inseriti all'interno di una scatola, liberi di muoversi solo negli spazi vuoti, senza superare i confini della scatola stessa.

Nel gioco del 15, i blocchetti numerati dall'uno al quindici possono scorrere in una scacchiera 4 x 4 grazie alla sedicesima posizione vuota e devono essere rimessi in ordine, partendo da una configurazione qualsiasi. La configurazione finale da ottenere è quella indicata in figura 3.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Figura 3- Configurazione finale del gioco del 15

Il docente ha raccontato che nell'Ottocento fu offerta una ricompensa a chi riusciva a risolvere il puzzle 14-15, reso famoso da Sam Loyd nella sua 'cyclopedia of puzzles': tale rompicapo consisteva nel portare i numeri della scacchiera nella posizione con il 14 ed il 15 scambiati, come nell'illustrazione di figura 4.

⁸ Per una discussione dettagliata della soluzione trovata da un gruppo di ragazzi vedi la relazione di Delucchi allegata.

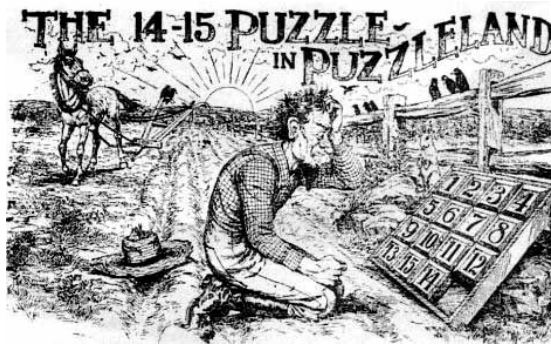


Figura 4- Il 14-15 puzzle del 1878

La domanda posta dal docente è stata la seguente:

C'è una strategia per risolvere il gioco del 15? È sempre possibile risolverlo? E se sì, come si fa nel caso in cui il 14 ed il 15 siano scambiati?

L'idea della soluzione viene suggerita dal docente attraverso l'analisi di una particolare configurazione, in cui vengono contati tutti i numeri più piccoli di ogni numero nelle caselle, che lo seguono nella scacchiera, cioè che stanno alla sua destra.

Alla fine di questo conteggio, si fa la somma dei numeri trovati. Se guardiamo la configurazione di base di figura 3, vediamo che tale somma vale 0, perché qualunque numero noi consideriamo, non ci sono numeri più piccoli che lo seguono nella scacchiera. Nella configurazione con il 14 ed il 15 scambiati, la somma in questione vale 1, perché il 14 è l'unico numero minore di 15, che lo segue.

Se si dimostra che con ogni mossa non si cambia la parità della somma, non si può mai arrivare alla somma della configurazione coi numeri scambiati, partendo da quella di base.

In generale, da un gioco (cioè da una configurazione) con somma dispari si arriva alla configurazione con i numeri scambiati, mentre da un gioco con somma pari si arriva alla configurazione di base e le due non possono comunicare tra loro.

Quindi i compiti su cui lavorare sono i seguenti:

COMPITO 1 - *Dimostrare che una mossa non cambia la parità della somma*

COMPITO 2 - *All'interno di due giochi del 15 aventi somma pari, si può sempre passare ad un'altra configurazione con somma pari? (in altre parole, la parte del grafo del gioco data dalle configurazioni con somma pari è connesso?)*

Tali compiti vengono lasciati come approfondimenti per un eventuale lavoro autonomo, al di fuori del laboratorio.

Osservazioni sul giorno 3

La giornata inizia con delle osservazioni sul gioco del 15: il docente rileva che definizioni date frettolosamente possono portare a commettere degli errori. Il riferimento è al metodo della somma introdotto il giorno precedente, che non funziona nel caso in cui il gioco del 15 considerato abbia la casella vuota in basso a destra. La questione era stata posta da alcuni ragazzi, che si erano trovati a lavorare con un gioco del 15 ricomposto nella configurazione di base, ma con la casella vuota in alto a destra.

La precisazione è stata apprezzata dai ragazzi che hanno visto un loro commento ripreso dal docente, mostratosi ancora una volta molto disponibile al dialogo.

A questo punto i docenti hanno fatto il punto della situazione, cercando di risistemare tutta la mini-teoria sui giochi vista fino a quel punto e di allargare il campo a giochi che ammettono la possibilità di pattare le partite.

La discussione si è poi spostata sulla differenza tra il concetto di esistenza e quello di costruibilità di un oggetto matematico, per spaziare poi al concetto di isomorfismo. I docenti hanno tentato in questo modo di allargare la visuale a concetti che facessero intravedere la bellezza della matematica e la sua potenza in termini di generalità. In particolare, il Prof. Pernazza ha parlato della scoperta di isomorfismi, cioè della scoperta che due oggetti *concretamente diversi* sono lo *stesso oggetto astratto*, cioè hanno una struttura comune, come di un'esperienza da vivere. Credo che i ragazzi in questo stralcio di conversazione abbiano potuto vedere la passione del matematico di professione, la sua visione globale della materia e la profondità del suo pensiero.

Il gioco del Sudoku

Dopo la digressione di tipo filosofico, i docenti hanno introdotto il gioco del Sudoku, popolarissimo e conosciuto da tutti i ragazzi, che avevano portato con sé dei libri, che hanno in seguito utilizzato come supporto. Viene specificata una caratteristica del Sudoku, che lo distingue dal parente *number place*: la simmetria rispetto al centro, o per rotazione etc.

Vengono immediatamente poste alcune domande:

DOMANDA 1 – *Qual è il numero minimo di dati che bisogna fornire perché la soluzione di un Sudoku sia unica?*

Se si tentasse di rispondere a questa domanda con un metodo enumerativo, non si finirebbe praticamente mai, perché il numero dei Sudoku 9×9 svolti è dell'ordine di $6,67 \times 10^{21}$.

Seguendo il solito metodo, i docenti partono da casi più semplici per poi arrivare al caso generale, ponendo la seguente:

DOMANDA 2 – *Quanti Sudoku 4×4 esistono? E quanti numeri bisogna dare inizialmente perché abbia soluzione unica?*

Vengono poi illustrate alcune variazioni sul tema, proponendo griglie di dimensioni diverse su cui lavorare con le stesse regole del Sudoku tradizionale⁹.

La sfida che viene lanciata dai docenti è la seguente:

COMPITO 1- *Make your own Sudoku! Costruire un Sudoku con al più 30 indizi, che abbia soluzione unica e, se possibile, che sia un Sudoku perfetto.*

Il laboratorio – osservazioni

I ragazzi, singolarmente o in gruppi, hanno cercato di costruire un Sudoku perfetto svolto, ciascuno seguendo strategie diverse. Poi hanno cominciato a cancellare dei numeri, cercando di mantenere una soluzione unica con i dati ancora visibili.

La regola più furba usata da diversi ragazzi che ho osservato, è stata di riempire una colonna con i numeri da 1 a 9 e poi la successiva con i numeri da 2 a 9, seguiti da 1 e così via, scalando ogni volta di 1. una tecnica analoga è stata quella di riempire un quadrato 3×3 con i numeri da 1 a 9 in progressione nelle tre righe e poi riempire il quadrato adiacente permutando le righe e così via fino a riempire tutte le caselle.

Una volta ottenuto il Sudoku completo, vengono eliminati alcuni numeri dalla prima riga, e successivamente altri numeri dalla seconda in modo da poter determinare alcuni dei restanti numeri della seconda in modo univoco, con i dati iniziali della prima riga a disposizione. Si procede così per tutte le righe, fino ad ottenere un Sudoku con al massimo 30 dati iniziali¹⁰.

⁹ Per un quadro completo di tutte le varianti vedi la relazione di Delucchi.

¹⁰ Per un'analisi dettagliata di questa soluzione trovata da un gruppo di ragazzi, vedi la relazione di Delucchi.

Alla fine del laboratorio il Prof. Pernazza ha portato in aula un computer, con un programma capace di risolvere i Sudoku e determinare il numero di soluzioni.

La verifica al computer ha visto un Sudoku vincere la sfida, ed un altro soddisfare la condizione della soluzione unica e dei 30 dati assegnati, dopo una piccola correzione successiva alla prima verifica.

Altri gruppi hanno prodotto dei number place che sono stati affinati attraverso controlli continui con il calcolatore.

Osservazioni - In questa terza giornata, i ragazzi hanno lavorato in modo poco sistematico, e solo in alcuni gruppi la ricerca di un metodo rigoroso ha portato alla soluzione del problema. In realtà, molti ragazzi hanno perso interesse all'attività dopo aver costruito il proprio Sudoku ed aver verificato la difficoltà del compito attraverso diversi tentativi. Due gruppi in particolare si sono rivolti a noi perfezionando per chiederci informazioni varie sulle facoltà scientifiche, o per parlare di altri argomenti di matematica. Due ragazzi che avevano partecipato al Progetto Porta dell'Università di Pisa, hanno cominciato a riguardare i loro appunti ed a discutere con altri ragazzi che non conoscevano quel materiale. La loro attenzione è stata catturata dalle diverse dimostrazioni del teorema di Pitagora, e si sono divertiti a sfidare i compagni a capire quali erano le dimostrazioni sbagliate e perché.

Per quanto riguarda l'attività sul Sudoku, come abbiamo già osservato in precedenza, l'attenzione dei ragazzi è stata ravvivata quando il docente ha portato in aula il computer. L'agonismo è stato risvegliato, così come la volontà di arrivare ad una soluzione accettabile e che rispettasse le richieste del problema. Il computer è stato usato da alcuni come fonte di continue verifiche dei passi fatti nell'eliminazione dei numeri. Certamente, alcuni ragazzi hanno utilizzato un metodo per tentativi, senza pensare alle condizioni che andavano rispettate per poter eliminare dei numeri. Tuttavia, il controllo rigoroso del computer ha permesso anche a questi ragazzi di focalizzare l'attenzione sul compito loro assegnato e produrre comunque dei risultati.

Nel caso dei gruppi che hanno lavorato in modo sistematico, invece, la scelta dei tempi da parte del docente è stata perfetta: nel momento in cui avevano trovato una loro soluzione e stavano perdendo interesse per l'attività, l'entrata in scena di uno strumento di verifica efficace ed affidabile li ha spinti ad affinare il loro "prodotto" cercando di rispettare le regole in maniera ancora più metodica.

Conclusioni

Le tre giornate di laboratorio sui giochi sono state impegnative e fruttuose per i ragazzi partecipanti. Ho cercato di seguire il percorso intrapreso da docenti e studenti in queste tre giornate, mettendo in evidenza l'approccio dei docenti, il loro uso degli strumenti e le interazioni docenti/studenti e studenti /tutors, oltre che il modo di lavorare degli studenti.

Il bilancio di questa esperienza è positivo anche dal punto di vista di un osservatore, quale sono stata in questa occasione. La forte componente di interattività dei laboratori fornisce indicazioni importanti anche da un punto di vista didattico:

- la formazione di piccoli gruppi ha permesso fruttuose interazioni tra studenti più capaci e studenti più "deboli";
- l'interazione dei gruppi con matematici più esperti, quali i tutors, ha permesso ai ragazzi di "fare matematica" essendo assistiti e guidati da qualcuno che potesse confutare le loro congetture errate e/o incanalare le loro supposizioni corrette nella giusta direzione;
- la disponibilità dei docenti e il loro approccio costruttivo al pezzetto di teoria dei giochi trattato, ha permesso ai ragazzi di fare un'esperienza matematica a 360 gradi.

Certo, la riproduzione di queste modalità nella scuola non è semplice, né facilmente realizzabile, ma alcuni spunti possono essere tratti per organizzare il lavoro in modo coinvolgente e fruttuoso per i nostri studenti.

Appendici

Appendice 1 - Programma della Settimana Matematica

Settimana Matematica: presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa (Largo Pontecorvo, 5), dal 5 al 8 febbraio, con il seguente Calendario:

Lunedì 5 febbraio: 15.30-18.30

- Presentazione
- Laboratori

Martedì 6 febbraio: 9-13; 14.30-18.30

Mattina:

- Prof. Dario Bini: Matematica e Mondo Reale: il problema di Google e altre storie
- Visita alla struttura
- Una lezione universitaria di Matematica

Pomeriggio:

Laboratori

Mercoledì 7 febbraio: 9-13; 14.30-18.30

Mattina:

Incontro con giovani laureati sulle prospettive di lavoro della laurea in Matematica

Pomeriggio:

Laboratori

Giovedì 8 febbraio: 15.30-18.30

- Incontro con studenti del Corso di Laurea in Matematica
- Prof. Giovanni Alberti: Presentazione del Corso di Laurea in Matematica
- Consegna attestati.

Appendice 2 - Laboratori

Argomenti dei laboratori:

1. *Passatempi e giochi: alla ricerca di problemi e soluzioni.*
2. *Tecniche per mescolare le carte, feste di compleanno e figurine di calciatori: quale legame?*
3. *A proposito di poliedri: dimostrazioni, confutazioni e robot*
4. *Impossibilità di un sistema democratico*
5. *Problemi e congetture in aritmetica: da Goldbach a Wiles*
6. *Giochi di Lego*
7. *Geometria e Algebra: le curve dei Greci e le curve di Cartesio*
8. *I numeri transfiniti*

g) Le attività svolte sono state utili per capire meglio cos'è la Matematica?				
ATTIVITA'	Decisamente NO	Più NO che SÌ	Più SÌ che NO	Decisamente SÌ
Laboratorio				
Una lezione di tipo universitario				
Conferenza				
Incontro con laureati				

5) Per quale motivo ti sono piaciute le attività che hai apprezzato di più?

6) Per quale motivo non ti sono piaciute le attività che hai apprezzato meno?

7) Nel tuo laboratorio si sono svolte:

	Per nulla	Qualche volta	Molto
Spiegazioni teoriche da parte dei docenti	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Lavori individuali e di gruppo da parte degli studenti	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

8) I locali e l'attrezzatura a disposizione erano adeguati?

Decisamente NO Più NO che SÌ Più SÌ che NO Decisamente SÌ

9) Fra quali corsi di laurea eri indeciso prima di venire allo stage?

10) L'esperienza dello stage ti sarà utile nella scelta dei tuoi studi futuri?

Decisamente NO Più NO che SÌ Più SÌ che NO Decisamente SÌ

11) Dopo questa esperienza, qual è la tua idea riguardo alla possibilità di iscriverti a Matematica?

12) In definitiva, valeva la pena partecipare a questa esperienza?

Decisamente NO Più NO che SÌ Più SÌ che NO Decisamente SÌ

13) Vorresti che nell'insegnamento della Matematica si desse maggiore attenzione (indicare con una crocetta non più di 3 caselle):

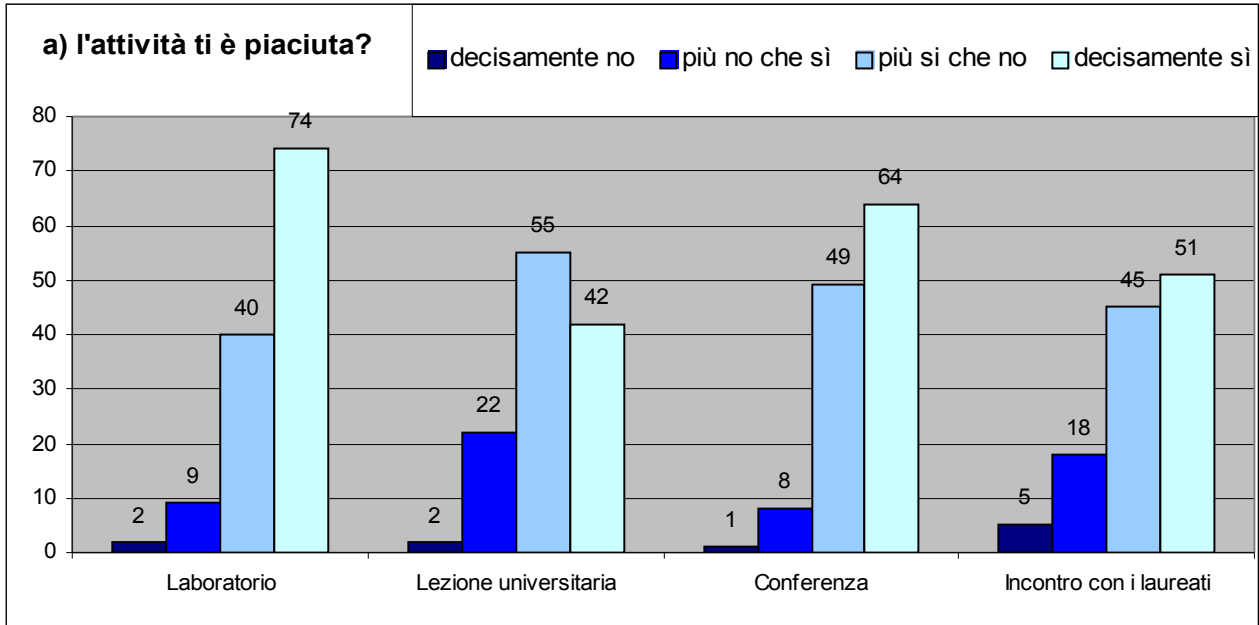
- a dare le motivazioni delle cose che si studiano
- all'aspetto sperimentale e pratico
- ad attività in cui gli studenti a gruppi affrontano problemi significativi
- all'aspetto formale
- ai problemi che hanno ispirato le teorie e gli argomenti che si studiano
- all'inquadramento storico
- alle ricerche fondamentali più recenti
- alle relazioni con altre discipline ed alle applicazioni tecnologiche
- alle implicazioni nella vita quotidiana
- altro

14) Eventuali commenti, osservazioni, suggerimenti:

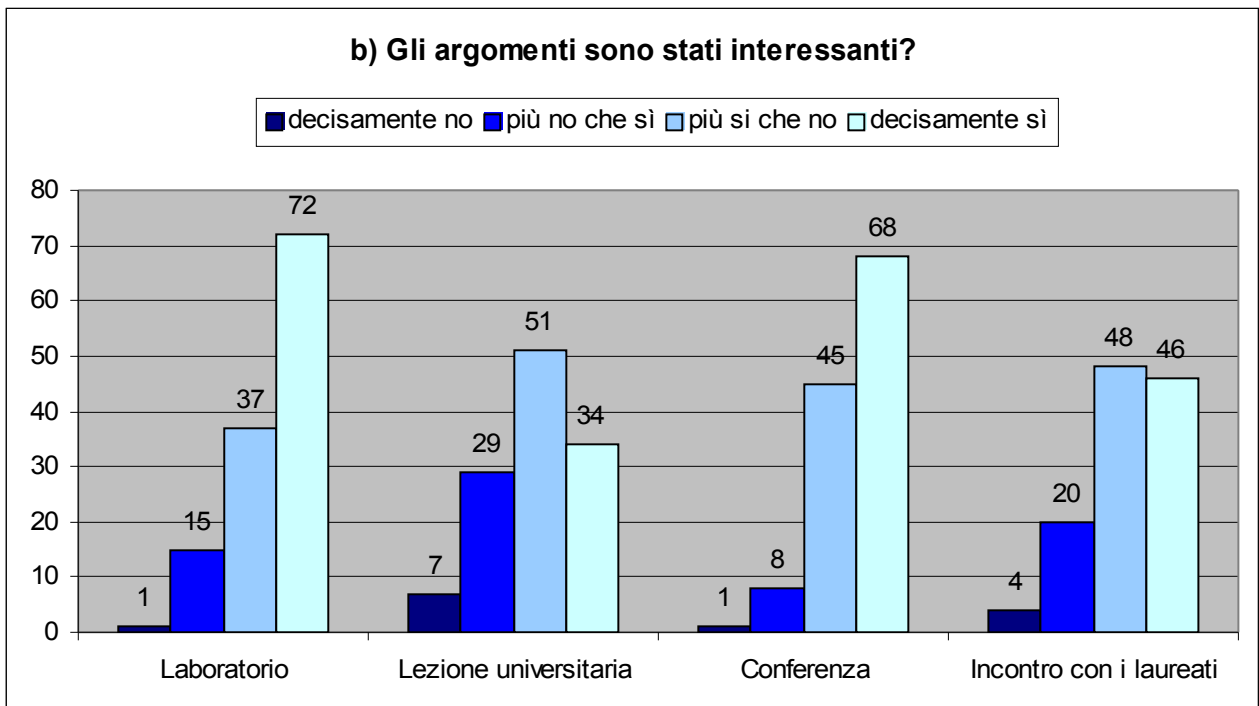
Appendice 4 - Risultati dei questionari

Questi sono i grafici con le risposte dei ragazzi che hanno partecipato all'iniziativa. Erano in totale 126 ragazzi.

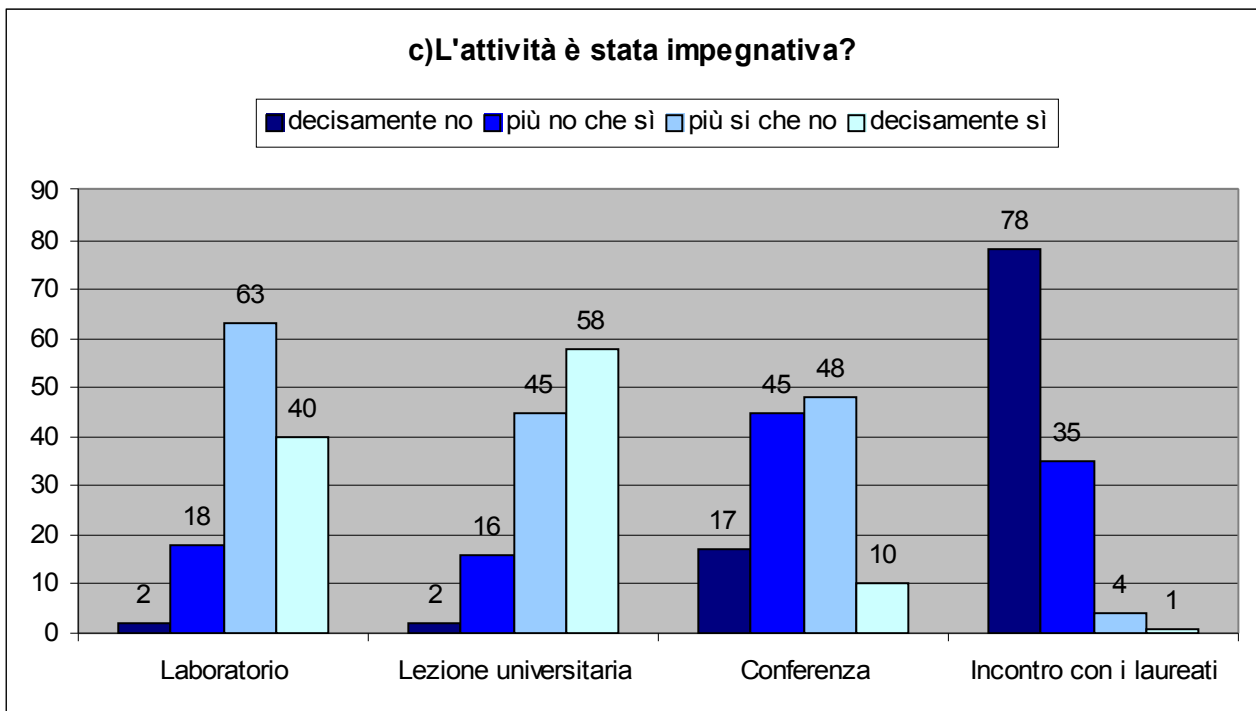
I colori più scuri delle colonne rappresentano le risposte più negative, quelli chiari le risposte positive.



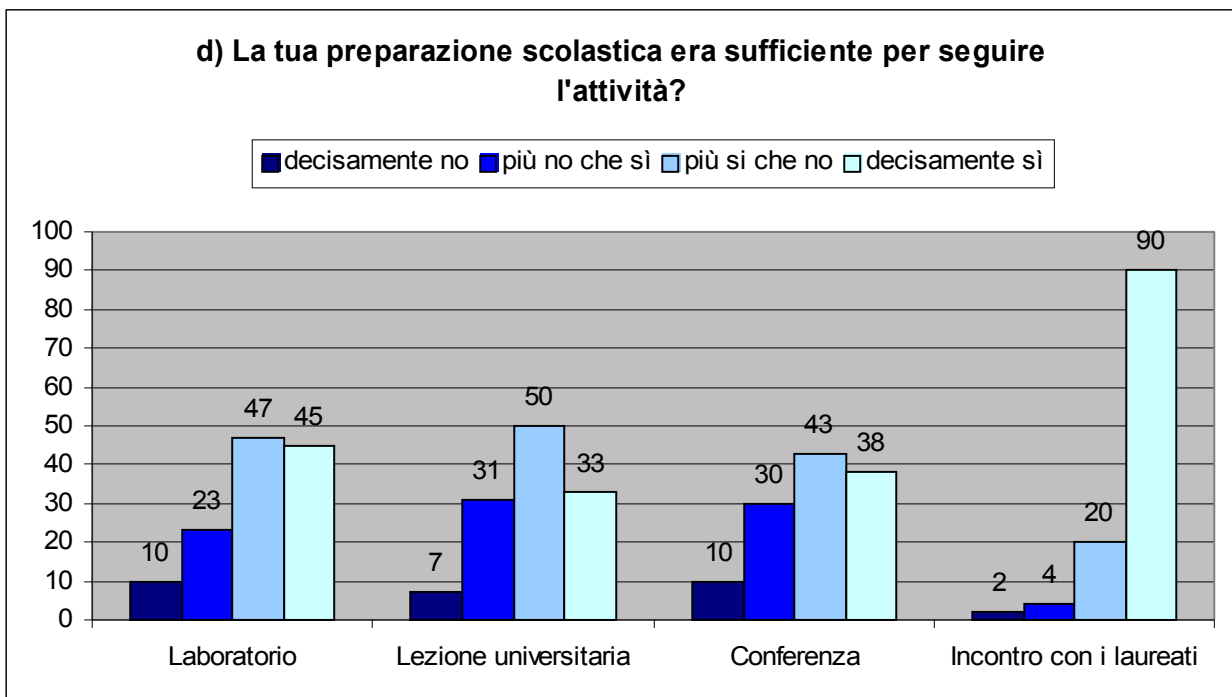
Da questo primo grafico si deduce che l'attività che i ragazzi hanno gradito più di tutte è stata il laboratorio, seguita da conferenza, incontro con i laureati, lezione.



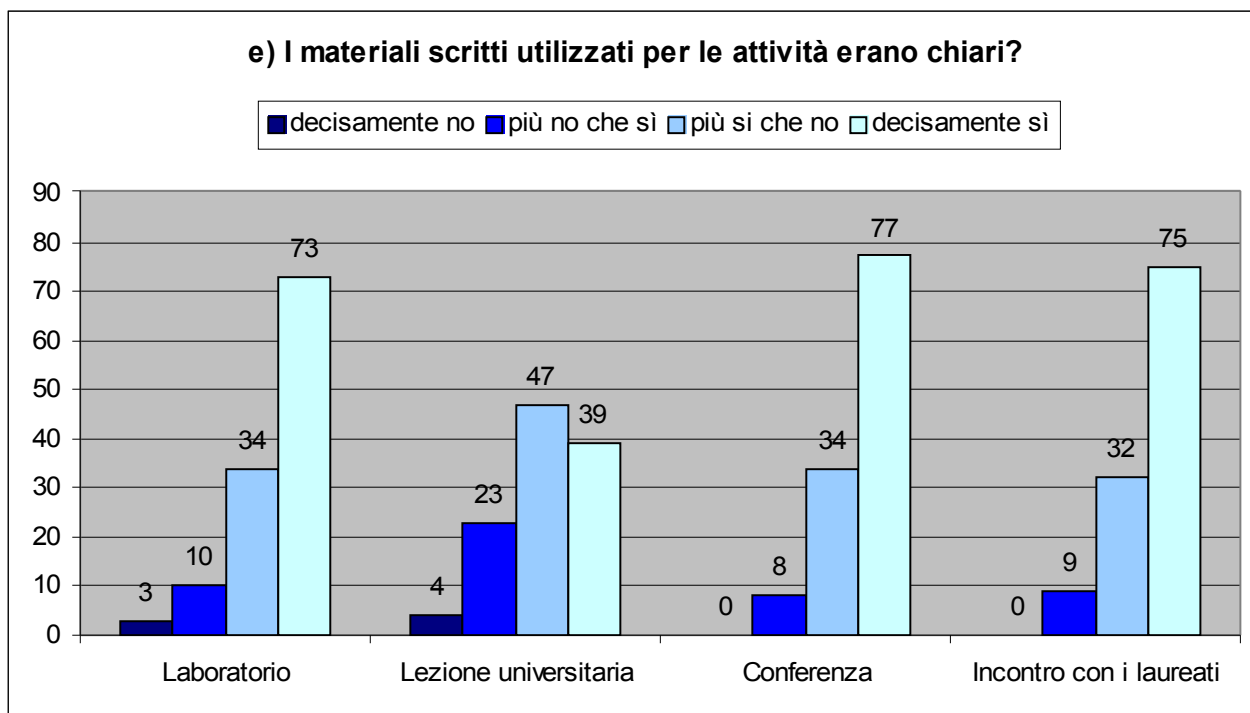
Gli argomenti sono stati tutti interessanti per i ragazzi, ma maggiormente i laboratori e la conferenza.



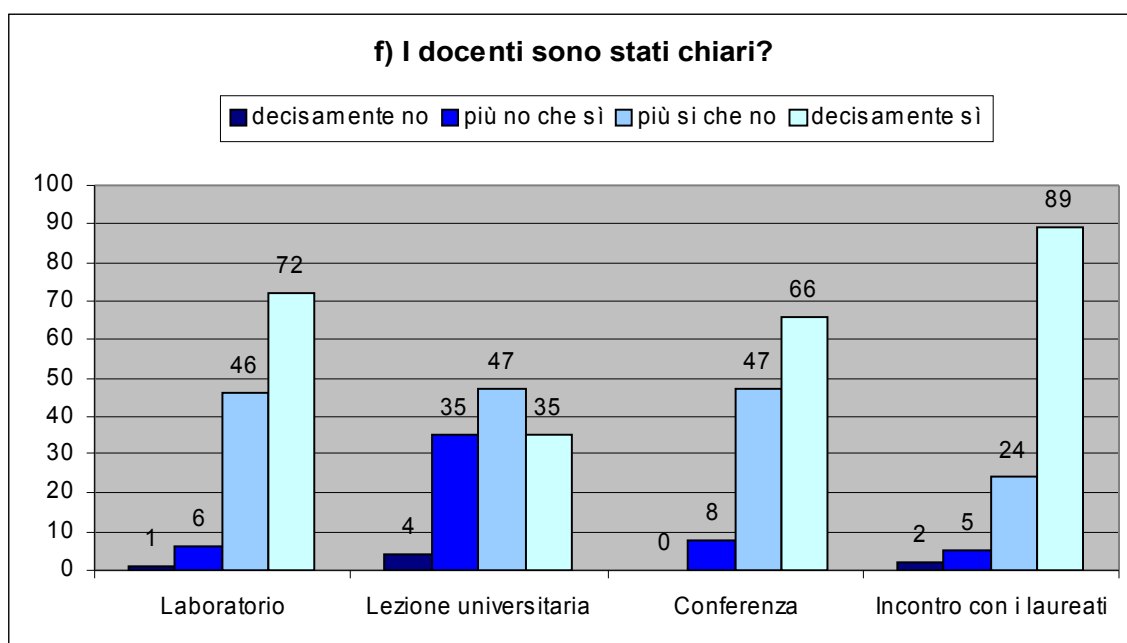
La cosa meno impegnativa è stata ovviamente l'incontro con i laureati, seguito dalla conferenza, la lezione universitaria e ultimo il laboratorio. Sono 103 gli studenti che hanno giudicato complessivamente impegnativi lezione universitaria e laboratorio, ma un numero maggiore di studenti (58 contro 40) hanno risposto decisamente sì relativamente alla lezione universitaria. La difficoltà dell'argomento e la rigosità dell'esposizione hanno fatto certamente la loro parte in questo.



A parte per l'incontro con i laureati, la propria preparazione scolastica è ritenuta sufficiente (più sì che no e decisamente sì) per seguire le attività da un minimo 81 allievi su 126 (per la conferenza) ad un massimo di 92 su 126 per il laboratorio.

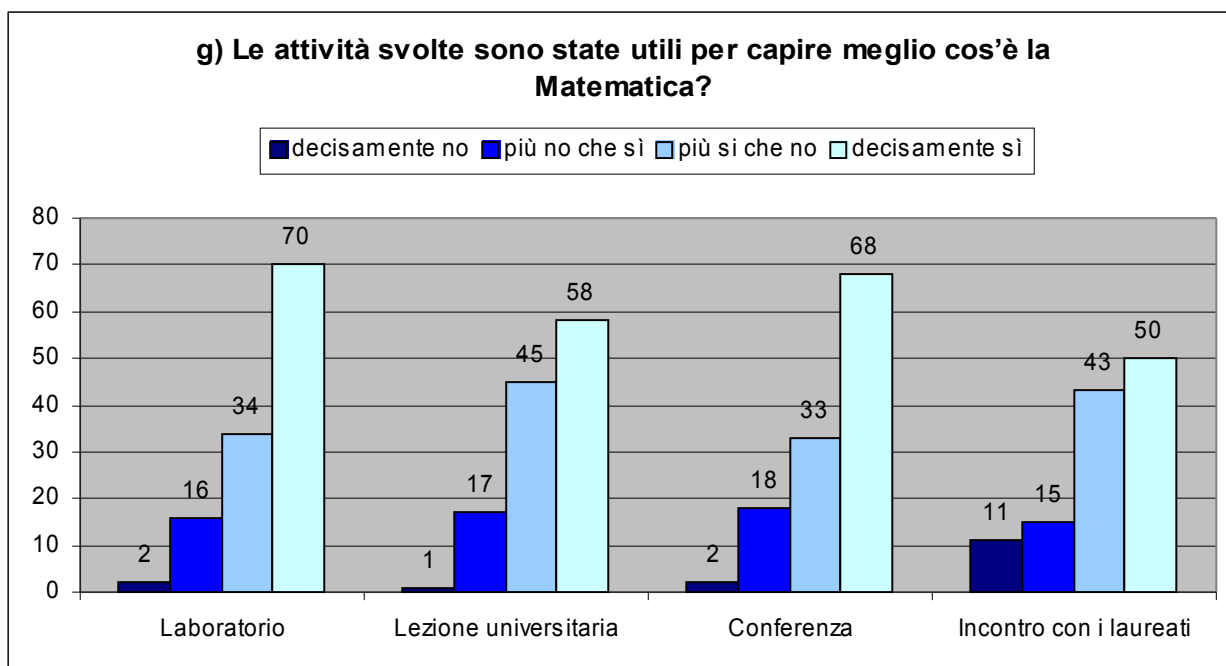


A parte la lezione universitaria, i materiali sono stati ritenuti decisamente chiari da più di 70 allievi mentre almeno altri 30 li ritenuti più chiari che non chiari. Tra tutto almeno 100 su 120 li hanno ritenevano abbastanza chiari.

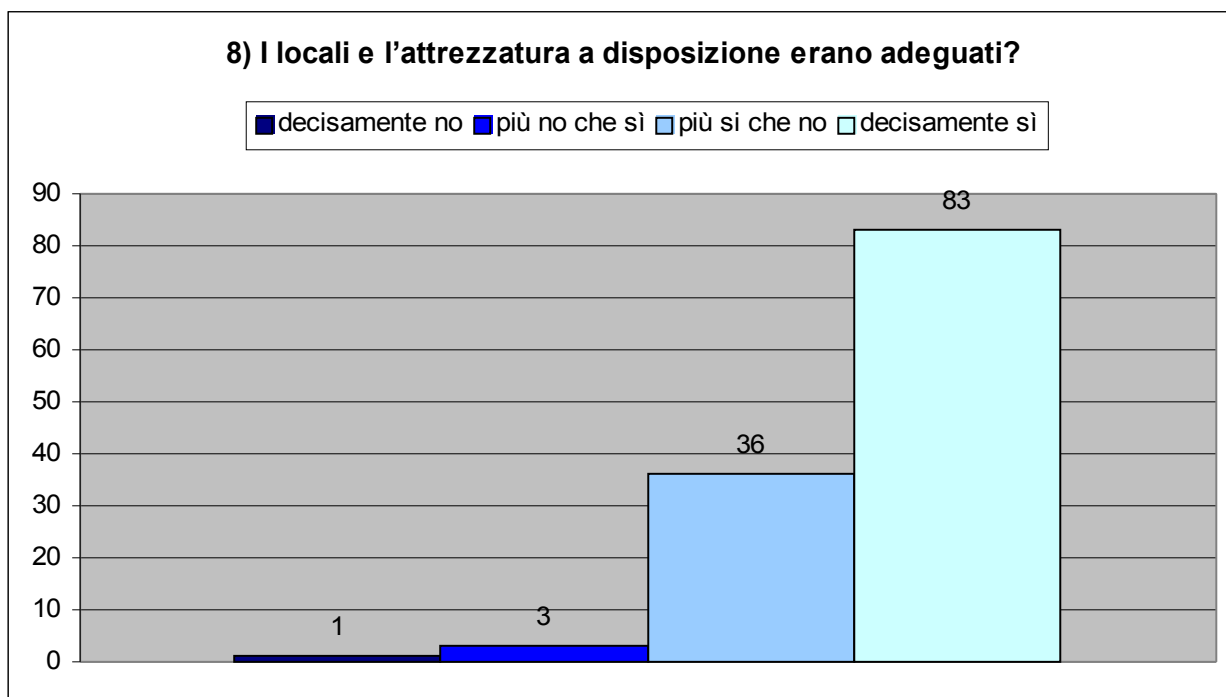


Lasciando da parte l'incontro con i laureati, i docenti del laboratorio sono stati i più chiari per i ragazzi, mentre lezione universitaria e conferenza prendono dagli studenti "voti" un po' più bassi. Non sorprende che la lezione universitaria sia la meno chiara, anche perché i ragazzi non sono abituati ad un approccio di questo tipo. Nonostante ciò, nelle nostre conversazioni abbiamo rilevato che ad alcuni ragazzi la lezione era piaciuta più del laboratorio, perché più simile a quanto facevano in classe.

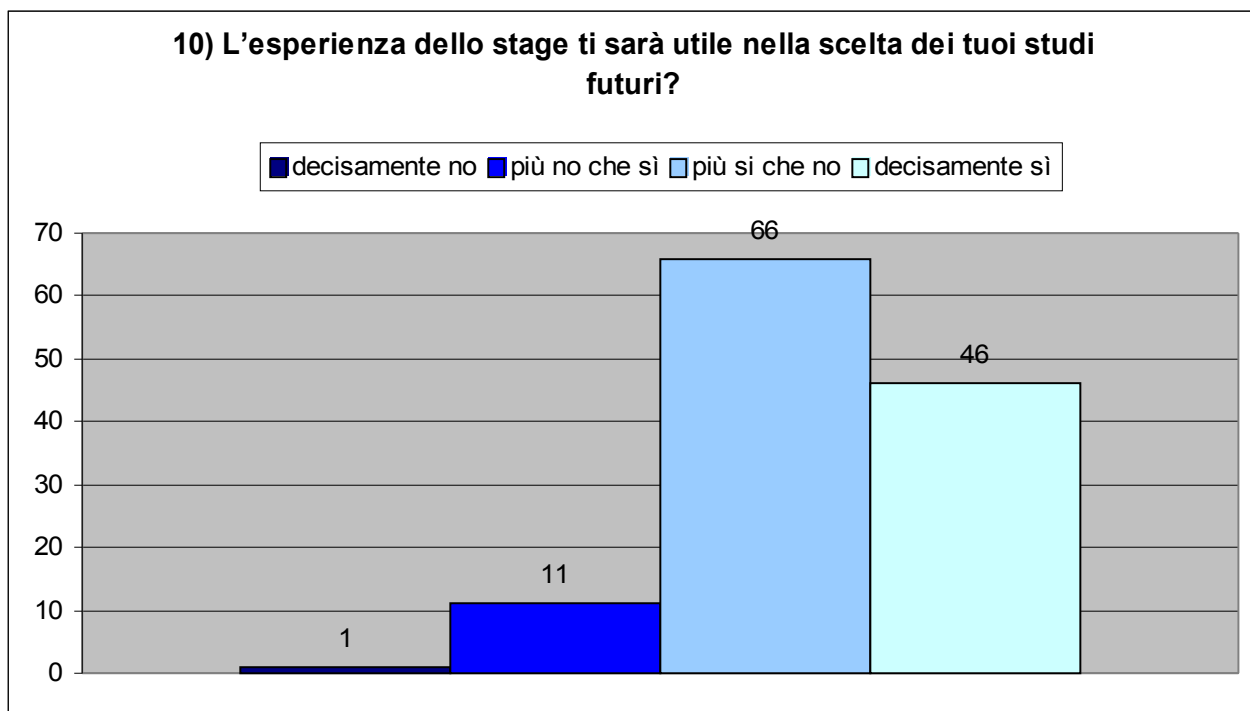
Per 93 studenti su 126 l'incontro con i laureati è stato utile per capire meglio cos'è la matematica,



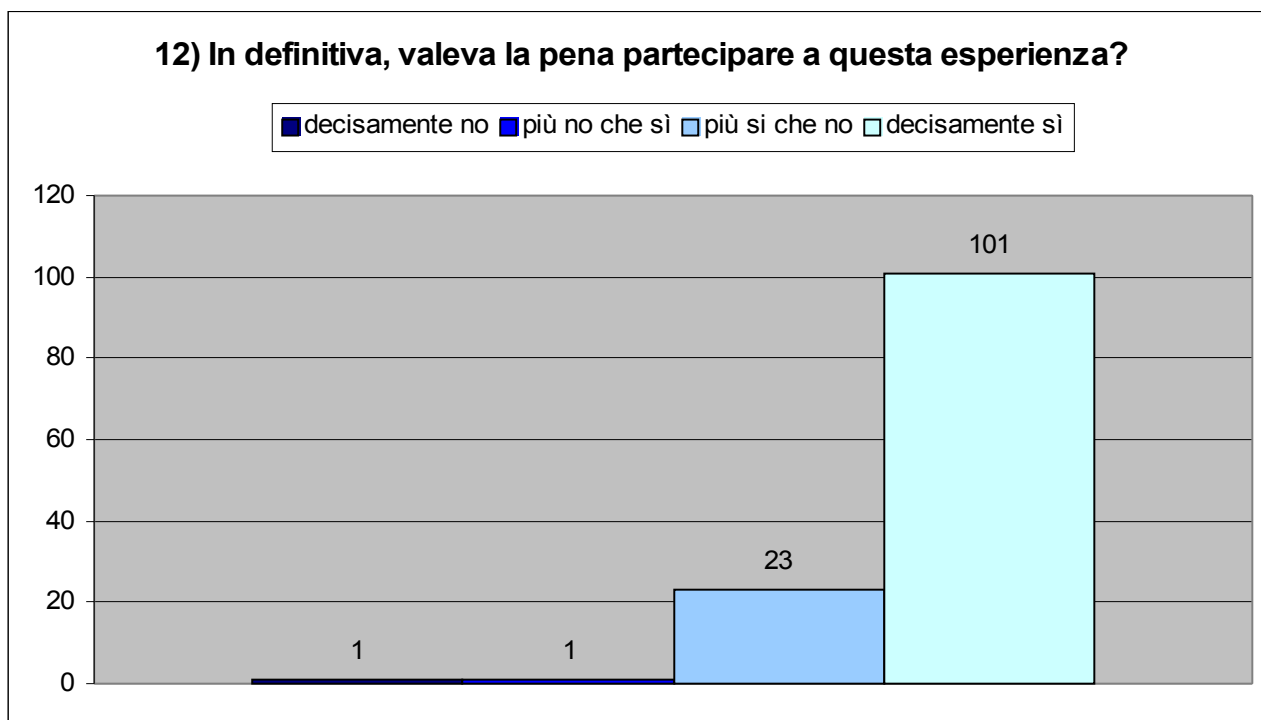
mentre per le altre attività si superano i 106 studenti su 126 (84 %).



Direi che le risposte giudicano i locali e l'attrezzatura più che adeguati.



È un dato importante che quasi tutti gli studenti giudichino l'esperienza della Settimana Matematica come utile nella scelta negli studi futuri (52,3% più sì che no e 36,5% decisamente sì). Uno solo dice decisamente no (partecipante del laboratorio 3).



Un solo ragazzo dice che decisamente non valeva la pena partecipare all'esperienza (è un allievo del laboratorio 1), ed un'altro solo risponde più no che sì (del laboratorio 5); per tutti gli altri valeva abbastanza la pena (18,3%) o decisamente la pena (80,1%) di partecipare. Complessivamente il 98,4% dei ragazzi è contento di aver partecipato alla Settimana Matematica e questo è davvero un buon risultato per gli organizzatori.