

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PISA

Relazione II Laboratorio

E se portiamo il
"PORTA" ...in classe?

Corso di perfezionamento

*"Strategie didattiche per promuovere un atteggiamento positivo verso la
matematica e la fisica"*

Corsiste:

Chiara Marmeggi

Angela Putortì

Stefania Pancanti

ANNO ACCADEMICO 2006-07

...e se portiamo il "PORTA" in classe?

INDICE

<u>INTRODUZIONE.....</u>	<u>3</u>
<u>FUNZIONI...PERCHÉ?.....</u>	<u>4</u>
<u>SCHEDA PROPOSTA AI RAGAZZI.....</u>	<u>5</u>
<u>FUNZIONI...DOVE?.....</u>	<u>8</u>
<u>FUNZIONI...QUANDO?.....</u>	<u>8</u>
<u>DISCUSSIONE DELLA SCHEDA.....</u>	<u>8</u>
<u>...E I RAGAZZI HANNO DETTO.....</u>	<u>16</u>
<u>CONCLUSIONI.....</u>	<u>17</u>

...e se portiamo il "PORTA" in classe?

Introduzione

Il progetto PORTA nasce indubbiamente come "ponte" per i ragazzi in vista di futuri impegni universitari, ma alcuni obiettivi di questo progetto, che descriviamo qui di seguito, ci sono sembrati significativi anche per la "quotidianità" del lavoro che svolgiamo in classe con i ragazzi e precisamente sono:

- rendere lo studente consapevole delle proprie conoscenze, capacità e limiti riguardo all'argomento scelto;
- portare i ragazzi a misurarsi con il linguaggio matematico corretto, invitandoli a verbalizzare le proprie idee;
- sviluppare un maggiore senso critico nella trattazione degli argomenti;
- stimolare funzioni di controllo;
- rendere gli studenti protagonisti nella costruzione delle conoscenze;
- promuove l'ascolto reciproco e democratico delle idee.

E' per questo motivo che abbiamo deciso di utilizzare il metodo di lavoro proposto in questo tipo di progetto in classe e i risultati sono stati molto interessanti, come avremo modo di verificare insieme nella descrizione delle attività svolte.

L'argomento scelto è stato il concetto di funzione, in particolare abbiamo lavorato sulla definizione di funzione, sul riconoscimento e sulla costruzione di funzioni. Inoltre, la scelta di questo argomento ci ha permesso di proporre questa attività sia al biennio sia al triennio.

...e se portiamo il "PORTA" in classe?

FUNZIONI....perché?

Abbiamo scelto l'argomento delle funzioni perché ci sembrava che la parola "funzione" fosse una parola anche troppo usata in classe dai ragazzi e dall'insegnante, senza però condividerla come significato. Inoltre riveste un ruolo importante e centrale in gran parte degli argomenti affrontati nelle scuole superiori.



In particolare, partendo da quello che i ragazzi intendono per funzione, stimolandoli a verbalizzare le proprie idee, volevamo arrivare alla formalizzazione del concetto di funzione, nella sua generalità di significato e di applicazione e poi alla costruzione esplicita di esempi di funzioni, aiutando i ragazzi ad attivare processi di controllo su conclusioni proprie.

Scheda proposta ai ragazzi

Di seguito è riportata la scheda di attività che è stata proposta ai ragazzi.

Questi 7 quesiti propongono un "cammino", in un certo senso, sul concetto di funzione. Precisamente, avendo osservato più volte in classe che la maggior parte dei ragazzi (se non tutti) hanno una visione molto limitata del concetto di funzione, visione strettamente numerica legata al concetto di equazione e "formula", si chiede ai ragazzi di descrivere a parole il significato della parola "funzione" e di alcuni termini più o meno a lei connessi, avendo così modo di far emergere la visione corrente di "funzione". Partendo da quella, nel secondo quesito si vuol far riflettere i ragazzi che non tutti i grafici, che a loro possono essere familiari, sono funzioni, chiedendo di "leggere" in qualche modo la proprietà di funzione a partire dalla rappresentazione nel piano cartesiano.

Nel terzo quesito ancora non viene messa in discussione la natura numerica degli insiemi su cui è definita la funzione, anche se in questo caso l'insieme di arrivo ha una struttura di prodotto cartesiano che vuole farli riflettere. Non solo, adesso non si ha una formula esplicita per il calcolo della funzione, ma bensì un algoritmo da applicare (che è quello della trasformazione di un numero razionale in frazione, se già non ha tale rappresentazione, e poi la riduzione del numeratore e del denominatore semplificando i denominatori comuni).

Dal quarto quesito si mette esplicitamente in discussione la natura numerica degli insiemi tra cui è definita una funzione: infatti si parla di insiemi di poligoni e la relazione consiste nell'associare figure che abbiano lo stesso numero dei lati. Nel quinto quesito qualsiasi riferimento alla matematica cessa di esistere e si prendono in considerazione l'alfabeto e insiemi di parole.

Nel sesto quesito si chiede ai ragazzi di dare degli esempi di funzioni tra insiemi di cardinalità fissata (finiti o infiniti) ed, infine, nell'ultimo quesito, la richiesta si complica ulteriormente perché si chiede di "esplorare" tutte le possibili funzioni tra due insiemi dati, contando tutte le possibilità.

In questo lavoro quindi si passa dal saper riconoscere se una certa relazione è una funzione, al saperla costruire almeno una fra due insiemi e infine a saper "immaginare" su insiemi finiti, tutti i possibili modi di metterli in relazione affinché si ottenga una funzione.

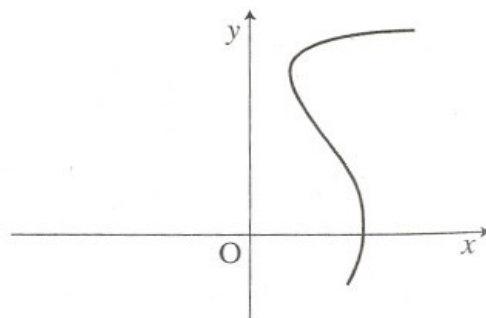
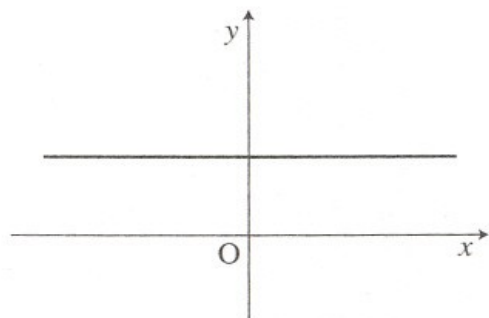
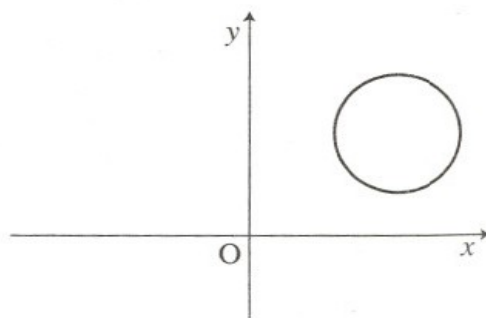
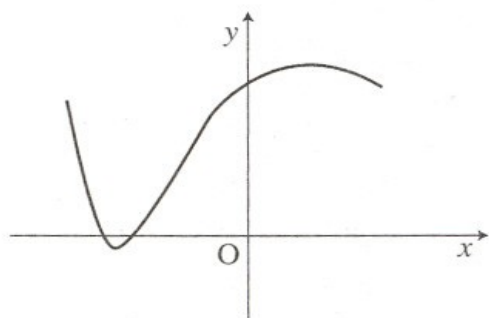
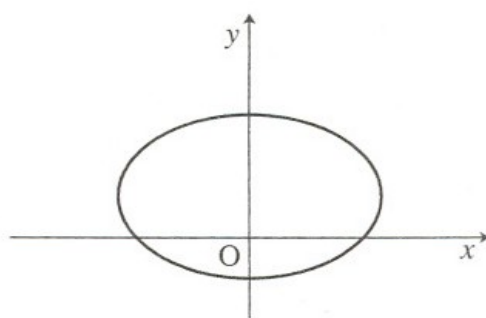
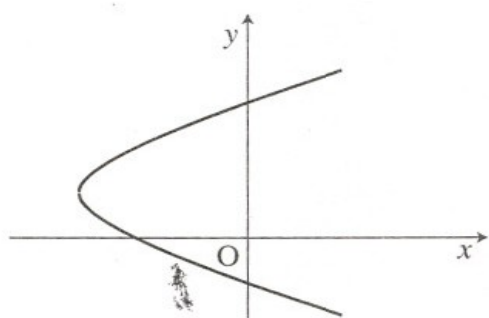
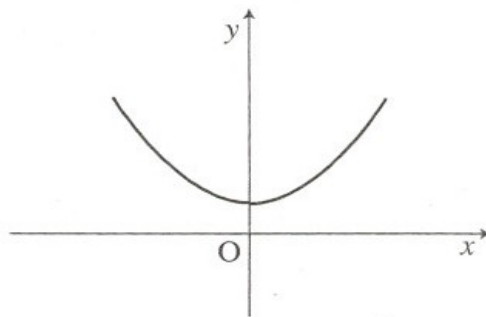
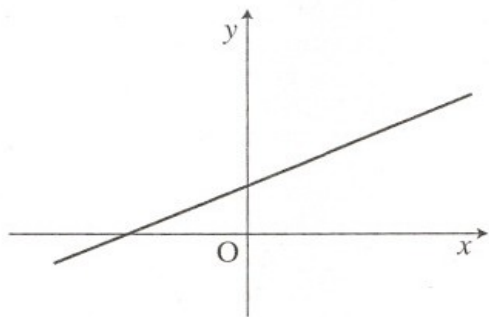
I quesiti sono i seguenti:

1. Fai una crocetta sui termini seguenti di cui hai sentito parlare
 - Funzione
 - Grafico
 - Dominio
 - Codominio

...e se portiamo il "PORTA" in classe?

Di quelli che conosci, prova a darne una spiegazione.

2. Quali dei seguenti grafici secondo te rappresentano grafici di funzioni? Motiva la risposta

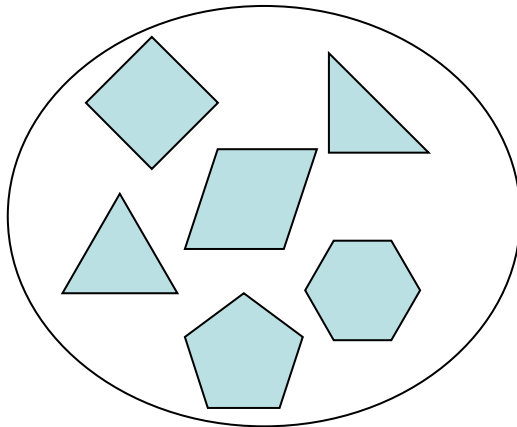


3. Dire se la relazione che associa ogni numero razionale positivo la coppia di naturali primi tra loro che lo rappresentano in frazione, è o meno una funzione, motivando la risposta

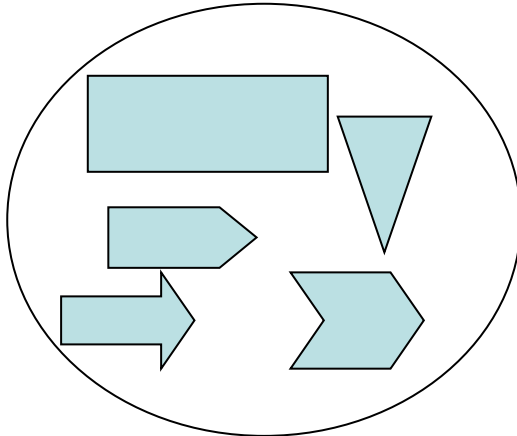
...e se portiamo il "PORTA" in classe?

4. Siano dati i seguenti insiemi A e B. Dire se la relazione "x ha lo stesso numero di lati di y" con x un elemento di A e y un elemento di B è una funzione. Descrivere se è una funzione la stessa relazione ma con gli insiemi A e B invertiti.

Insieme A



Insieme B



5. Sia dato l'insieme di tutte le lettere dell'alfabeto e l'insieme dei cognomi degli studenti della tua classe. Considera la relazione "x è l'iniziale di y" con x elemento del primo insieme e y elemento del secondo insieme. Questa relazione è una funzione? Perché?
6. Fornisci un esempio di funzione tra due insiemi A e B dove
- A è un insieme finito e B un insieme finito
 - A è un insieme finito e B un insieme infinito;
 - A è un insieme infinito e B insieme finito;
 - A è un insieme infinito e B insieme infinito.
7. Dati gli insiemi $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{e, f, g\}$ quante sono le funzioni definibili da A in B?

...e se portiamo il "PORTA" in classe?

FUNZIONI....dove?

Questa attività è stata proposta in una seconda dell'Istituto Tecnico Commerciale e in una seconda, una terza e una quarta dell'Istituto Tecnico per Geometri della scuola paritaria "Esedra" di Lucca e in una classe quinta dell'Istituto Tecnico per Geometri "Niccolini" di Volterra.

Le classi della scuola privata presentano di solito difficoltà di lavoro, soprattutto le seconda e la terza ITG, benché il numero dei ragazzi per classe sia limitato.

Anche nella classe V della scuola di Volterra il numero è limitato ma è dovuto ad un percorso scolastico che negli anni ha portato a fermare un gran numero di ragazzi.

Sicuramente l'aver potuto affrontare questo tipo di lavoro in queste diverse classi sta a sottolineare la centralità e la rilevanza dell'argomento scelto, nel percorso di studi secondari superiori.

FUNZIONI....quando?

Hai ragazzi sono stati dati 40- 45 minuti per lavorare sulla scheda, mentre la discussione è stata affrontata nel peggiore dei casi in una sola ora, in qualche classe in due ore e in quarta, per esempio, non si è esaurita nemmeno in due ore, ma dobbiamo continuare a lavorarci sopra.

Sicuramente il dover, nella maggior parte dei casi, discuterla a "puntate" a reso più difficile il lavoro, dovendo riprendere le cose dette e far rientrare ogni volta i ragazzi nel clima di discussione.

In terza e in quarta è stato proposto anche un questionario di valutazione sull'attività svolta (sul lavoro individuale sulla scheda e sulla discussione).

Discussione della scheda

Di seguito saranno discussi quesito per quesito, riportando e analizzando le risposte e i commenti fatti dai ragazzi in classe.

...e se portiamo il "PORTA" in classe?

1. Fai una crocetta sui termini seguenti di cui hai sentito parlare

Funzione

Dominio

Codominio

Grafico

Fra quelli che conosci, prova a darne una spiegazione.

FUNZIONE : "...è una legge che associa ad ogni elemento del dominio uno ed uno solo del codominio"

DOMINIO: " ...insieme dei punti di partenza della funzione"

CODOMINIO: "...insieme dei punti di arrivo di una funzione"

DOMINIO: "la funzione esiste nel suo dominio"

"Grafico: Rappresentazione grafica di una funzione su un piano cartesiano"

Queste parti evidenziate in blu rappresentano alcuni esempi di definizioni date dai ragazzi nelle quali sono presenti ricorsività e quindi in realtà non si sta definendo niente, osservazione questa che ha un po' meravigliato i ragazzi. Interessante è anche la caratterizzazione della funzione come una "legge", intesa come formula, equazione.

DOMINIO: "...costituito da tutti i numeri che possono fare parte di una funzione"

In questa definizione di dominio si fa esplicito riferimento al fatto che si pensa che una funzione sia definita su insiemi numerici.

DOMINIO: "E' la proiezione di tutti i punti che formano una funzione sull'asse delle x"

CODOMINIO: "E' la proiezione di tutti i punti che formano una funzione sull'asse delle y"

"Il grafico rappresenta le coordinate, la posizione di quelli che sono i punti dove la x trova la sua immagine" (romantico!!!)

"Grafico...rappresentazione visiva dei dati"

...e se portiamo il "PORTA" in classe?

In queste definizioni si fa riferimento non solo ad insiemi di partenza e di arrivo numerici ma anche a rappresentazioni sul piano cartesiano.

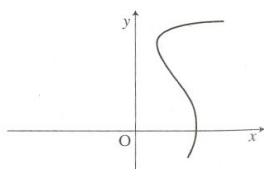
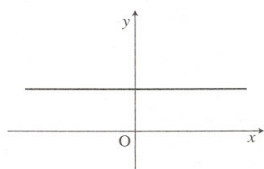
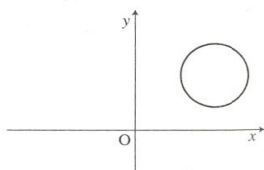
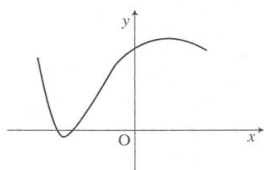
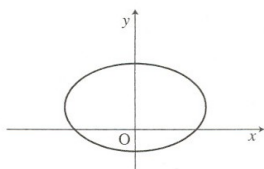
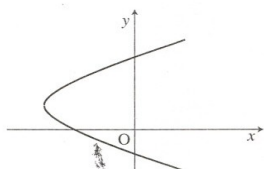
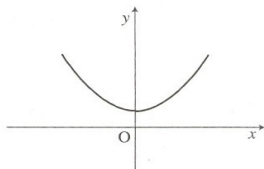
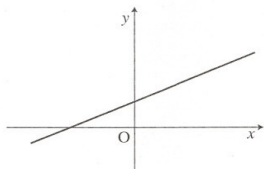
"Grafico...rappresentazione visiva dei dati"

Questa ci sembra una definizione di quelle che guardano un po' oltre il discorso strettamente numerico, parlando di generici dati e di generica rappresentazione.

"Il grafico rappresenta sul piano cartesiano una funzione"

Questa convinzione è la prima che abbiamo voluto mettere in discussione nel secondo punto della scheda.

2. Quali dei seguenti grafici secondo te rappresentano grafici di funzioni? Motiva la risposta.



...e se portiamo il "PORTA" in classe?

In questo secondo punto, molti ragazzi hanno dato per scontato la lettura del grafico da x in y anche se non è precisata da nessuna parte. Anzi si può concludere che più i ragazzi sono grandi e più rispondono correttamente però senza porsi il problema. Sono i ragazzi di seconda che hanno proposto la lettura del grafico anche da y verso x e questo è stato molto interessante. Anche perché ci sono delle curve per le quali la risposta è indifferente rispetto al verso in cui la relazione è studiata (le curve chiuse) mentre le altre rovesciano il risultato della risposta tranne la prima retta, poiché è strettamente monotona. Comunque si è potuto concludere che non tutti i grafici sono funzioni.

*3. Dire se la relazione che associa
ad ogni numero razionale positivo
la coppia di naturali primi tra loro che
lo rappresentano in frazione,
è o meno una funzione, motivando la risposta.*

Pochi ragazzi hanno provato a rispondere a questo quesito ma è stato comunque motivo di discussione in classe. E le risposte sono state, direi opposte:

"No perché ad un numero razionale corrispondono due numeri che lo rappresentano" (V ITG)

"E' una funzione, in quanto per essere primi tra loro i due naturali, bisogna ridurre ai minimi termini le frazioni e non ci sono due frazioni equivalenti ma diverse ridotte ai minimi termini" (V ITG)

"(Fa qualche esempio) Secondo me, è una funzione con dominio i razionali ma non saprei scrivere l'insieme di arrivo" (IV ITG)

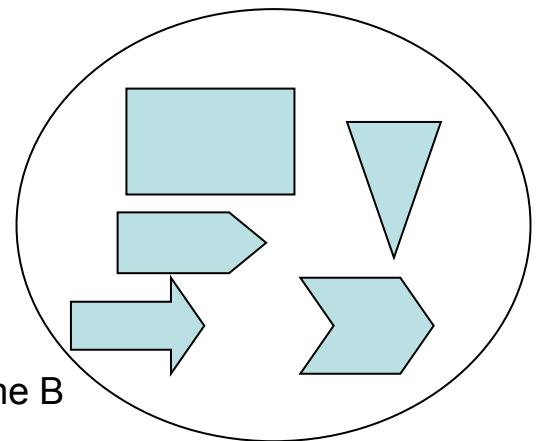
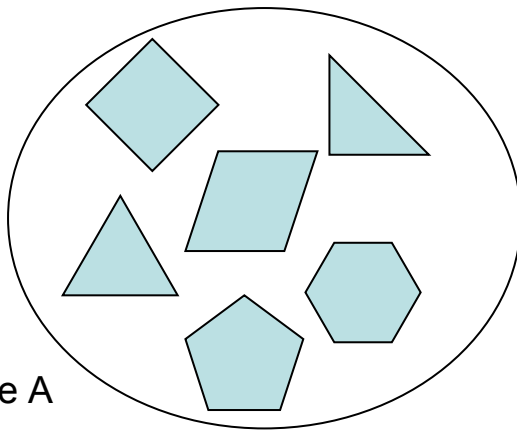
Come supponevamo, innanzitutto il tipo di funzione e poi la struttura dell'insieme di arrivo ha creato difficoltà ai ragazzi. E' stata un' ottima occasione per rivedere il prodotto cartesiano tra due insiemi e per definire che il termine "relazione" che fino a questo punto era stato dato come primitivo, come sottoinsieme del prodotto cartesiano dell'insieme di partenza e di arrivo e provato a concludere che anche una funzione in realtà è un insieme...

Inoltre abbiamo potuto vedere un esempio di funzione il cui insieme di partenza è "unidimensionale" e l'insieme di arrivo "bidimensionale".

...e se portiamo il "PORTA" in classe?

Tra l'altro è emerso come il piano cartesiano su cui siamo abituati a lavorare sia il prodotto cartesiano fra due insiemi uguali che sono i numeri reali, consapevolezza questa che praticamente nessuno aveva.

4. Siano dati i seguenti insiemi A e B. Dire se la relazione "x ha lo stesso numero di lati di y" con x un elemento di A e y un elemento di B è una funzione. Descrivere se è una funzione la stessa relazione ma con gli insiemi A e B invertiti.



Praticamente tutti i ragazzi hanno provato a rispondere e molti, almeno rispetto alla relazione da A in B, hanno risposto correttamente; ma vediamo queste due risposte:

Non è una funzione perché una figura dell'insieme B non ha la corrispondente nell'insieme A e dall'insieme A deve partire una sola freccia....(2° ITG)

Qui sembra crear problemi la struttura dell'insieme B. Infatti il fatto che da ogni elemento di A debba partire una ed una sola freccia sembra sia stato recepito ma in un certo senso si chiede che succeda, in un qualche modo anche nella direzione opposta, come si evidenzia anche dal seguente commento:

"Da A in B non è una funzione perché ogni figura di A trova una figura di

...e se portiamo il "PORTA" in classe?

ugual numero di lati in B, ma non una sola."

(VITG)

Praticamente, anche dai commenti che i ragazzi hanno fatto durante la discussione sembra creare difficoltà il pensare ad una relazione come qualcosa di orientato, con un determinato insieme di partenza e un determinato insieme di arrivo.

La risposta sulla relazione sugli insiemi invertiti ha avuto meno successo nel senso che in pochi hanno provato a rispondere e se per molti il fatto che la freccia non avesse il corrispondente in A ha avuto come conseguenza la risposta negativa (corretta), in realtà poi in classe chiedendo se era possibile individuare un dominio sul quale invece la relazione era una funzione, hanno incluso anche il rettangolo, che ha però due corrispondenti in A.

In questo quesito si voleva mettere in discussione la visione della funzione come una relazione definita su insiemi numerici e la cosa interessante è che i ragazzi hanno lavorato sui due insiemi A e B che non sono più numerici, applicando la definizione di funzione ma senza andare a modificare la definizione iniziale che avevano dato di funzione. Quindi è venuto fuori anche in classe come non sia stata applicata nessuna forma di controllo da parte loro.

5. Sia dato l'insieme di tutte le lettere dell'alfabeto e l'insieme dei cognomi degli studenti della tua classe.

Considera la relazione "x è l'iniziale di y" con x elemento del primo insieme e y elemento del secondo insieme. Questa relazione è una funzione? Perché?

Con questo quesito ci stacciamo completamente da riferimenti "matematici" per quanto riguarda sia l'insieme di partenza e sia l'insieme di arrivo e anche per quanto riguarda il tipo di relazione.

È stata molto interessante la discussione avvenuta nelle seconde (accorpate nell'ora di matematica) perché ogni ragazzo ha provato a rispondere rispetto alla propria classe e (ovviamente considerando non tutto l'alfabeto ma solo le lettere "interessate" dalla relazione) è successo che nella seconda ITC questa relazione non è risultata una funzione mentre in seconda ITG sì. Quindi hanno dato risposte opposte ma entrambe corrette. Questo ci ha permesso di discutere il ruolo anche dell'insieme di arrivo per la definizione di funzione: infatti in questi due casi sia l'insieme di partenza sia la relazione coincidevano, quindi la "responsabilità" dell'essere "funzione" ricadeva in un certo senso sulla struttura dell'insieme di arrivo.

6. Fornisci un esempio di funzione tra due insiemi A e B dove

- » A è un insieme finito e B un insieme finito
- » A è un insieme finito e B un insieme infinito
- » A è un insieme infinito e B insieme finito;
- » A è un insieme infinito e B insieme infinito.

La proposta di dare degli esempi di funzioni su insiemi di una determinata cardinalità non è stata accolta da molti ragazzi.

Rispetto alle risposte che ci sono state date abbiamo individuato due tipi di problemi. Il primo problema è stata la scelta degli insiemi mentre il secondo la scelta della relazione che fosse funzione.

Per quanto riguarda il primo problema, tra gli esempi che hanno fatto i ragazzi ci sono sembrate significative le seguenti risposte:

- » A è un insieme finito e B un insieme finito
 $A=\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 10\}$ e $B=\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 10\}$
- » A è un insieme finito e B un insieme infinito
 $A=\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 10\}$ e $B=\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- » A è un insieme infinito e B insieme infinito
 $A = \text{Universo}$ $B = \text{Stelle}$
 $A = \text{capelli dei ragazzi della classe}$ $B = \text{numeri}$

Nella discussione è emerso come in realtà nei primi due esempi fosse stata fatta confusione tra il concetto di limitato e di finito, mentre nell'ultima "universo" e "stelle" hanno fatto nascere questioni esistenziali e filosofiche legate al concetto di finito e infinito.....interessante anche il problema legato alla cardinalità dei capelli....

Per quanto riguarda la scelta delle relazioni tra tali insiemi, nei primi due la relazione proposta è l'identità, e anche sull'esempio Universo-Stelle molto probabilmente l'idea era l'identità anche se non è stato indicato niente.

Sull'esempio dei capelli, nella discussione è venuto fuori come in realtà sarebbe stato più corretto scegliere come insieme di partenza l'insieme dei ragazzi e come insieme di arrivo i numeri (quali? Non è emerso) e la relazione essere "il numero dei capelli di..." , con il problema della calcolabilità di tale funzione!!!

...e se portiamo il "PORTA" in classe?

7. Dati gli insiemi $A=\{a,b,c,d\}$ e $B=\{e,f,g\}$, quante sono le funzioni definibili da A in B ?

In pochi hanno provato a rispondere a questo quesito. Ecco alcune risposte:

"Nessuna perché gli elementi sono tutti diversi"(III ITG)

Questa è stata la risposta dei ragazzi che anche nell'esempio precedente hanno dato come esempio di relazione l'identità tra insiemi e naturalmente qui gli elementi del primo insieme e del secondo insieme sono tutti diversi e quindi come idea non era applicabile.

"Le funzioni definibili di A a B non ci sono (quindi non c'è neanche una funzione) "

(III ITG)

Poiché non ci sono funzioni indicate, non c'è niente da contare.....

"Nessuna dato che A ha 4 elementi e B ne ha 3, non posso associare ad ogni elemento di A uno e uno solo di B "

(V ITG)

Qui riemerge il problema visto al quesito 4., della difficoltà di vedere la relazione come qualcosa di orientato e quindi di verificare la proprietà di funzione.

Altri ragazzi, come per esempio in IV ITG, hanno cercato un criterio da applicare ad ogni elemento di A (*esempio ogni vocale con la vocale ogni consonante con consonante, che non fornisce neppure una funzione*).

E' stata molto significativa la faccia dei ragazzi dopo avergli fatto degli esempi di funzione dall'insieme A all'insieme B ...e soprattutto dopo aver contato quante potevano essere le funzioni tra quei due insiemi....hanno detto che non se lo sarebbero mai immaginato.....(riflessione per noi insegnanti: quando gli passiamo il messaggio che in matematica serve anche l'immaginazione?)!!!

...e se portiamo il "PORTA" in classe?

...E I RAGAZZI HANNO DETTO.....

E' deprimente questo tipo di verifica, sconfortante.

-In che senso?

"Perché queste cose sono un confronto su sé stessi, quanto si sa alla fine, e questo mi scoraggia un po'".

(V ITG)

"Mi sono sentito interessato e partecipe" (IV ITG)

"Questa attività mi è piaciuta perché capendo la teoria, la pratica è più semplice"

(III ITG)

Mi è piaciuta perché tutti abbiamo lavorato e ognuno ha detto cose che si compensavano" (IV ITG)

"Sì, ho scoperto qualcosa di nuovo... praticamente tutto"! (III ITG)

"Ho scoperto qualcosa di nuovo e cioè cosa è una funzione"! (III ITG)

"Ho scoperto che con la matematica, in un certo senso, si può anche giocare" (IV ITG)

Prof, IO PENSO CHE.....(III ITG)

Prima di discutere alcuni dei commenti dei ragazzi all'attività proposta ci sembra importante sottolineare il fatto che i ragazzi hanno "accettato la sfida" e si sono misurati quasi tutti con impegno e interesse nella risoluzione dei quesiti (attività in cui non era prevista valutazione, come espressamente dichiarato). Anche nella discussione sono stati molto partecipi ed anche desiderosi di dire la propria opinione.

Qui sopra abbiamo riportato alcuni commenti che hanno fatto i ragazzi durante il lavoro, durante la discussione o come risposta al questionario, dove gli si chiedeva:

"Cosa ti è piaciuto e perché?"

"Cosa non ti è piaciuto e perché?"

"Come ti sei sentito mentre lavoravi sulla scheda?"

"Hai scoperto qualcosa di nuovo?"

Indubbiamente colpisce il commento del ragazzo di quinta (scritto in nero), ma le considerazioni non sono tanto sull'attività in sé ma sull'interpretazione che le è stata data e cioè un'autovalutazione sulla propria preparazione al termine degli studi.

...e se portiamo il "PORTA" in classe?

Gli altri commenti sono tutti positivi.

"Prof, io penso che..." È stata riportata perché detta da un ragazzo di III ITG che normalmente preferisce fare altro nelle ore di matematica ed invece questo tipo di attività lo ha coinvolto e si è ritrovato a "pensare" cose di matematica e ne è rimasto stupito e contento.

Conclusioni

Questa esperienza è stata molto interessante sia per i ragazzi sia per noi insegnanti. Direi che la potremmo definire per entrambi "esplorativa" nel senso che ci ha portato a confrontarci su tanti aspetti che non ci saremmo potuti immaginare sia con i ragazzi ma anche tra di noi, sia durante la preparazione sia durante la condivisione delle discussioni fatte con i ragazzi.

Sicuramente è stata per noi anche faticosa nella preparazione soprattutto per quanto riguarda la risorsa tempo (che come al solito scarseggia..) e sempre il tempo è stata la difficoltà maggiore in classe, legata al dover riprendere più volte la discussione, cercando di ricapitolare...le puntate precedenti!

Le considerazioni sui tempi, soprattutto di preparazione, fanno nascere il bisogno di una maggiore condivisione di attività tra noi insegnanti, in modo che i lavori che vengono preparati in modo approfondito possano diventare una ricchezza per tutti, insegnanti e ragazzi.