Corso di perfezionamento

Strategie didattiche per favorire un atteggiamento positivo verso la matematica e la fisica

RELAZIONE SUL TIROCINIO

LA SETTIMANA MATEMATICA

PASSATEMPI E GIOCHI: ALLA RICERCA DI PROBLEMI E SOLUZIONI

Massa, 07/04/2007
D.ssa Maria Grazia Marzario

Introduzione

La Settimana Matematica è un'iniziativa del Dipartimento di Matematica e del Corso di Laurea in Matematica dell'Università di Pisa rivolta ai ragazzi che frequentano gli ultimi due anni delle Scuole Superiori. Parte integrante di questa manifestazione sono i laboratori, pensati per mettere i ragazzi a diretto contatto con l'attività matematica accompagnandoli nello studio di problemi e situazioni nuove.
Questa relazione fa riferimento al lavoro svolto nell'ambito del laboratorio "Giochi e passatempi – alla ricerca di problemi e soluzioni", curato dal prof. Giovanni Gaiffi e dal prof. Ludovico Pernazza.
Ogni pomeriggio comincia con la presentazione di un tipo di gioco da parte di un docente; vengono proposte delle domande e dei problemi su cui lavorare.
I ragazzi si sono divisi a gruppetti, formatisi spontaneamente, e in un tempo indicato viene lasciata loro la possibilità di lavorare autonomamente dedicandosi alla soluzione dei problemi proposti.

Qui di seguito ho analizzato il lavoro svolto nei singoli pomeriggi. Ogni giornata è suddivisa in due parti: prima viene analizzata l'attività di docenti e ragazzi, poi seguono le osservazioni fatte durante il lavoro autonomo di questi ultimi nei gruppi.

Argomenti del laboratorio
(per una descrizione più dettagliata degli argomenti trattati e delle soluzioni dei giochi proposte, vedi la relazione di Delucchi)

Giorno 1
- *Cioccolata avvelenata: il gioco del Chomp.*
- *Il gioco dei divisori.*

Giorno 2
- *Dal Chomp all'Iperchomp.*
- *Buffet di biscotti: il gioco del Nim.*
- *Il Chomp sui grafi.*
- *Il gioco del 15.*

Giorno 3
- *Numeri e simmetria: il Sudoku.*

Giorno 1

Il gioco del **<u>Chomp</u>** viene presentato in modo informale, disegnando alla lavagna una tavoletta di cioccolato con 5x4 quadratini, di cui l'ultimo in basso a sinistra è contrassegnato: si tratta del quadratino avvelenato. Il gioco è la sfida tra due contendenti che devono, ad ogni mossa, mangiare almeno un quadratino di cioccolato. Chi mangia il quadratino avvelenato perde, vince quindi chi obbliga l'avversario a mangiare il veleno. La regola è che i giocatori hanno una bocca rettangolare e un "morso" valido stacca un rettangolo il cui vertice "in alto a destra" coincide con l'angolo della tavoletta.

Dopo aver spiegato il gioco, si è giocata qualche partita alla lavagna tra responsabile e tutori, curando di esprimere chiaramente le considerazioni che motivano le mosse e di accogliere e discutere i suggerimenti dei ragazzi. Viene introdotta l'idea di grafo del gioco, in modo da scrivere tutte le situazioni di gioco possibili, collegandole con delle frecce che indicano da quale situazione a quale altra si può passare con una mossa valida. Ogni configurazione viene contrassegnata come vincente o perdente. Viene poi introdotta l'idea della strategia vincente e si generalizza con il caso nxn.

Alla fine della discussione vengono proposte le seguenti domande:

Domanda 1 *Come trasformare i sospetti in ragionamenti veri? Come si può scrivere un ragionamento che mostra che esiste una strategia vincente e che il primo giocatore vince sempre?*

Domanda 2 *Come vince il primo giocatore nel caso del Chomp $2\times n$?*

Domanda 3 *Come vince il primo giocatore nel caso del Chomp 3×4?*

Viene introdotto un nuovo gioco relativo ai divisori dei numeri, con regole analoghe a quelle del Chomp, in cui ad ogni turno si deve eliminare un divisore e tutti i suoi multipli. Viene assegnata la seguente domanda:

Domanda 4 *Cosa c'entra questo gioco con il gioco del Chomp?*

I ragazzi vengono lasciati soli per svolgere i compiti assegnati; possono scegliere su che cosa concentrare la loro attenzione e non è necessario risolvere tutto.

Osservazioni sul laboratorio

L'argomento trattato, il modo di proporlo, la continua interazione richiesta ai ragazzi e spesso fornita spontaneamente ai docenti, la brevità degli interventi dei docenti stessi sono stati gli ingredienti vincenti di questa prima giornata di laboratorio. Non ci sono stati cali di attenzione e distrazioni o disinteresse da parte di alcuno. Quello che mi ha sorpreso di più è stata la spontaneità con cui tutti hanno cominciato a prendere appunti, senza nessun suggerimento esterno. Il fatto che i docenti non abbiano fornito materiale, né cartaceo né di altro genere, ha certamente contribuito a questo. Per la mia esperienza in classe (durante le spiegazioni anche i ragazzi interessati generalmente non sono portati a scrivere se non invitati dall'insegnante) mi sarei aspettata un atteggiamento diverso, a maggior ragione in un contesto come questo in cui si parla di giochi e i docenti "giocano" in prima persona. Tranne una ragazza, degna di lode, gli altri hanno preso appunti in maniera più o meno disordinata, ma la cosa più interessante è stato esaminare ciò che hanno prodotto autonomamente sul cartaceo. Inizialmente, com'è naturale, ci sono stati schizzi, schemi di partite, scarabocchi vari. Su nostra insistenza hanno provato a mettere per iscritto ciò di cui stavano ragionando ancor prima di arrivare alla soluzione. Ho seguito in particolare un gruppo che stava procedendo a tentativi e li ho invitati a scrivere ciò che congetturavano anche se era sbagliato. Abbiamo provato ad esprimere i concetti prima a parole, ma la messa per iscritto dei pensieri appena espressi è risultata molto difficile. Una ragazza del gruppo mi ha detto : "E' la prima volta che cerco di scrivere sui miei ragionamenti e mi sembra difficilissimo: una cosa è parlare, un'altra scrivere e spesso non trovo le parole per esprimere correttamente ciò che penso". Abbiamo provato anche a far

scrivere la soluzione ai ragazzi che erano riusciti a risolvere il quesito 2, ma le difficoltà incontrate non sono state poche . Questo mi ha fatto riflettere sulla possibilità in classe di far scrivere i ragazzi sui loro ragionamenti: le dimostrazioni di geometria euclidea potrebbero essere un terreno fertilissimo, sia per abituarli alla riflessione, sia per cercare di seguire, anche se minimamente, il procedere del loro ragionamento.
Un altro aspetto è emerso nel lavoro tra i gruppi: la difficoltà di passare dal particolare al generale e la diffidenza nei confronti del passo induttivo, come se i ragazzi avessero paura che qualcosa potesse scappare al loro controllo. Sarebbe stato interessante (purtroppo non lo abbiamo fatto) sapere se l'induzione era per loro un argomento o comunque una procedura nuova o se era già stato affrontato in classe, per verificare quanto il ragionamento induttivo possa essere vincolato al tipo di esercizi (standard) che generalmente si propongono. Rimane comunque un ottimo spunto di riflessione da proporre in classe.

Giorno 2

I docenti riprendono dal lavoro lasciato incompiuto il giorno precedente, discutendo la soluzione del Chomp 2xn e riproponendo e risolvendo il gioco dei divisori, mostrando che non è altro che una particolare istanza del gioco del Chomp. Dall'esempio considerato si deduce che con i numeri che sono prodotto di due fattori primi, del tipo $p^a q^b$, il gioco dei divisori di tale numero è un Chomp (a+1)x(b+1). Viene quindi generalizzata la situazione proponendo un gioco in cui i numeri considerati hanno tre fattori primi: i divisori non si dispongono più su una griglia bidimensionale ma tridimensionale. Si generalizza passando al caso n-dimensionale chiamato **Iperchomp**. Viene chiesto dai docenti se anche per l'Iperchomp vale l'affermazione che il primo giocatore ha la strategia vincente. Aiutati dai ragazzi, i docenti mostrano che la risposta è affermativa, potendosi costruire il grafo del gioco e quindi identificare ogni mossa come vincente o perdente.
A questo punto è stato spiegato esplicitamente che si sta compiendo un processo tipico dell'attività matematica: esaminare una situazione cercando di estrarne ciò che ha carattere generale, ossia generalizzare. Opportunamente il docente passa alla sistemazione di un frammento di teoria, dando dei nomi a nozioni che ha utilizzato in modo informale per tutta la giornata precedente. Il grafo di un gioco è lo schema che nasce scrivendo tutte le situazioni possibili del gioco dato e collegandole con delle frecce che indicano da quale situazione a quale altra si può passare con una mossa valida. I giochi considerati fino ad ora sono giochi "finiti" e poiché le mosse sono in numero finito e tutte le possibili configurazioni che compongono il relativo grafo sono finite, si può concludere che ogni gioco "finito" ha un grafo "finito". Un ragazzo a questo punto solleva la questione: questa nozione di finitezza coincide con il fatto che il gioco abbia termine? La risposta è negativa: è necessario che non si verifichino situazioni cicliche (come le situazioni di stallo, ad esempio nel gioco degli scacchi). Se il grafo del gioco non ha cicli, il gioco termina entro un numero finito di mosse, ed in questo caso il gioco viene chiamato "finito-finito". I ragazzi intuiscono che in un gioco "finito-finito" si può seguire ogni possibile evoluzione di ogni situazione e di conseguenza etichettarla come vincente o perdente. La conclusione di tutta l'argomentazione sui giochi finiti e sui giochi finiti-finiti è che quando un gioco finito ha un massimo, ossia una situazione del grafo dalla quale si possono raggiungere tutte le altre muovendosi lungo le frecce, allora il primo giocatore possiede una strategia vincente.

I compiti assegnati sono i seguenti:

Compito 1 *Ripensare al grafo di un gioco.*

Compito 2 *Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme con un numero finito n di elementi?*

Una delle particolarità del gioco del Chomp consiste nel fatto che il gioco ha un massimo. I docenti ora si chiedono cosa può succedere se viene eliminata questa proprietà: viene proposto il gioco del **Nim**. Si tratta di una sfida tra due contendenti: i giocatori si trovano davanti ad un certo numero (finito) n di piatti, in ognuno dei quali c'è un numero (finito) di biscotti. Ogni giocatore, a turno, deve scegliere un solo piatto e mangiare almeno un biscotto da questo piatto. Perde chi si ritrova davanti agli n piatti vuoti e quindi non può più mangiare.
I docenti iniziano a giocare delle partite alla lavagna come per il precedente gioco del Chomp, ma questa volta la reazione dei ragazzi, fatta di suggerimenti e proposte, è immediata: riescono a capire subito la strategia.
Vengono avanzate ipotesi sul Nim a tre piatti.

La questione di partenza, su cui lavorare nel laboratorio, è dunque la seguente:

Compito 1 *Come si vince il Nim? E perché?*

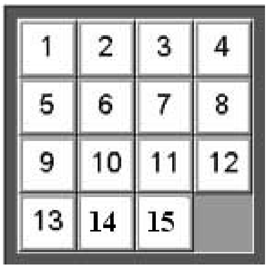
I docenti propongono una traccia di soluzione che fa riferimento alla scrittura dei numeri in notazione binaria. Nell'interazione tra ragazzi e docenti vengono ipotizzate alcune congetture:
- ci vuole un dispari per vincere;
- se ci sono tutti pari si perde.

Prima di lasciare i ragazzi a lavorare da soli, il docente ritorna sul Chomp proponendo il Chomp sui grafi, cioè una variante in cui si mangiano pezzetti di grafi anziché pezzetti di cioccolata: ogni giocatore può mangiare un vertice o un lato; se si mangia un lato dal grafo si cancella il lato in questione ma non i suoi vertici; se invece si mangia un vertice si cancellano anche tutti i lati che lo toccano. Perde chi è obbligato a cancellare l'ultimo elemento.

Il compito lasciato ai ragazzi è il seguente:

Compito 2 *Pensare a diversi tipi di grafi e trovare le corrispondenti strategie vincenti.*

Come ultimo stimolo, al termine del laboratorio, viene proposto un ulteriore gioco: **il gioco del 15**.
Si tratta della versione numerica di un gioco che si inserisce nella tradizione dei giochi a "blocchetti mobili" costituiti da una serie di blocchetti mobili che possono scorrere all'interno di una scatola attraverso spazi vuoti, senza poter superare i confini della scatola stessa, dalla quale non possono essere sollevati e riposizionati.
Nel gioco del 15, i blocchetti numerati dal n. 1 al n. 15, possono scorrere in una scacchiera 4x4 grazie alla sedicesima posizione che è vuota, e devono essere rimessi in ordine, partendo da una configurazione qualsiasi.
La configurazione finale deve essere la seguente:



Il gioco del 15 – configurazione finale

L'invenzione di questo gioco risale ad un portalettere americano Noyes Chapman, anche se il famoso inventore di giochi Samuel Loyd cercò sempre di attribuirsene la paternità includendolo nella sua "cyclopedia of puzzles", offrendo addirittura un premio a chi avesse risolto il gioco partendo dalla configurazione di base in cui il 14 ed il 15 erano scambiati di posto.
La domanda posta dai docenti è la seguente:

Domanda 1 *C'è una strategia per risolvere il gioco del 15? È sempre possibile risolverlo? E se sì, come si fa nel caso in cui il 14 ed il 15 siano scambiati?*

I docenti suggeriscono la soluzione attraverso l'analisi di una particolare configurazione, in cui vengono contati tutti i numeri più piccoli di ogni numero nelle caselle, che lo seguono nella scacchiera, cioè che stanno alla sua destra. Alla fine si fa la somma dei numeri trovati: tale somma deve valere zero. Nella configurazione con il 14 ed il 15 scambiati, la somma in questione vale 1, perché il 14 è l'unico numero minore di 15 che lo segue. Se si dimostra che con ogni mossa non si cambia la parità della somma, allora non si può mai arrivare alla somma della configurazione con i numeri scambiati, partendo da quella di base.
Si può concludere che da un gioco con somma dispari si arriva alla configurazione con il 14 ed il 15 scambiati, mentre da un gioco con somma pari si riesce ad arrivare alla configurazione "vincente" e le due soluzioni non possono essere collegate tra loro.

I compiti su cui lavorare sono i seguenti (lasciati come approfondimento per un lavoro autonomo al di fuori del laboratorio):

Compito 1 *Dimostrare che una mossa non cambia la parità della somma.*

Compito 2 *All'interno di due giochi del 15 aventi somma pari, si può sempre passare ad un'altra configurazione con somma pari? (in altre parole, la parte del grafo del gioco data dalle configurazioni con somma pari è connesso?).*

Osservazioni sul laboratorio

L'interazione dei ragazzi coi docenti caratterizza tutto il lavoro di questa giornata: hanno cominciato a prendere un po' di confidenza, sia con gli insegnanti, ma soprattutto con gli argomenti trattati. Numerose sono state le domande per chiedere spiegazioni o curiosità. Il processo di generalizzazione presentato dai docenti e la formalizzazione degli argomenti trattati il giorno precedente forniscono ai ragazzi gli strumenti necessari per capire i nuovi argomenti proposti: avanzano loro stessi ipotesi di soluzione. A differenza del giorno precedente, quando tutti hanno cercato di risolvere lo stesso compito, in questo pomeriggio i problemi affrontati sono stati diversi. E diversa è stata anche la natura delle difficoltà incontrate: accanto alla ricerca della strategia vincente, è emersa l'evidente difficoltà nel “maneggiare” i numeri espressi nel sistema binario e nel cogliere il collegamento tra questa scrittura e la soluzione del gioco proposto. Fondamentale in questa giornata è stato l’intervento dei tutors, che abilmente sono riusciti a ben indirizzare le intuizioni dei ragazzi e spesso a spronarli a farsi domande e ad affrontare il problema da differenti punti di vista.

Giorno 3

La giornata inizia con una discussione sul gioco del 15 proposto ieri: i docenti fanno notare come il metodo della somma non funziona nel caso in cui il gioco del 15 abbia la casella vuota in alto a sinistra anziché in basso a destra. La precisazione è stata apprezzata dai ragazzi perché è nata da una osservazione di uno di loro: gli insegnati si sono mostrati, ancora una volta, molto disponibili al dialogo.
Dopo due giorni di lavoro i docenti hanno fatto il punto della situazione, cercando di dare una sistemazione a tutta la teoria sui giochi vista fino a quel momento e di allargare il campo ai giochi che ammettono la possibilità di situazioni di “partita patta”. La discussione si è spostata poi sull’approfondire il concetto di esistenza e costruibilità di un oggetto matematico, per spaziare poi al concetto di isomorfismo. Il gioco dei divisori con numeri a due fattori primi è “in fondo la stessa” cosa del Chomp sulle tavolette di cioccolato, e l’Iperchomp è “in fondo identico” al gioco dei divisori generale. Questo è quello che hanno voluto mettere in luce i docenti: una delle attività principali della matematica è lo scoprire isomorfismi tra cose apparentemente diverse e che non avrebbero, a priori, nessun motivo per essere collegate.
Dopo la digressione, i docenti hanno introdotto il gioco del **Sudoku**, popolarissimo e conosciuto da tutti i ragazzi. A differenza del “parente” number place, che consiste generalmente di alcuni numeri inseriti in una griglia, che si richiede di completare secondo le ben note regole, il vero Sudoku deve essere simmetrico rispetto al centro o per rotazione.
Vengono poste alcune domande:

Domanda 1 *Qual è il numero minimo di dati che bisogna fornire perché la soluzione di un Sudoku sia unica?*

I docenti fanno osservare che se si tentasse di rispondere cercando di enumerarli tutti non si arriverebbe mai al termine perché il numero dei Sudoku 9x9 svolti è dell’ordine di $6{,}67 \times 10^{21}$

L’altra domanda posta è:

Domanda 2 *Quanti Sudoku 4×4 esistono? E quanti numeri bisogna dare inizialmente perché abbia soluzione unica?*

I docenti illustrano alcune variazioni sul tema, proponendo griglie di dimensioni diverse su cui lavorare con le stesse regole del Sudoku tradizionale.

Viene assegnato il seguente compito:

Compito 1 *Make your own Sudoku! Costruire un Sudoku con al più 30 indizi, che abbia soluzione unica e, se possibile, che sia un Sudoku perfetto.*

I ragazzi vengono lasciati al loro lavoro per circa due ore. Tutti hanno accolto con entusiasmo la sfida, provando a costruire un proprio Sudoku. Il punto di partenza è stato per tutti quello di tentare di costruire un Sudoku "svolto" valido, con l'intenzione di cancellare successivamente più numeri possibili mantenendo l'unicità della soluzione. Varie sono state le strategie seguite, ma solo due gruppi hanno portato a termine il compito assegnato. Alla fine del tempo concordato è stato possibile verificare la validità delle soluzioni presentate e migliorarle grazie ad un programma che il prof. Pernazza ha messo a disposizione sul proprio computer che permette di risolvere i Sudoku. Ottima la scelta dei tempi per l'utilizzo del programma al computer: una sua presenza iniziale avrebbe forse allentato l'attenzione anche dei più caparbi e la sua comparsa alla fine è servita per ravvivare l'attenzione di tutti i partecipanti.

Osservazioni sul laboratorio

Forse per la stanchezza accumulata in questi tre giorni di attività, o forse anche per la difficoltà della consegna lasciata dai docenti (non si chiedeva di giocare, ma di pensare a come si gioca per creare un gioco nuovo), in questo pomeriggio i ragazzi hanno lavorato con minore sistematicità e minore attenzione. Tutti si sono cimentati nella creazione di un proprio Sudoku, per la maggior parte non usando nessuna strategia ma procedendo a caso. Alcuni, fra i più esperti, hanno cominciato a strutturare il loro lavoro sulla base di congetture e tenendo presente Sudoku già totalmente o parzialmente risolti (molti ragazzi avevano con se manuali o riviste su questo gioco). La maggior parte si è scoraggiata dopo qualche tentativo e solo due gruppi hanno prodotto qualcosa di interessante, lavorando autonomamente e chiedendo a volte consigli ai tutors. Alcuni ragazzi, che avevano partecipato al Progetto Porta, hanno proposto agli appartenenti ai loro gruppi problemi e quesiti che avevano affrontato in quella situazione. Abbiamo approfittato del momento di stasi per fare due chiacchiere con loro, relativamente ai motivi che li hanno spinto a partecipare a questa iniziativa, alle impressioni che ne avevano avuto e ai loro futuri progetti di studio (i risultati di questa chiacchierata sono stati riportati nella relazione sui laboratori).

C O N C L U S I O N I

Dalle brevi conversazioni che ho avuto con alcuni ragazzi nei vari pomeriggi sono emerse osservazioni e spunti interessanti. I ragazzi hanno mostrato di aver apprezzato molto il lavoro svolto in queste attività di laboratorio. Tutti concordano sul fatto che ciò che è stato proposto in questi pomeriggi è molto lontano dalla "matematica fatta in classe", e non solo per gli argomenti presentati. E' diverso il modo di far lezione da parte dei docenti. Qualcuno ha osservato che a differenza di quanto ha fatto nel suo corso di studi, qui gli argomenti sono stati presentati "al contrario": non la teoria e poi un esempio che la mette in pratica, ma prima il gioco, poi lo studio di ciò che si fa, e da qui la teoria che ci sta sotto. Un altro ragazzo mi ha fatto notare che i docenti non solo erano alla cattedra ma anche fra i banchi e non solo fisicamente: spesso si chiedeva l'interazione dei ragazzi e si accoglievano tutti i suggerimenti, anche quelli sbagliati, non dicendo a priori che lo erano, ma facendo vedere dove si sarebbe arrivati se si fosse percorsa la strada indicata (potrebbe essere un invito a fare altrettanto con i nostri alunni!).
Importante è stata per loro la figura del tutor, a mezza strada tra insegnante e "alunno bravo", considerato un valido punto di riferimento e di supporto.

Relativamente poi alle difficoltà incontrate, tutti hanno manifestato un crescente disagio nel mettere per iscritto ciò che riuscivano ad esprimere a parole, nel formalizzare oltre che nel concludere: "la soluzione sembrava lì a portata di mano e invece…".
Qualcuno ha osservato di aver apprezzato molto il modo con cui i docenti e i tutors hanno guidato i ragazzi a risolvere i problemi proposti: l'approccio sistematico ai problemi è risultato particolarmente vantaggioso non solo come risparmio di tempo, ma anche come "controllo" della situazione.
Anche se nessuno di loro, secondo quanto hanno detto, ha intenzione di iscriversi a Matematica, la visione che di questa materia hanno avuto in questa breve occasione è stata tutt'altro che negativa.
"…si può fare matematica anche senza annoiarsi…"
<u>Se questo è il messaggio che è passato fra tutti, si può affermare che questa occasione ha avuto degli ottimi risultati.</u>