Confronto dei libri

Lazzarini, Sarnataro  Algebra 1            Re Fraschini, Grazzi   Algebra 1

Il confronto tra i due testi l'ho effettuato su capitolo riguardante gli insiemi numerici.
Questo è uno dei primi argomenti che si svolgono in una classe prima, ed è un argomento che io considero fondamentale per vari motivi. Il primo è che i ragazzi hanno già studiato le regole del calcolo e quindi, per gli alunni con una buona preparazione è una noiosa ripetizione, mentre per quelli che vi hanno trovato difficoltà è pur sempre una ripetizione che spesso non affrontano con maggiore attenzione di quella che vi hanno prestato nel corso della scuola media e che rischia nel contempo di far loro provare subito un senso di fallimento ( non mi riuscivano e non mi riusciranno……)
Fondamentale, quindi, è il riproporre lo studio degli insiemi numerici sotto un diverso aspetto che interessi i più preparati e contemporaneamente rimotivi i più svogliati e dia loro la possibilità di mettersi alla prova su qualcosa di diverso, qualcosa su cui non si sentano subiti in situazione svantaggiata.
Lo studio dei naturali, in particolare, è importante perché lo studio di problemi di aritmetica è un aspetto della matematica poco presente nei programmi delle superiori. Iniziare sin dalla prima ad educare i ragazzi al modo di ragionare tipico di questo settore della matematica è utile perché pone le basi per ulteriori approfondimenti negli anni successivi al fine di rendere più completa la preparazione dei ragazzi.

Il testo di Lazzarini e Sarnataro affronta lo studio di N e di seguito Z, Q e introduce in ultimo i numeri irrazionali. Completa la trattazione con le dimostrazioni della numerabilità di N; Z e Q e della non numerabilità di R.
La trattazione è decisamente completa ed offre la possibilità di approfondire fino a quanto ciascuno ritiene più opportuno o adatto alla classe.
Lo studio di tutti gli insiemi è affrontato a partire dal tipo di struttura in relazione alle operazioni che vengono definite. L'accento è quindi posto sulle proprietà delle operazioni e non sulle regole del calcolo. La trattazione è abbastanza rigorosa e illustrata con esempi.
Importante è anche lo studio delle congruenze modulo n e dei sistemi di numerazioni diversi da 10.
Nel complesso il materiale proposto è davvero ampio e necessita di una scelta accurata per evitare di disperdersi.
Alcuni aspetti positivi

- si utilizzano le lettere sia per enunciare le proprietà sia per sviluppare piccole dimostrazioni
- si guida dall'osservazione di una proprietà in casi particolari alla generalizzazione ( e conseguente dimostrazione )
- non vengono proposti quantità di esercizi che inducano alla memorizzazione di procedure meccaniche
- stimola la capacità critica motivando e giustificando le regole apprese nella scuola media
- la parte degli esercizi è ben curata e presenta tipologie diverse di esercizi parecchi dei quali sono di tipo dimostrativo.
- sono presenti cenni a problemi "storici"

Alcuni aspetti negativi

- Manca lo studio più generale del concetto di operazione
- le proprietà delle operazioni sembrano essere vincolate agli insiemi numerici

Il testo di Re Fraschini e Grazzi presenta una scelta totalmente diversa.

l'insieme N è definito mediante classi di equivalenza e subito dopo si passa alle operazioni senza definizioni né proprietà. Successivamente è presentato Z poi $Q_a$ e infine Q.
Alcuni aspetti positivi:

- è presentato il concetto generale di operazione e delle relative proprietà
- può andare bene se si vuole fare un ripasso veloce del calcolo e porre piuttosto l'attenzione sulla generalizzazione di operazione

Aspetti negativi

- il valore assoluto è definito come il numero senza segno
- si pone troppo l'accento sui meccanismi di calcolo
- non sono presenti dimostrazioni né nella teoria né proposte come esercizi
- le schede di laboratorio sono scarse e non molto significative

Analisi del perché della scelta del libro di testo per il triennio del Liceo scientifico Tecnologico:

Andreini,Manara, Prestipino Matematica Controluce ed. Etas

Il libro di testo deve rappresentare un punto di riferimento per gli alunni. Per quelli più deboli un posto dove trovare spiegazioni semplici e ben organizzate, esempi guidati e osservazioni che aiutino ad individuare i punti caratterizzanti uno schema di ragionamento; per gli alunni più motivati ( o anche più dotati) deve servire per avere a disposizioni suggerimenti e stimoli per l'approfondimento. Un buon testo deve avere anche una raccolta varia di problemi, intesa come possibilità offerta agli alunni di mettersi alla prova su esercizi e problemi di varia difficoltà e diversa tipologia.

Dovendo cambiare il testo per le classi del triennio ho scelto Matematica Controluce perché avevo avuto occasione di utilizzarlo e ne avevo apprezzato la struttura. La presentazione di ogni argomento è organizzata con precisione, coerenza, abbastanza schematica e senza inutili divagazioni, ma con rigore. Ogni capitolo è corredato da esempi e, contemporaneamente, sono presenti suggerimenti ed osservazioni più approfondite. Un altro pregio è la soluzione di alcuni problemi mettendo in rilievo la possibilità di approcci diversi e di utilizzo di varie metodologie risolutive.

L'adozione di un libro non comporta necessariamente che ogni spiegazione dell'insegnate sia del tutto uguale a quella fornita dal testo, né che ogni nozione o procedura ivi descritta sia da prendere in considerazione. In questo senso io desidero che i miei alunni usino il testo come riferimento per confrontare e completare gli appunti presi in classe, per provare gli esempi proposti riflettendo sulla soluzione, per abituarsi a leggere e imparare qualcosa di nuovo in maniera autonoma.

Maria Teresa Cappagli

*Confronto di testi sull'argomento: I radicali*

La scelta di questo argomento è dovuta al rapporto non equo tra l'impegno e la premura con cui lo propongo e i risultati spesso demoralizzanti ottenuti in classe.

Le difficoltà da me incontrate nel presentare i radicali sono duplici: da un lato è forte la necessità di snellire un argomento che agli occhi dei ragazzi sembra essere un po' a se stante e un po' senza nessuna logica interna, con tante formule da imparare "appiccicate" qua e là, con quei valori assoluti che ci devono essere quando non sembra e viceversa, con somme e sottrazioni che di fatto, di tali operazioni, hanno solo il nome, e dall'altro lato per la carenza di un sostegno che il libro di testo dovrebbe fornire.

A mio parere, l'impostazione forse più semplice e "digeribile", ma sicuramente la più "capibile" e quindi "accettabile" per i ragazzi (e per questo motivo è quella che propongo ai miei alunni) è quella che premette la parentela tra radicali e potenze ad esponente razionale, presentando così le proprietà dei radicali come applicazione delle proprietà delle potenze. Purtroppo questo approccio non l'ho riscontrato in nessun libro di testo tra quelli da me consultati fin ora. Sicuramente un motivo ci sarà, ma ad oggi mi è ancora ignoto.

Per questo lavoro ho confrontato tra loro quattro libri di testo, i primi tre da me utilizzati in classe in varie esperienze (perché adottati in precedenza in tali classi), mentre l'ultimo è un testo che utilizzo per prendere esercizi e spunti:

Trifone Bergamini - "Manuale di algebra 2" – Zanichelli [TB]
Dodero Barboncini Manfredi – "Lineamenti di matematica 2" – Ghisetti e Corvi [DBM]
Oriolo Coda – "Algebra e informatica 2" – Mondatori [OC]
Venè Michelotti – "Matematica 2" – Sansoni [V]

Ho esaminato, attraverso un confronto, prima come vengono introdotti i radicali e di seguito come vengono affrontati

In tutti i casi è il capitolo precedente a quello delle equazioni di II grado

INTRODUZIONE

[TB]
Il capitolo comincia così:

*"Qual è il numero positivo che elevato al quadrato dà 9? Possiamo rispondere con facilità che 3 ha le caratteristiche cercate; possiamo anche dire che 3 è la radice quadrata di 9 e scrivere* $\sqrt{9} = 3$.*"*

Considera la radice cubica e poi conclude:

*"In generale la radice n-esima è l'operazione inversa della potenza di esponente n"*

Di seguito:

*"Si può dimostrare che dato un numero reale positivo a e un numero naturale n diverso da 0, esiste uno e un solo numero reale positivo b tale che risulta* $a^n = b$*. Def: dato un numero naturale n diverso da 0 e un numero reale a positivo o nullo, la radice aritmetica n-esima di a è quel numero reale b, positivo o nullo, la cui potenza con esponente n è uguale ad a:* $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$ *"*

Non solo non sembra esserci logica nella sequenza dei predicati espressi, ma si può creare dell'inutile confusione nell'utilizzo poco sensato di lettere uguali con valenze diverse, per esprimere prima il concetto di potenza e poi di radicale. Il termine radice aritmetica compare solo qui, mentre

si fa un po' di confusione tra radice e radicale. Vengono elencati di seguito i "casi particolari" e tra questi troviamo: "• $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ (con dimostrazione) e •*si conviene che* $\sqrt[0]{a}$ *non abbia significato*".
C'è poi un accenno alle condizioni di esistenza per le espressioni letterali (gli esempi richiedono una padronanza non indifferente del calcolo con le disequazioni).

[DBM]
L'argomento comincia con un richiamo ad una parte già precedentemente trattata (a proposito dei numeri reali): l'operazione di estrazione di radice quadrata da un numero positivo o nullo era stata in precedenza definita come operazione inversa dell'elevamento al quadrato: $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$ con $a \geq 0$ $e b \geq 0$. Si fa subito chiarezza su cosa si intende per radice e per radicale (quadratico) e si spiega il perché della limitazione su a e b: mentre per a è chiaro, per b l'argomentazione è la seguente:

*"...supponiamo di dover determinare la radice quadrata del numero positivo 4: si può osservare che esistono due numeri (opposti) il cui quadrato è 4. L'operazione di radice quadrata sarebbe quindi definita in modo equivoco se non si precisasse quale dei due numeri scegliere come radice del numero 4; perciò si conviene di scegliere, come radice quadrata del numero positivo 4, il numero positivo +2, cioè il numero concorde di segno con 4:pertanto è* $\sqrt{4}$ *= 2 e non scriveremo mai* $\sqrt{4}$ *=-2*".

Segue la definizione di radice cubica con l'osservazione che a e b non devono essere necessariamente non negativi, e poi si generalizza con n, puntualizzando che il caso a<0 verrà definito nel seguito. La definizione data non differisce da quella trovata in [TB], ma segue un'osservazione inutile (avendo già supposto $b \geq 0$), che appesantisce ulteriormente quanto appena esposto (poteva forse essere più sensato non metterlo nelle ipotesi ed osservarlo dopo):

*"Se n è dispari,* $b^n$ *ha sempre lo stesso segno di b, e quindi, dall'uguaglianza* $b^n = a$ *si deduce che, avendo considerato* $a \geq 0$, *risulta senz'altro* $b \geq 0$*"*.

Un'osservazione: non parla di radicali aritmetici ed algebrici ma fa la distinzione tra radicali in $\mathbf{R}_0^+$ e radicali in **R**, a partire dall'inizio.

[OC]
L'argomento viene preceduto da una breve introduzione (come è solito fare questo testo per tutto ciò che viene proposto, cercando di dare una collocazione storica, una giustificazione di ciò che viene trattato o semplicemente per richiamare cose già note). Si fa riferimento al fatto che già alle scuole medie i ragazzi hanno lavorato con le radici, quadrate e cubiche (spesso in problemi di geometria), e vi hanno lavorato con la consapevolezza del fatto che queste non sono altro che le operazioni inverse dell'elevamento a potenza (cfr formule inverse per il calcolo del lato di un quadrato nota l'area o il volume). A tale proposito, si fa osservare che, diversamente dalla somma e dalla moltiplicazione, l'elevamento a potenza possiede due "operazioni inverse" : $x^3 = 8$ e $3^x = 81$ e questo perché l'elevamento a potenza non gode della proprietà commutativa. Segue dicendo:
"*Riteniamo opportuno ricordare le proprietà delle potenze...*" e le elenca, ma poi non sviluppa il discorso in questa direzione e segue la strada classica, dando subito la definizione generale (non differente da quella presente negli altri testi). Fa notare (a differenza degli altri) che l'uguaglianza $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ si ha per definizione (anche se non giustifica mai che $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n}$ e lo usa come dato di fatto). Anche qui troviamo "*...si conviene che* $\sqrt[0]{a}$ *non abbia significato"*.
A differenza degli altri autori, in questo testo i radicali non vengono presentati in relazione ai numeri irrazionali; l'unico accenno lo troviamo in questa parte dell'esposizione, come semplice osservazione: "l'estrazione di radice, agendo su **Q**, può portare ad un risultato che non appartiene a **Q**" . E' degno di nota, infine, il tentativo di giustificare la presenza di tale argomento prima di

entrare nel vivo della trattazione: i radicali *"servono non solo in geometria, ma anche in algebra, ad esempio, nella risoluzione delle equazioni di secondo grado e di grado superiore"*.

[V]
I radicali vengono presentati all'interno del capitolo relativo ai numeri reali (particolarmente significativa l'introduzione, nella quale si cerca di fare chiarezza sul concetto e sull'uso dei numeri reali e nella quale è presente una breve ma incisiva nota storica). Il capitolo inizia con una domanda:

*"Perché non sono sufficienti i numeri razionali?"*

Il lettore è invitato a riflettere su alcuni "*problemini*": il rotolamento di un cerchio su una retta r, la determinazione del raggio di una circonferenza sotto determinate condizioni, e per finire un problemino algebrico: $x^2 = 8$ ha soluzioni razionali? (la teoria delle equazioni di II grado non è ancora stata affrontata). Segue dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{8}$, introduzione di R, e nel presentare gli irrazionali distingue tra irrazionali algebrici:

*"...se si possono pensare come soluzione di una equazione del tipo $x^n = a$ con $n \in$ N-0"*

e irrazionali trascendenti. Si chiede come sono fatti gli irrazionali algebrici e come poter operare con loro. A tal fine considera prima gli irrazionali soluzione dell'equazione $x^2 = a$ (con $a \geq 0$) e dà la seguente definizione:

*"Dati due numeri reali positivi o nulli p e q, q è la radice quadrata aritmetica di p, e si indica con $\sqrt[2]{p}$, se e solo se $q^2 = p$ "*

Da notare l'uso frequente della calcolatrice e il confronto col calcolo "manuale"
Non ci sono altre precisazioni o osservazioni e si parte con le proprietà

PROPRIETA' E CONCLUSIONI

In tutti e quattro i casi le proprietà sono riportate con rigorose dimostrazioni. In alcuni casi ( [TB] e [DBM]) sono un elenco di formule che sembra non abbiano nessuna connessione logica, affiancate da esempi più o meno significativi e (in [DBM]) da osservazioni prolisse e inutili (che lasciano poco spazio alla ricerca e "scoperta" personale, tarpando completamente le ali all'intuizione).
[OC] ha il merito di presentare la logica interna delle varie proprietà e i nessi tra esse, per quanto possibile. [V] è il più snello: utilizza pochissime proprietà e ricava tutte le altre negli esercizi, che seguono costantemente la teoria. In tutti i testi, prima di concludere, si fa accenno alle potenze con esponente razionale: tutti tranne [V] trovano giustificazione delle proprietà delle potenze ad esponente razionale nei radicali; solo [V] ribalta la questione, mostrando come tutto è molto più semplice (ma perché allora non farlo all'inizio?)

[TB]
La prima proprietà presentata è la proprietà invariantiva , da cui si fa seguire

-la semplificazione di radicali (con tanto di regola per l'applicazione (*"...cercare il M.C:D... ."*), che sarebbe naturale se si fossero introdotte le potenze, e un'osservazione sul valore assoluto)

-la riduzione dei radicali allo stesso indice (senza giustificazione e corredata di formula (*"... cercare il m.c.m...."*) ).

Segue:

-moltiplicazione
-trasporto di un fattore fuori dal segno di radice (con regola)
-divisione
-potenza (si conclude:*"in particolare* $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$*"*)

-radice di un radicale (compare un'osservazione che appesantisce notevolmente il carico di regole: *"per la proprietà commutativa della moltiplicazione si ha* $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ *pertanto è possibile scambiare gli indici delle radici"*)

-trasporto di un fattore dentro al segno di radice

-addizione e sottrazione

-le espressioni irrazionali( ad un certo punto , senza darne spiegazioni, si recita: *"può essere necessario applicare ai radicali le regole studiate per i polinomi e le frazioni algebriche"*)

-razionalizzazione ( si esaminano solo due casi senza dare spiegazione della tecnica di calcolo da usare)

-radicali quadratici doppi

-equazioni e sistemi con coefficienti irrazionali

Si conclude la carrellata con un paragrafetto relativo alle potenze con esponente razionale, sembra al solo scopo di dare significato a tali potenze, facendo vedere che sono "imparentate" con i radicali (senza dimostrazione, ma dandone la definizione) e si aggiunge:

*"Per le potenze con esponente razionale valgono le proprietà delle potenze con esponente intero. Esse possono essere dimostrate mediante le proprietà dei radicali…Nelle espressioni irrazionali , invece di operare con i radicali, possiamo operare con le potenze".*

Il capitolo si conclude con l'introduzione dei radicali algebrici, per i quali viene addirittura coniata una nuova simbologia $\overset{alg}{\sqrt[n]{\phantom{a}}}$ e si afferma $\overset{alg}{\sqrt[2]{16}} = \pm 4$

[GCM]

Vengono presentate due proprietà definite fondamentali

I proprietà: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ e II proprietà: $\sqrt[n]{a^n} = a$

e poi si comincia come nel testo precedente, seppur con ordine leggermente diverso:

-la semplificazione di radicali

-la riduzione dei radicali allo stesso indice (senza giustificazione e corredata di formula).

-moltiplicazione e divisione (prima con lo stesso indice poi con indice diverso)

-addizione e sottrazione

-trasporto di un fattore dentro al segno di radice (si giustifica:*"talvolta è utile…"*, quando forse avrebbe avuto più senso introdurre prima il caso di un trasporto fuori)

-trasporto di un fattore fuori dal segno di radice (con regola e tanti sottocasi a seconda della relazione tra indice ed esponente)

-potenza

-radice di un radicale

-razionalizzazione (senza dare spiegazione sufficiente della tecnica di calcolo da usare, si presentano 4 casi)

-radicali quadratici doppi

Segue la definizione dei radicali in **R**, distinguendo il caso n pari e n dispari e, per il secondo caso, dimostrando che se b>0 i radicali in $\mathbf{R}_0^+$ e i radicali in **R** coincidono. Dopo aver dato la nuova definizione di radicale, si enuncia il teorema dell'esistenza e unicità della radice e si propone una ulteriore definizione:

*"Se n è un numero naturale diverso da zero, si definisce radice n-esima del numero reale a diverso da zero e la si indica con* $\sqrt[n]{a}$ *, quel numero reale b, se esiste, che ha lo stesso segno di a e tale che* $b^n = a$ *".*

Si ripercorrono poi <u>tutte</u> le proprietà verificando che sono valide anche per i radicali in R (ma la dimostrazione precedente a cosa serve?). Si conclude col paragrafo relativo alle potenze con esponente razionale, a gradi linee allo stesso modo di [TB], con la differenza che si cerca di "dimostrare" che tali potenze equivalgono all'operazione di estrazione di radice:

*"...perché $5^{\frac{2}{3}}$ possa essere considerata una potenza, per lei devono valere le proprietà delle potenze: $\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 5^2$, ma per definizione si ha $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$ "*

(nonostante tale argomentazione si ridimostrano le proprietà a partire dai radicali)
Segue un ulteriore paragrafo relativo alle potenze con esponente irrazionale.

[OC]
Si enuncia e si definisce la proprietà fondamentale e da questa si fa discendere:

a)la semplificazione (con attenzione al valore assoluto)

b)riduzioni di più radicali allo stesso indice (dandone giustificazione (cfr tra radicali) e richiamando la tecnica analoga per la riduzione di più frazioni allo stesso denominatore)

Da b) segue

c)moltiplicazione e divisione (evidenziando la simmetria dell'uguaglianza).;

Dall'osservazione che nella moltiplicazione si può arrivare anche a trovare dei radicali della forma $2\sqrt{3}$, ci si chiede se possono essere ridotti alla for ma di un "unico" radicale: segue

d)trasporto di un fattore sotto il segno di radice (con attenzione ai segni)

… e per la simmetria dell'uguaglianza segue

d)trasporto di un fattore fuori dal segno di radice (ma con formula farraginosa)

Si presentano di seguito le altre operazioni:

-elevamento a potenza

-estrazione di radice

-somma e sottrazione (osservando: *"...similmente a quanto accade per le proprietà delle potenze per la somma e sottrazione, non vi sono teoremi per l'addizione e la sottrazione di radicali…"*)

-razionalizzazione (con spiegazione;solo due casi, rimandando il resto agli esercizi)

-radicali doppi (la trattazione dei quali è giustificata dal fatto che possono incontrarsi nella risoluzione di alcune equazioni di grado superiore al I)

-semplificazione di espressioni irrazionali

Prima di concludere viene presentato un paragrafo relativo alle potenze con esponente razionale, con la stessa logica di [DBM], a partire dalla seguente osservazione:

*"...quanto vale il prodotto $a^{\frac{1}{2}}\, a^{\frac{1}{2}}$ ?"*

Si conclude con la definizione dei radicali algebrici per generalizzare il caso di a $\in$ R:

*"...sono quei numeri reali x che soddisfano l'equazione $x^n = a$ "*

[V]
Tutta la teoria viene svolta prima solo nel caso di radicali quadratici; poi si generalizza ad n.
Vengono presentate le seguenti proprietà:

-$\left(\sqrt{p}\right)^2 = \sqrt{p^2 = p}$

-moltiplicazione

-divisione

-elevamento a potenza

con tanti esempi chiarificatori, in cui, senza regole, ma applicando semplicemente le precedenti proprietà, si fa discendere:

-trasporto di un fattore dentro e fuori dal segno di radice (come semplice esercizio, che trova poi applicazione)

-somma e sottrazione (facendo vedere in particolare che $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$ (con dimostrazione), e spiegandola come semplice applicazione della proprietà associativa, in analogia col calcolo letterale)
Nell'esposizione c'è grande attenzione ai casi dubbi, che possono portare ad errore, a cosa fare e cosa non fare e "astuzie" di calcolo

-razionalizzazione (giustificando ogni singolo passaggio, e procedendo non per casi, ma per esercizi, facendone vedere subito una pratica applicazione nella semplificazione di espressioni irrazionali)
Si sposta poi il problema sulla risoluzione di equazioni del tipo $x^n = a$, attraverso l'esame di alcuni esempi:
…da $x^2=5$ si ha $x_1 = \sqrt{5}$ e $x_2 = -\sqrt{5}$, specificando che $\sqrt{5}$ rappresenta sempre una quantità positiva o nulla e che $\sqrt{5}$ è la radice aritmetica di 5, $\sqrt{5}$ e $-\sqrt{5}$ sono le radici algebriche di 5.
Attraverso esempi, richiamando cose già note o intuibili si arriva alla definizione di radice n-esima, facendo vedere il legame tra radice aritmetica e algebrica.
Negli approfondimenti viene trattata tutta la parte relativa ai radicali aritmetici di indice n, con pochissima teoria (non è altro che la generalizzazione dei casi già trattati) e molti esercizi.
Si conclude con le potenze ad esponente razionale, ma in modo completamente diverso dagli altri testi:

*"Tutte queste radici, questi indici, queste proprietà possono rendere le cose un po' confuse, allora i matematici, pigri e amanti della semplicità, hanno trovato una notazione migliore… Come hanno ragionato? La $\sqrt[n]{p}$ , per definizione è legata alla potenza. Perché allora non esprimere un radicale sottoforma di potenza? "*

Ponendo $\sqrt[n]{p} = p^x$ si arriva a dimostrare (agevolmente) che $x = \frac{1}{n}$. Si conclude:

*"…le proprietà dei radicali non sono altro che le usuali proprietà delle potenze!"*

Si completa con un paragrafetto sulle funzioni $y = \sqrt[n]{x}$ (disegnate per punti con l'utilizzo del calcolatore) e poi sui numeri complessi, introdotti a partire dal problema della risoluzione di equazioni del tipo $x^2 = -1$ e $x^6 = -3$

Maria Grazia Marzario