Corso di perfezionamento

Strategie didattiche per favorire un atteggiamento positivo verso la matematica e la fisica

LABORATORIO 1

LA SCELTA DEL LIBRO DI TESTO

Gruppo: M.T.Cappagli, G.Carignani, L.Dentoni, V.Lombardi, M.G.Marzario, I.Olivato, S.Pecchia, G.Tommasi, D.Venturi

Massa, 07/04/2007
D.ssa Maria Grazia Marzario

Perché è stato scelto questo laboratorio

Il libro di testo dovrebbe essere un valido strumento e supporto per ragazzi ed insegnanti, e invece spesso costituisce un grosso problema.
Per la difformità della composizione del nostro gruppo di lavoro (insegnanti di ruolo e precari, insegnanti di scuola secondaria inferiore e superiore), è stato possibile confrontare e condividere esperienze comuni e diverse in merito.

Il problema nasce a monte: la scelta del libro di testo

Scegliere un testo non è semplice: non si riesce mai ad analizzarlo a fondo perché si arriva a conoscerlo solo dopo che si è adottato e ci si comincia a lavorare. D'altro lato il numero e la mole delle offerte editoriali è immane, e spesso vincolante, nel senso che l'adozione di un tomo comporta generalmente l'adozione di tutta l'opera. Il problema diventa ancora più complesso se si pensa che in molti istituti, per motivi *"logistici"*, viene adottato un testo comune, senza purtroppo poter tener conto dei diversi stili degli insegnanti e delle esigenze particolari delle classi.
Nel caso di insegnanti precari, il problema è leggermente diverso: non si tratta di scegliere, ma di usare nel modo migliore un testo adottato da altri.

Il significato attribuito al libro di testo

Come educatori e/o insegnanti il libro di testo viene caricato di parecchie responsabilità.
E' il punto di riferimento fondamentale nella sua parte teorica: spesso viene aperto a lezione e confrontato con quanto detto durante la spiegazione. In tal modo si insegna ad usare il libro di testo non solo per *"ritrovare"* la teoria sviluppata in classe (leggere testi di matematica non è banale), ma anche, laddove la spiegazione si discosti dal testo, a criticare il testo stesso: lo studente da un lato è educato ad un studio autonomo, dall'altro apprende un'abilità che sarà fondamentale per il proseguo degli studi. Grande importanza viene attribuita alla parte *"pratica"*: il libro di testo è fonte di esercizi e grazie agli esercizi svolti (presente ormai i tutti i testi) può essere considerato un vero e proprio esercitatore per i ragazzi.
Da queste considerazioni nasce un dilemma (a cui non abbiamo dato soluzione): nella scelta del libro di testo è più importate verificare che vi sia una *"buona"* teoria (dove per buona si intende accessibile ai ragazzi) oppure dei *"buoni"* esercizi? Meglio una teoria *"fai da te"* e dei validi esercizi sul testo, oppure un buon testo di riferimento e un marea di fotocopie per la parte *"pratica"*?

Aspettative

Le caratteristiche che deve avere un libro di testo sono molteplici, ma forse le più urgenti sono due: il linguaggio e l'impostazione degli argomenti.
Si richiede che il linguaggio sia rigoroso, ma semplice. Forse sarebbe più appropriato un approccio colloquiale (che non vuol dire banalizzare ciò di cui si sta trattando) (tipo Venè-Michelotti - Edizioni Sansoni) per il biennio e, con gradualità, arrivare ad un linguaggio formale alla fine del percorso di studi.

Relativamente ai singoli argomenti, si richiede che questi vengano introdotti, anche da un punto di vista storico e, se possibile, che venga illustrato il motivo della scelta della trattazione di tali argomenti. Sarebbe opportuno che le trattazioni venissero proposte tramite *"problem solving"* e che per uno stesso problema (dove possibile) venissero presentate modalità diverse per la soluzione. Da non sottovalutare neppure l'approccio laboratoriale, che garantisce la creazione di collegamenti interdisciplinari (disegno, fisica, ed. tecnica, informatica, storia dell'arte). Infine un occhio di riguardo ad esempi ed esercizi, molto spesso banali (i primi), ripetitivi, troppo calcolosi e meccanici (i secondi).

Provocazioni

Dopo una serie di richieste, tutt'altro che banali, ci siamo fermati un po' a riflettere, ponendoci alcune domande:

- *Avete mai provato a scrivere un libro di testo?*

Date le richieste molteplici e le diverse esigenze espresse, un "libro perfetto" non potrà forse mai essere scritto.

- *Per valutare l'apprendimento, si ricorre forse un po' troppo spesso agli esercizi?*

La matematica, che diventa una sequenza di algoritmi e non di concetti, fa facilmente a meno della parte di teoria svolta *"o no"* sul libro.

- *Chi sono i destinatari del libro? Docenti e/o alunni?*

Per come sono redatti i testi, sembra che gli autori si rivolgano ad un pubblico costituito solo da docenti, o meglio, dal docente "medio" (ma la teoria non dovremmo già saperla?) e nella maggior parte dei casi si cerca di mettere in un testo *"tutto"*, tipo enciclopedia, per paura di tralasciare qualcosa (con la conseguente creazione di tomi esageratamente voluminosi), dando vita alle edizioni per le diverse tipologie di scuola che sono pietose, perché risultato di tagli indiscriminati, e a volte senza logica, del tomo redatto per il liceo scientifico.

Confronto fra libri di testo: i radicali

Alla luce delle riflessioni generali che abbiamo maturato nel nostro gruppo di lavoro, sono entrata nello specifico, analizzando un preciso argomento attraverso il confronto sulle impostazioni e trattazioni che di questo proponevano alcuni libri di testo.

I RADICALI

La scelta di questo argomento è dovuta al rapporto non equo tra l'impegno e la premura con cui lo propongo e i risultati spesso demoralizzanti ottenuti in classe.

Le difficoltà da me incontrate nel presentare i radicali sono duplici: da un lato è forte la necessità di snellire un argomento che agli occhi dei ragazzi sembra essere un po' a se stante e un po' senza nessuna logica interna, con tante formule da imparare *"appiccicate"* qua e là, con quei valori assoluti che ci devono essere quando non sembra e viceversa, con somme e sottrazioni che di fatto, di tali operazioni, hanno solo il nome, e dall'altro lato per la carenza di un sostegno che il libro di testo dovrebbe fornire.

A mio parere, l'impostazione forse più semplice e *"digeribile"*, ma sicuramente la più *"capibile"* e quindi *"accettabile"* per i ragazzi (e per questo motivo è quella che propongo ai miei alunni) è quella che premette la parentela tra radicali e potenze ad esponente razionale, presentando così le proprietà dei radicali come applicazione delle proprietà delle potenze. Purtroppo questo approccio non l'ho riscontrato in nessun libro di testo tra quelli da me consultati fin ora. Sicuramente un motivo ci sarà, ma ad oggi mi è ancora ignoto.

Per questo lavoro ho confrontato tra loro quattro libri di testo, i primi tre da me utilizzati in classe in varie esperienze (perché adottati in precedenza in tali classi), mentre l'ultimo è un testo che utilizzo per prendere esercizi e spunti:

*Trifone Bergamini - "Manuale di algebra 2" - Zanich*elli **[TB]**
Dodero Barboncini Manfredi - "Lineamenti di matematica 2"- Ghisetti e Corvi **[DBM]**
Oriolo Coda - "Algebra e informatica 2"- Mondatori **[OC]**
Venè Michelotti - "Matematica 2"- Sansoni **[V]**

Ho esaminato, attraverso un confronto, prima come vengono introdotti i radicali e di seguito come vengono affrontati.

In tutti i casi è il capitolo precedente a quello delle equazioni di II grado.

INTRODUZIONE

[TB]
Il capitolo comincia così:

"Qual è il numero positivo che elevato al quadrato dà 9? Possiamo rispondere con facilità che 3 ha le caratteristiche cercate; possiamo anche dire che 3 è la radice quadrata di 9 e scrivere $\sqrt{9} = 3$*."*

Considera la radice cubica e poi conclude:

"In generale la radice n-esima è l'operazione inversa della potenza di esponente n"

Di seguito:

"Si può dimostrare che dato un numero reale positivo a e un numero naturale n diverso da 0, esiste uno e un solo numero reale positivo b tale che risulta $a^n = b$*. Def: dato un numero naturale n diverso da 0 e un numero reale a positivo o nullo, la radice aritmetica n-esima di a è quel numero reale b, positivo o nullo, la cui potenza con esponente n è uguale ad a:* $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$ *"*

Non solo non sembra esserci logica nella sequenza dei predicati espressi, ma si può creare dell'inutile confusione nell'utilizzo poco sensato di lettere uguali con valenze diverse, per esprimere prima il concetto di potenza e poi di radicale. Il termine radice aritmetica compare solo qui, mentre si fa un po' di confusione tra radice e radicale. Vengono elencati di seguito i "<u>casi particolari</u>" e tra questi troviamo: •$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ (con dimostrazione) e •*si conviene che* $\sqrt[0]{a}$ *non abbia significato*".

C'è poi un accenno alle condizioni di esistenza per le espressioni letterali (gli esempi richiedono una padronanza non indifferente del calcolo con le disequazioni).

[DBM]
L'argomento comincia con un richiamo ad una parte già precedentemente trattata (a proposito dei numeri reali): l'operazione di estrazione di radice quadrata da un <u>numero positivo o nullo</u> era stata in precedenza definita come operazione inversa dell'elevamento al quadrato: $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$ con $a \geq 0$ e $b \geq 0$. Si fa subito chiarezza su cosa si intende per radice e per radicale (quadratico) e si spiega il perché della limitazione su a e b: mentre per a è chiaro, per b l'argomentazione è la seguente:

"...supponiamo di dover determinare la radice quadrata del numero positivo 4: si può osservare che esistono due numeri (opposti) il cui quadrato è 4. L'operazione di radice quadrata sarebbe quindi definita in modo equivoco se non si precisasse quale dei due numeri scegliere come radice del numero 4; perciò si conviene di scegliere, come radice quadrata del numero positivo 4, il numero positivo +2, cioè il numero concorde di segno con 4:pertanto è $\sqrt{4}$ = 2 e non scriveremo mai $\sqrt{4}$ =-2".

Segue la definizione di radice cubica con l'osservazione che a e b non devono essere necessariamente non negativi, e poi si generalizza con n, puntualizzando che il caso a<0 verrà definito nel seguito. La definizione data non differisce da quella trovata in **[TB]**, ma segue un'osservazione inutile (avendo già supposto $b \geq 0$), che appesantisce ulteriormente quanto appena esposto (poteva forse essere più sensato non metterlo nelle ipotesi ed osservarlo dopo):

"Se n è dispari, b^n ha sempre lo stesso segno di b, e quindi, dall'uguaglianza $b^n = a$ si deduce che, avendo considerato $a \geq 0$, risulta senz'altro $b \geq 0$ ".

Un'osservazione: non parla di radicali aritmetici ed algebrici ma fa la distinzione tra radicali in $\mathbf{R}_0^+$ e radicali in **R**, a partire dall'inizio.

[OC]
L'argomento viene preceduto da una breve introduzione (come è solito fare questo testo per tutto ciò che viene proposto, cercando di dare una collocazione storica, una giustificazione di ciò che viene trattato o semplicemente per richiamare cose già note). Si fa riferimento al fatto che già alle scuole medie i ragazzi hanno lavorato con le radici, quadrate e cubiche (spesso in problemi di geometria), e vi hanno lavorato con la consapevolezza del fatto che queste non sono altro che le operazioni inverse dell'elevamento a potenza (cfr. formule inverse per il calcolo del lato di un quadrato nota l'area o il volume). A tale proposito, si fa osservare che, diversamente dalla somma e dalla moltiplicazione, l'elevamento a potenza possiede due "operazioni inverse" : $x^3 = 8$ e $3^x = 81$ e questo perché l'elevamento a potenza non gode della proprietà commutativa. Segue dicendo:
"*Riteniamo opportuno ricordare le proprietà delle potenze…*" e le elenca, ma poi non sviluppa il discorso in questa direzione e segue la strada classica, dando subito la definizione generale (non differente da quella presente negli altri testi). Fa notare (a differenza degli altri) che l'uguaglianza $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ si ha per definizione (anche se non giustifica mai che $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n}$ e lo usa come dato di fatto). Anche qui troviamo "*…si conviene che $\sqrt[0]{a}$ non abbia significato".*
A differenza degli altri autori, in questo testo i radicali non vengono presentati in relazione ai numeri irrazionali; l'unico accenno lo troviamo in questa parte dell'esposizione, come semplice osservazione: *"l'estrazione di radice, agendo su **Q**, può portare ad un risultato che non appartiene a **Q**"* . E' degno di nota, infine, il tentativo di giustificare la presenza di tale argomento prima di entrare nel vivo della trattazione: i radicali *"servono non solo in*

geometria, ma anche in algebra, ad esempio, nella risoluzione delle equazioni di secondo grado e di grado superiore".

[V]
I radicali vengono presentati all'interno del capitolo relativo ai numeri reali (particolarmente significativa l'introduzione, nella quale si cerca di fare chiarezza sul concetto e sull'uso dei numeri reali e nella quale è presente una breve ma incisiva nota storica). Il capitolo inizia con una domanda:

"Perché non sono sufficienti i numeri razionali?"

Il lettore è invitato a riflettere su alcuni "*problemini*": il rotolamento di un cerchio su una retta r, la determinazione del raggio di una circonferenza sotto determinate condizioni, e per finire un problemino algebrico: $x^2 = 8$ ha soluzioni razionali? (la teoria delle equazioni di II grado non è ancora stata affrontata). Segue dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{8}$, introduzione di R, e nel presentare gli irrazionali distingue tra irrazionali algebrici:

"...se si possono pensare come soluzione di una equazione del tipo $x^n = a$ con $n \in N-0$"

e irrazionali trascendenti. Si chiede come sono fatti gli irrazionali algebrici e come poter operare con loro. A tal fine considera prima gli irrazionali soluzione dell'equazione $x^2 = a$ (con $a \geq 0$) e dà la seguente definizione:

"Dati due numeri reali positivi o nulli p e q, q è la radice quadrata aritmetica di p, e si indica con $\sqrt[2]{p}$, se e solo se $q^2 = p$"

Da notare l'uso frequente della calcolatrice e il confronto col calcolo "manuale".
Non ci sono altre precisazioni o osservazioni e si parte con le proprietà.

PROPRIETA' E CONCLUSIONI

In tutti e quattro i casi le proprietà sono riportate con rigorose dimostrazioni. In alcuni casi (**[TB]** e **[DBM]**) sono un elenco di formule che sembra non abbiano nessuna connessione logica, affiancate da esempi più o meno significativi e (in **[DBM]**) da osservazioni prolisse e inutili (che lasciano poco spazio alla ricerca e *"scoperta"* personale, tarpando completamente le ali all'intuizione).
[OC] ha il merito di presentare la logica interna delle varie proprietà e i nessi tra esse, per quanto possibile.
[V] è il più snello: utilizza pochissime proprietà e ricava tutte le altre negli esercizi, che seguono costantemente la teoria.
In tutti i testi, prima di concludere, si fa accenno alle potenze con esponente razionale: tutti tranne **[V]** trovano giustificazione delle proprietà delle potenze ad esponente razionale nei radicali; solo **[V]** ribalta la questione, mostrando come tutto è molto più semplice (ma perché allora non farlo all'inizio?).

[TB]
La prima proprietà presentata è la proprietà invariantiva, da cui si fa seguire

-l a semplificazione di radicali (con tanto di regola per l'applicazione (*"...cercare il M.C:D...."*), che sarebbe naturale se si fossero introdotte le potenze, e un'osservazione sul valore assoluto);

- la riduzione dei radicali allo stesso indice (senza giustificazione e corredata di formula (*"...cercare il m.c.m...."*) .

Segue:

- moltiplicazione;
- trasporto di un fattore fuori dal segno di radice (con regola);
- divisione;
- potenza (si conclude: *”in particolare* $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$*”*);
- radice di un radicale (compare un’osservazione che appesantisce notevolmente il carico di regole: *”per la proprietà commutativa della moltiplicazione si ha* $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ *pertanto è possibile scambiare gli indici delle radici”*);
- trasporto di un fattore dentro al segno di radice;
- addizione e sottrazione;
- le espressioni irrazionali (ad un certo punto, senza darne spiegazioni, si recita: *“può essere necessario applicare ai radicali le regole studiate per i polinomi e le frazioni algebriche”*);
- razionalizzazione (si esaminano solo due casi senza dare spiegazione della tecnica di calcolo da usare);
- radicali quadratici doppi;
- equazioni e sistemi con coefficienti irrazionali;

Si conclude la carrellata con un paragrafetto relativo alle potenze con esponente razionale, sembra al solo scopo di dare significato a tali potenze, facendo vedere che sono *“imparentate”* con i radicali (senza dimostrazione, ma dandone la definizione) e si aggiunge:

> *“Per le potenze con esponente razionale valgono le proprietà delle potenze con esponente intero. Esse possono essere dimostrate mediante le proprietà dei radicali…Nelle espressioni irrazionali , invece di operare con i radicali, possiamo operare con le potenze”.*

Il capitolo si conclude con l’introduzione dei radicali algebrici, per i quali viene addirittura coniata una nuova simbologia $\sqrt[n]{}^{\,a\lg}$ e si afferma $\sqrt[2]{16}^{\,a\lg} = \pm 4$

[DBM]

Vengono presentate due proprietà definite fondamentali :

I proprietà: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ e **II** proprietà: $\sqrt[n]{a^n} = a$

e poi si comincia come nel testo precedente, seppur con ordine leggermente diverso:

- la semplificazione di radicali;
- la riduzione dei radicali allo stesso indice (senza giustificazione e corredata di formula);
- moltiplicazione e divisione (prima con lo stesso indice poi con indice diverso);
- addizione e sottrazione;
- trasporto di un fattore dentro al segno di radice (si giustifica: *”talvolta è utile…”*, quando forse avrebbe avuto più senso introdurre prima il caso di un trasporto fuori);
- trasporto di un fattore fuori dal segno di radice (con regola e tanti sottocasi a seconda della relazione tra indice ed esponente);
- potenza;
- radice di un radicale;
- razionalizzazione (senza dare spiegazione sufficiente della tecnica di calcolo da usare, si presentano 4 casi);
- radicali quadratici doppi.

Segue la definizione dei radicali in **R**, distinguendo il caso n pari e n dispari e, per il secondo caso, dimostrando che se b>0 i radicali in $\mathbf{R}_0^+$ e i radicali in **R** coincidono. Dopo aver dato la nuova definizione di radicale, si enuncia il teorema dell'esistenza e unicità della radice e si propone una ulteriore definizione:

"Se n è un numero naturale diverso da zero, si definisce radice n-esima del numero reale a diverso da zero e la si indica con $\sqrt[n]{a}$ *, quel numero reale b, se esiste, che ha lo stesso segno di a e tale che* $b^n = a$ *".*

Si ripercorrono poi <u>tutte</u> le proprietà verificando che sono valide anche per i radicali in R (ma la dimostrazione precedente a cosa serve?). Si conclude col paragrafo relativo alle potenze con esponente razionale, a gradi linee allo stesso modo di **[TB]**, con la differenza che si cerca di "dimostrare" che tali potenze equivalgono all'operazione di estrazione di radice:

"...perché $5^{\frac{2}{3}}$ *possa essere considerata una potenza, per lei devono valere le proprietà delle potenze:* $\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 5^2$*, ma per definizione si ha* $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$ *"*

(nonostante tale argomentazione si ridimostrano le proprietà a partire dai radicali).
Segue un ulteriore paragrafo relativo alle potenze con esponente irrazionale.

[OC]

Si enuncia e si definisce la proprietà fondamentale e da questa si fa discendere:

a) la semplificazione (con attenzione al valore assoluto);

b) riduzioni di più radicali allo stesso indice (dandone giustificazione (cfr. tra radicali) e richiamando la tecnica analoga per la riduzione di più frazioni allo stesso denominatore);

Da b) segue:

c) moltiplicazione e divisione (evidenziando la simmetria dell'uguaglianza).

Dall'osservazione che nella moltiplicazione si può arrivare anche a trovare dei radicali della forma $2\sqrt{3}$, ci si chiede se possono essere ridotti alla for ma di un "unico" radicale: segue

d) trasporto di un fattore sotto il segno di radice (con attenzione ai segni);

… e per la simmetria dell'uguaglianza segue

d) trasporto di un fattore fuori dal segno di radice (ma con formula farraginosa);

Si presentano di seguito le altre operazioni:

- elevamento a potenza;
- estrazione di radice;
- somma e sottrazione (osservando: *"...similmente a quanto accade per le proprietà delle potenze per la somma e sottrazione, non vi sono teoremi per l'addizione e la sottrazione di radicali…"*);
- razionalizzazione (con spiegazione;solo due casi, rimandando il resto agli esercizi);
- radicali doppi (la trattazione dei quali è giustificata dal fatto che possono incontrarsi nella risoluzione di alcune equazioni di grado superiore al I);
- semplificazione di espressioni irrazionali.

Prima di concludere viene presentato un paragrafo relativo alle potenze con esponente razionale, con la stessa logica di **[DBM]**, a partire dalla seguente osservazione:

"...quanto vale il prodotto $a^{\frac{1}{2}}\, a^{\frac{1}{2}}$ *?"*

Si conclude con la definizione dei radicali algebrici per generalizzare il caso di a $\in$ R:

"...sono quei numeri reali x che soddisfano l'equazione $x^n = a$ *"*

[V]
Tutta la teoria viene svolta prima solo nel caso di radicali quadratici; poi si generalizza ad n. Vengono presentate le seguenti proprietà:

- $\left(\sqrt{p}\right)^2 = \sqrt{p^2} = p$
- moltiplicazione;
- divisione;
- elevamento a potenza;

con tanti esempi chiarificatori, in cui, senza regole, ma applicando semplicemente le precedenti proprietà, si fa discendere:

- trasporto di un fattore dentro e fuori dal segno di radice (come semplice esercizio, che trova poi applicazione);
- somma e sottrazione (facendo vedere in particolare che $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$ (con dimostrazione), e spiegandola come semplice applicazione della proprietà associativa, in analogia col calcolo letterale).

Nell'esposizione c'è grande attenzione ai casi dubbi, che possono portare ad errore, a cosa fare e cosa non fare e *"astuzie"* di calcolo

- razionalizzazione (giustificando ogni singolo passaggio, e procedendo non per casi, ma per esercizi, facendone vedere subito una pratica applicazione nella semplificazione di espressioni irrazionali).

Si sposta poi il problema sulla risoluzione di equazioni del tipo $x^n = a$, attraverso l'esame di alcuni esempi:
…da $x^2=5$ si ha $x_1 = \sqrt{5}$ e $x_2 = -\sqrt{5}$, specificando che $\sqrt{5}$ rappresenta sempre una quantità positiva o nulla e che $\sqrt{5}$ è la radice aritmetica di 5, $\sqrt{5}$ e $-\sqrt{5}$ sono le radici algebriche di 5.
Attraverso esempi, richiamando cose già note o intuibili si arriva alla definizione di radice n-esima, facendo vedere il legame tra radice aritmetica e algebrica.
Negli approfondimenti viene trattata tutta la parte relativa ai radicali aritmetici di indice n, con pochissima teoria (non è altro che la generalizzazione dei casi già trattati) e molti esercizi.
Si conclude con le potenze ad esponente razionale, ma in modo completamente diverso dagli altri testi:

"Tutte queste radici, questi indici, queste proprietà possono rendere le cose un po' confuse, allora i matematici, pigri e amanti della semplicità, hanno trovato una notazione migliore…Come hanno ragionato? La $\sqrt[n]{p}$, per definizione è legata alla potenza. Perché allora non esprimere un radicale sottoforma di potenza? "

Ponendo $\sqrt[n]{p} = p^x$ si arriva a dimostrare (agevolmente) che $x = \frac{1}{n}$. Si conclude:

"…le proprietà dei radicali non sono altro che le usuali proprietà delle potenze!"

Si completa con un paragrafetto sulle funzioni $y = \sqrt[n]{x}$ (disegnate per punti con l'utilizzo del calcolatore) e poi sui numeri complessi, introdotti a partire dal problema della risoluzione di equazioni del tipo $x^2 = -1$ e $x^6 = -3$

<u>Conclusioni</u>
Oltre che una buona scelta del libro di testo forse sarebbe opportuno un buon uso del libro di testo *"meno peggiore"*.

…forse sarebbe più utile avere a disposizione libri diversi per approcci diversi con registri di linguaggio diversi…