UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PISA
anno accademico 2006 - 2007

CORSO DI PERFEZIONAMENTO

Strategie didattiche per promuovere un atteggiamento positivo verso la matematica e la fisica

Relazione sulle attività del laboratorio 7 "Geometria e Algebra: le curve dei Greci e le curve di Cartesio" nell'ambito della "settimana matematica" dal 5 al 8 febbraio 2007

Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Pisa

Nicola Imbrenda **Claudia Maria Mazzanti** **Marco Rizieri Celli**

INDICE

Introduzione

La relazione vuole documentare lo svolgimento del Laboratorio 7 (Geometria e Algebra: le curve dei Greci e le curve di Cartesio) svoltosi nell'ambito della settimana matematica presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Pisa dal 5 al 8 febbraio 2007.

Sarà descritto il contesto di svolgimento del laboratorio, la sua impostazione e la conduzione delle lezioni; sarà esposto un profilo degli studenti che hanno partecipato al laboratorio, ottenuto attraverso l'osservazione o con colloqui diretti; saranno prese in esame le reazioni degli studenti desunte dall'osservazione diretta e/o attraverso l'analisi della loro produzione scritta.

Il contesto

La *Settimana Matematica* è un'iniziativa del Dipartimento di Matematica e del Corso di Laurea in Matematica dell'Università di Pisa, realizzata all'interno del Progetto Lauree Scientifiche, progetto nazionale che intende incentivare le iscrizioni ai Corsi di Laurea in Matematica, Chimica, Fisica e Scienze dei Materiali.

Con questa iniziativa si vuol dare l'opportunità agli studenti degli ultimi due anni delle Scuole Superiori interessati alla matematica di:

-Frequentare un laboratorio in cui ogni studente avrà la possibilità di confrontarsi con lezioni di tipo 'universitario' e di provare a 'fare matematica ', da solo o in gruppo, scoprendo o costruendo ipotesi, congetture, definizioni e teoremi;

-Assistere a seminari che descrivono – attraverso le dirette testimonianze di giovani laureati o di rappresentanti di imprese - le opportunità di lavoro, spesso sottovalutate, che una Laurea in Matematica offre.

-Conoscere il Dipartimento di Matematica di Pisa: gli spazi, i servizi che offre, le sue peculiarità;

-Stare in contatto con studenti iscritti a Matematica (alcuni dei quali saranno tutors nei vari laboratori), con la possibilità di confrontarsi e chiedere informazioni sull'esperienza che stanno vivendo.

(da http://www.dm.unipi.it)

IL LABORATORIO
Geometria e Algebra: le curve dei Greci e le curve di Cartesio

Staff

Responsabile: Pier Daniele Napolitani
Collaboratori: V. Cavagna, R. Bellè, R. Tucci
Tutor: Alberto Salani

Materiali didattici

Testo di riferimento:
Enrico Giusti "*Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*"
Boringhieri

Dispense fornite

Enrico Giusti: *Il problema delle tangenti* da Descartes a Leibnitz

R. Bellè, P. D. Napolitani: *La parabola semicubica*
Le sezioni coniche dei Greci

Ettore Lojacono [a cura di]: Opere scientifiche di Renè Descartes
Volume secondo
Discorso sul metodo, La Diottrica, Le Meteore, La Geometria

Presentazione a cura del prof. Pier Daniele Napolitani

Per noi una curva (algebrica) è descritta dalla sua equazione o quanto meno da una sua proprietà (per esempio l'ellisse è il luogo dei punti del piano tali che la somma delle loro distanze da due punti fissi è costante; oppure il luogo di zeri di un'equazione di secondo grado in due variabili i cui coefficienti soddisfano certe proprietà). Questo approccio però è relativamente recente, nella storia della matematica. Per i Greci, che inventarono le sezioni coniche, una curva è data quando si conosce una procedura costruttiva che la descriva. Per esempio, un'ellisse è la curva che si ottiene tagliando un cono con un piano che incontri tutte le generatrici. In questo modo la curva preesiste alle sue proprietà che andranno cercate e determinate. Per noi, la proprietà focale dell'ellisse ne costituisce la definizione; per Apollonio (che scrisse nel III sec. a.C. otto libri intitolati "Coniche") è un teorema che viene dimostrato solo alla fine del III libro, a conclusione di una lunga catena di teoremi. In questo laboratorio si intende far vedere da vicino le differenze fra i due approcci attraverso la lettura e la discussione di testi di Apollonio e di Cartesio, che per primo introdusse in matematica l'idea di curva-equazione e le tecniche per trattare le curve algebricamente. In particolare verranno discussi i metodi per la determinazione delle tangenti alle curve nella matematica greca e in quella cartesiana e post-cartesiana. Un utile riferimento per questo laboratorio è il libro di Enrico Giusti, "Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici", Boringhieri, ampiamente accessibile a uno studente degli ultimi anni delle scuole superiori.

(da http://www.dm.unipi.it)

OSSERVAZIONI SULLO SVOLGIMENTO DEL LABORATORIO

Scopo

Le finalità dell'intervento sono state elencate fin dal primo momento, ma sono state percepite completamente solo nell'ultima giornata, quando si è scoperto che le metodiche moderne scaturiscono dalla rielaborazione e razionalizzazione degli strumenti geometrici del passato.

L'attività

L'attività di laboratorio è partita dall'esposizione e spiegazione "alla lavagna" di argomenti, a cui si sono alternati momenti di consultazione del materiale didattico o di produzione di elaborati.

Le sezioni coniche sono state l'argomento del laboratorio.

Nel laboratorio ci si è soffermati sulle tangenti alle coniche dal punto di vista meramente geometrico, per poi passare allo studio per via analitica secondo Descartes e Leibniz.

Poiché l'approccio allo studio delle curve nella geometria greca, priva dell'algebra, seguiva una procedura costruttiva, il docente ha proposto il percorso di studio sulle sezioni coniche a partire dalle peculiarità delle curve e non dalle sue caratteristiche algebriche. Un approccio vecchio di 2300 anni ma senz'altro nuovo per gli studenti del XXI secolo! Si è anche evidenziato che, in questo modo, la curva viene descritta in maniera più semplice e, forse, naturale.

Nonostante sia stato posto l'accento sulla validità di tale approccio geometrico, non sono state fornite ai ragazzi eccessive notizie dal punto di vista cronologico, a parte le considerazioni che le prime notizie certe risalgono al III secolo a.c.

Si è utilizzato la storiografia e i testi classici per una fruizione immediata ed uno stimolo alla riflessione sul linguaggio. I linguaggi e i significati, diversi da quelli odierni, sono stati oggetto di discussione e rielaborazione ed hanno aperto un confronto tra gli studenti che hanno provato a formulare delle definizioni originali sugli oggetti trattati (tangenti alle varie curve).

Il collegamento con i contenuti attualmente trattati nelle scuole superiori si è concretizzato con l'introduzione alle opere di Descartes; questo snodo storico è stato curato con particolare attenzione dal docente.

Strumenti

La brevità dell'intervento non ha permesso l'utilizzo di strumenti didattici particolarmente sofisticati ed è stata utilizzata solo la lavagna come supporto didattico. Quindi sulla lavagna sono stati tracciati i disegni, abbastanza complessi per la necessità dell'uso della prospettiva per le figure tridimensionali e alla lavagna sono stati presentati i calcoli quando necessario. Alcune volte, nei calcoli algebrici sono stati omessi dei passaggi che, alla luce della nostra prassi quotidiana, possono aver rappresentato un ostacolo alla comprensione per studenti che, sebbene motivati e preparati, sono pur sempre studenti di scuola media superiore.

Atteggiamento dei docenti

Rispetto a quanto avviene in classe e a come sono abituati gli studenti nelle scuole superiori, abbiamo osservato che gli insegnanti si sono mantenuti alquanto distaccati, e non hanno indagato eccessivamente sul grado di comprensione e partecipazione, forse per non apparire troppo invasivi.

GLI STUDENTI

Composizione del gruppo

2	studenti	Liceo scientifico	Buonarroti	(Pisa)
2	“	Liceo scientifico	Dini	(Pisa)
1	“	Liceo scientifico	XXV Aprile	(Pontedera Pisa)
1	“	ITCG	Piccolini	(Volterra Pisa)
2	“	Liceo scientifico	Enriques	(Livorno)
2	“	Liceo scientifico	Cecioni	(Livorno)
2	“	Liceo scientifico	Vallisneri	(Lucca)
1	“	Liceo classico	Machiavelli	(Lucca)
5	“	Liceo scientifico	Majorana	(Capannori Lucca)

Atteggiamento degli studenti

Gli studenti non avevano scelto il laboratorio 7 come prima opzione, ci si poteva attendere, di conseguenza, una motivazione ed una partecipazione di seconda scelta ma non è stato così.

Gli studenti hanno seguito le lezioni con attenzione, accuratezza e partecipazione encomiabili. Il primo giorno c'è stata un'attenzione più che altro recettiva e mirata all'assimilazione di concetti e informazioni, forse un po' acriticamente, ma soprattutto guardinga, per paura di fare brutte figure. Successivamente, rotto il ghiaccio, quando sono stati richiesti pareri o interventi di vario genere, questi sono sempre giunti a proposito e correttamente; non si sono mai rilevati quei silenzi imbarazzati che spesso fanno da cornice alle lezioni in classe. L'impegno profuso dai ragazzi, che ci ha lasciati stupiti, può essere una possibile conseguenza dell'eccezionalità dell'evento che li ha coinvolti.

Effetti collaterali

Gli effetti dell'intervento che abbiamo potuto notare sono stati un rafforzamento dell'autostima, e della consapevolezza delle proprie possibilità. Lo studio come principale strumento per il superamento dei propri limiti.

Osservazioni sugli studenti

La qualità, la motivazione e l´atteggiamento dimostrato dai ragazzi coinvolti nella settimana matematica 2007, è stata una piacevole sorpresa ed ha suscitato la nostra curiosità. Abbiamo cercato di indagare sulle condizioni socio affettive emotive che li hanno portato a tali livelli parlando con alcuni di loro o intervistandoli direttamente, sempre dichiarando apertamente lo scopo delle domande. Alcune interviste sono state registrate.

I ragazzi si sono dimostrati sempre collaborativi: della decina di persone esaminate, la maggior parte ha individuato in una figura familiare (padre, madre o fratelli) il riferimento che li ha spronati e supportati; merita sottolineare che non necessariamente tali figure hanno una istruzione elevata, ma sono in qualche modo interessati ad argomenti di carattere scientifico.

Raramente l'interesse per la cultura scientifica è stato trasmesso da un insegnante.

In ambito familiare, circolano riviste scientifiche o parascientifiche (Focus, Le Scienze) per il soddisfacimento di curiosità sulle recenti scoperte; talvolta interpellano anche gli insegnanti. Pur non avendo un riscontro oggettivo, si percepisce che i libri sono un po' in discesa nel gradimento degli studenti, in parte sostituiti dalla consultazione di internet.

Non sono state rilevate indicazioni significative relative al censo.

Pochi ragazzi dichiarano di avere interessi mirati esclusivamente alle materie scientifiche: quasi tutti studiano ed approfondiscono volentieri anche materie umanistiche, riportando, generalmente, buoni risultati scolastici. Le due eccezioni riscontrate sono dovute a incomprensioni con gli insegnanti.

La ricerca di correlazione tra il successo nelle materie umanistiche e quello nelle discipline scientifiche non ha dato risultati significativi.

Le interviste

La maggior parte dei partecipanti frequenta il liceo scientifico, l'ultimo anno per la precisione, ci ha molto incuriosito quindi la presenza di alcuni "outsider" e li abbiamo intervistati.

Studentessa dell'ultimo anno di liceo classico:
è sempre stata in difficoltà in matematica ("dalle elementari"), ha capito abbastanza ed ha seguito abbastanza bene, malgrado le mancasse la conoscenza di strumenti come il teorema di Ruffini o il criterio di uguaglianza dei polinomi. Ha molto apprezzato il percorso dai greci alle derivate anche da un punto di vista filosofico.

Studente del quinto anno di ragioneria:
si è trovato abbastanza in difficoltà perché quella che studia a scuola è matematica applicata; l'eventuale trattazione sulle curve è solo algebrica. Non si ritiene in grado di particolare autonomia di intervento.

Studente del terzo anno del liceo scientifico:
si è studiato le iperboli a casa la sera precedente perché l'argomento non era stato ancora affrontato a scuola e temeva di fare brutta figura o non capire. La passione per la matematica è sbocciata questa estate dopo la lettura di alcuni libri di matematica perché temeva di fare figuracce con la nuova insegnante. Manifesta una grande autostima e capacità nei propri mezzi; lo dimostra anche con interventi pertinenti e corretti durante la lezione.

Studente del quarto anno liceo scientifico (Livorno):
leggermente in difficoltà perché non ha ancora affrontato le derivate, ma ha capito il senso e il perché del percorso, anche se non se la sentirebbe di sostenere un esame.(ma la produzione scritta, in appendice documenta la sua autonomia). Passione per la materia dalla maestra elementare (famiglia = infermiera, idraulico). E' uno dei due più bravi ma va bene anche nelle altre materie.

Produzione degli studenti

Modalità: appunti scritti, alcuni anche multicolori, sul modello proposto dai docenti.

In APPENDICE A sono riprodotti alcuni appunti degli studenti: da pag 12 a pag. 28 ci sono tutti gli appunti di una sola studentessa.

I contenuti degli appunti non sono, nelle maggior parte dei casi, delle fotocopie di quanto è presente sulla lavagna. Non abbiamo osservato ciò che di solito accade: la riproduzione più completa possibile di quanto esposto ed illustrato dal docente per una fruizione successiva. L'impostazione del laboratorio, articolato in tre giorni di seguito, con attività fino alle 18,30 non lasciava il tempo per la rielaborazione casalinga che ci si aspetta da studenti delle superiori. Gli appunti osservati, accurati e completi, mostrano valutazioni ed aggiunte personali che fanno evincere una rielaborazione in tempo reale. Non sono presenti eccessive cancellature il che evidenzia sicurezza e possiamo notare una buona distribuzione spaziale nell´utilizzo del foglio. In più, gli esercizi proposti non certo banali, in molti casi sono stati risolti autonomamente. A pag 22 – 23, 29 – 30, 31 – 32 si possono osservare le soluzioni allo stesso problema di tre studenti diversi.

Conclusioni

Da quanto esposto sembra emergere che i ragazzi vivano in un ambiente vivace ed attento al cui interno poter coltivare la propria intelligenza e crescita culturale.

Essi sono ben consapevoli delle loro qualità, non mostrano falsa modestia ed hanno un comportamento tranquillo e gentile nei confronti degli interlocutori; si può dedurre che l´atteggiamento della famiglia sia di vigile attenzione alla disciplina e all'applicazione quali presupposti iniziali allo studio, prima ancora dell’interesse o il piacere personale.

A questo riguardo, merita osservare la crescente componente utilitaristica nello studio che si rileva nelle scuole a discapito di quella più specificatamente speculativa: i ragazzi tendono – non sempre a torto – a voler individuare un rientro tangibile delle loro fatiche chiedendo spesso a cosa possono servire le cose che stanno studiando; sta venendo meno l’interesse culturale ed estetico per le discipline.

Forse anche in questi termini potrebbero venir lette le disaffezioni registrate verso le materie scientifiche a vantaggio di quelle umanistiche o tecniche: per la ridotta applicazione richiesta o per i vantaggi economici auspicabili in seguito.

Evoluzione auspicabile

Europe needs more scientists.
Report by the High Level Group on Increasing Human Resources for Science and Technology in Europe 2004
(ec.europa.eu/research/conferences/2004/sciprof/pdf/final_en.pdf)

Rappresenta un “grido di dolore” al quale dobbiamo prestare attenzione; inoltre la comunità europea investirà risorse su questo tema.

Una possibile evoluzione dei laboratori potrebbe essere rappresentata da lezioni/laboratori per la valorizzazione delle eccellenze tenute da personale universitario per liberare gli studenti dalle "grinfie" dei propri docenti (... i miei ragazzi...), per un incremento dell'autostima degli studenti e la crescita della loro autonomia intellettuale.

Un possibile scenario potrebbe essere quello in cui l'università propone alla scuola superiore, con il supporto degli enti locali e della regione e, volendo, della UE, lezioni di "alto profilo" per un primo assaggio di discontinuità spazio (lezioni non a scuola) tempo (gestione del proprio budget di lezioni/laboratori). Si noti il ruolo di proponente che deve assumere l'università uscendo dalla sua torre d'avorio.

Le lezioni disciplinari o i laboratori potrebbero essere seguite dagli "eccellenti" ed organizzate per tutte le discipline degli ultimi anni di corso, anche quelle umanistiche. Gli “eccellenti” potrebbero essere individuati nelle graduatorie delle varie olimpiadi che si tengono periodicamente, o individuati con strumenti creati ad hoc. Il loro percorso potrebbe essere seguito da un tutor o una figura similare che ne segua l'evoluzione. In molte discipline sportive i campioni vengono individuati da piccoli e fatti crescere nei cosiddetti ¨vivai¨. Per le attività intellettuali non esiste nulla di simile e, mentre i talenti sportivi vengono ¨coltivati¨ ed emergono, quelli intellettuali vengono lasciati al loro destino. Non possiamo abbandonare a sé stessi questi ragazzi e le loro intelligenze che sono una risorsa strategica per il paese.

APPENDICE A

Appunti degli studenti

5-02-'07

E. GIUSTI "Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici" (Boringhieri)

libro consigliato

$F(x,y)=0$

ellisse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$

$\Downarrow$

equa generale conica

"matematica greca è PRIVA dell'algebra

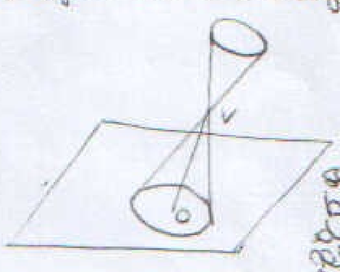
le curve greche sono descritte dal modo in cui si ottengono

· sezioni coniche:

(del III a.C.) → Apollonio metà III sec a.C. produce 8 libri di coniche: 4 in greco, 3 in arabo, 1 non è stato trovato

prima di Apollonio si consideravano solo coni retti ed il piano che tagliava era perpendicolare: ~~...~~

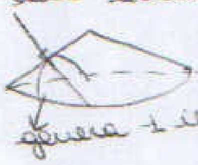
· x 1 sezione 1 retta è il seguente.



venivano distinti 3 tipi di coni a seconda se l'angolo era retto, acuto, ottuso

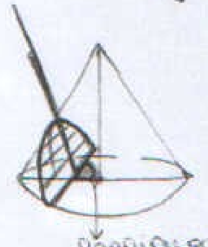
x es. cono ottuso:

genera 1 iperbole.



se VO è ⊥ base, Apollonio dice che il cono è retto, se V.O. è storto il cono è obliquo.

ottiene il cono facendo girare la retta intorno al punto V.



(piano // ad 1 dei lati).

• 1 delle prime proprietà Apollonio: se taglio cono con 1 piano che passa x il vertice ottengo 1 ~~...~~ triangolo

facciamo in modo che quest'angolo = 90°

tutte le rette // (quelle rosse) sono bisecate dalla retta

τ = triangolo σ = secante β = base (τ = triangolo "per l'asse")

$\sigma \cap \tau$ = diametro intersecato

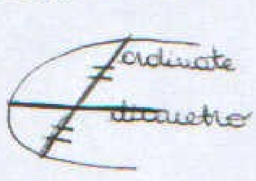
$\sigma \cap \beta$ = direzione delle ordinate (le rette rosse sono le ordinate)

· il diametro divide a metà le ordinate (se l'angolo è 90°)

$d \perp o \overset{\text{se solo se}}{\Longleftrightarrow} \tau \perp \beta$

diametro ordinate

· i coni di Apollonio sono + generali di quelli prima perché considera tutti coni obliqui



→

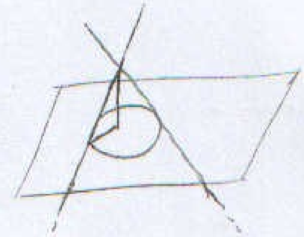
1

6-03-'07

· Insiemi.... di coniche
prendo 2 insiemi di coniche definite diversamente e dimostro ke sono =: scopo della lezione

· ellissi → insieme punti del piano tali ke $d(PF_1)+d(PF_2)=K$
parabole → " " " " " $d(PF) = d(Pr)$ → r = retta
iperbole

· ellissi
parabole
iperboli | sezioni coniche di 1 cono circolare retto con 1 piano non passante per il vertice



B = { sezioni di un cono circolare retto con 1 piano non passante per il vertice } = A = {ellisse, parabole, iperbole}

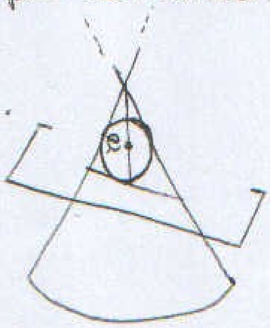
voglio dimostrare ke A=B
x dimostrare prendo 1 cono circolare retto lo seziono e vedo ke ottengo ellissi, parabole o iperbole

· voglio dimostrarlo usando solo PROPRIETA' SINTETICHE (della geometria euclidea)

· voglio far vedere che B è contenuto in A:
prendo 1 qualsiasi sezione conica (con piano non passante per il vertice) e faccio vedere che questa sezione è:
o un ellisse
o una parabola
o un iperbole

→ devo far vedere ke questa è o 1 ellisse o parabola o iperbole.
P sulla curva verificare una delle proprietà che definiscono gli oggetti di A
1822 Dandelin

(1 piano può intersecare o 1 o 2 falde del cono)



- considero sfera tangente internamente al cono e al piano

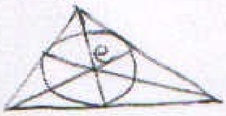
Problema: esiste?
SI NO
quante?

= teorema
Proposizione: esiste almeno 1 sfera tg internamente al cono e al piano
↓
almeno 1 sfera esiste

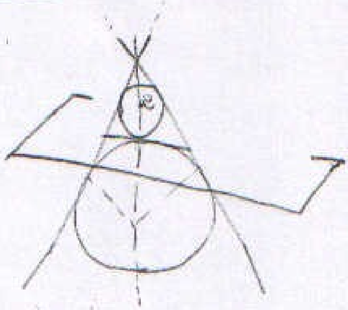
prova: cerco il centro (C) della sfera ed il raggio
un punto dell'asse del cono equidistante dal piano e dal cono →

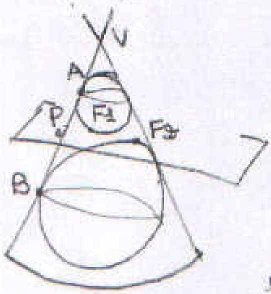
2

come il punto del triangolo equidistante dai lati.



Proposizione 1: esiste almeno 1 sfera ...
" 2: " un'altra " ...





P è sull'intersezione del piano con il cono
costruisco la generatrice PV

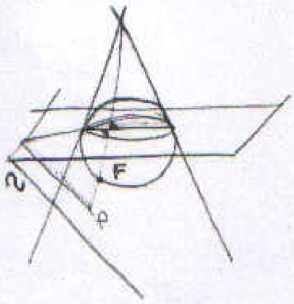
A → punto tg della sfera piccola sulla generatrice
F_1 → " " " " con il piano

osservo:

$PF_1 = PA$ (⇒ perché sono 2 tg dallo stesso punto alla sfera)
$PF_2 = PB$ (⇒ ")

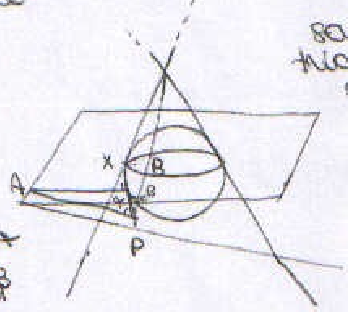
$AB = PF_1 + PF_2$
AB è costante
⇒ ho dimostrato che quella è 1 ellisse

come per la parabola:



retta direttrice

sono 2 triangoli rettangoli



$PX = PA \cos\alpha$
$PX = PB \cos\beta$

$\frac{PA}{PB} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ → il rapporto $\frac{PA}{PB}$ è costante

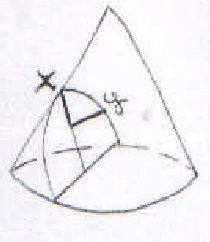
se $\cos\beta$ è > $\cos\alpha$ ⇒ $\frac{PA}{PB}$
" " " è < " " ⇒ "

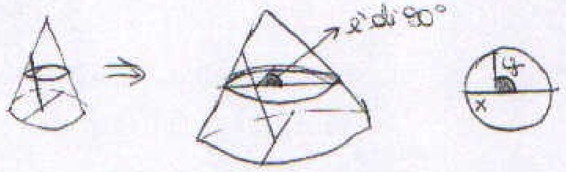
$\cos\beta > \cos\alpha$ ⇐
(β è < α)
se α < β → $\cos\alpha > \cos\beta$

⇓
se è sezionata iperbole il rapporto è > 1;
se è 1 ellisse è < 1.

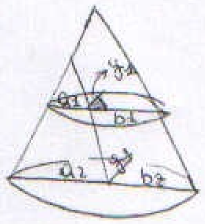
3

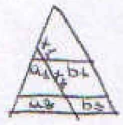
la relazione c'è tra x ed y?



(

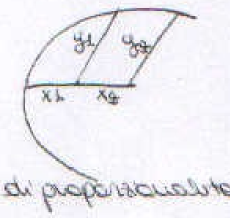
circonferenza)





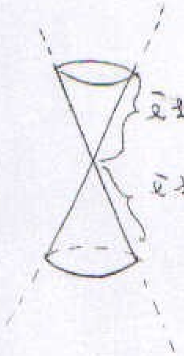
$$\frac{y_1^2}{y_2^2} = \frac{a_1 \times b_1}{a_2 \times b_2} = \frac{a_1}{a_2} \times \frac{b_1}{b_2}$$

$$\frac{y_1^2}{y_2^2} = \frac{x_1}{x_2}$$



$$\boxed{y^2 = kx}$$

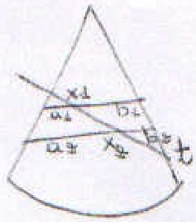
costante di proporzionalità



nell'iperbole sono 2 falde, nell'ellisse, cerchio e parabola solo 1 falda.

4

Per l'ellisse:



$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{x_1}{x_2} \qquad \frac{b_1}{b_2}=\frac{t-x_1}{t-x_2}$$

$$\frac{y_1^2}{y_2^2}=\frac{a_1}{a_2}\times\frac{b_1}{b_2}$$

$$\frac{y_1^2}{y_2^2}=\frac{x_1}{x_2}\times\frac{t-x_1}{t-x_2}$$

$$y^2 \;\; x\times(t-x)$$

per la parabola:

$$\frac{y_1^2}{y_2^2}=\frac{a_1\times b_1}{a_2\times b_2}$$

$$\frac{y_1^2}{y_2^2}=\frac{a_1}{a_2}\times\frac{b_1}{b_2}$$

$$\frac{x_1}{x_2} \qquad \frac{a_1}{a_2}=\frac{x_1}{x_2}$$

· per l'iperbole:

$$\left(\frac{a_1\times b_1}{a_2\times b_2}\right)$$

$$\frac{y_1^2}{y_2^2}=\frac{a_1}{a_2}\times\frac{b_1}{b_2}$$

$$=\frac{x_1}{x_2}\times\frac{t+x_1}{t+x_2}$$

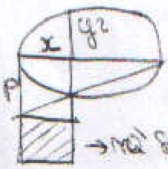
(prendo in considerazione GPZ)

· eccesso → iperbole ($t+x_1$ (x_2))

· difetto → ellisse ($t-x_1$ (x_2))

· parabola in esso nel dire applicazione.

· ellisse:



→ ho sottratto l'area di questo rettangolino.

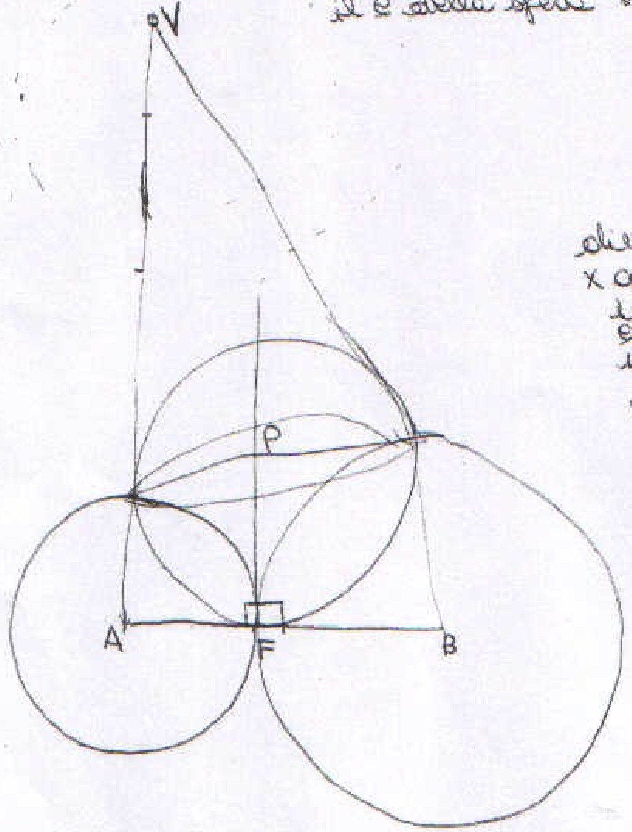
5

→ data conica esiste almeno 1 punto F e una retta r

$$\frac{d(PF)}{d(Pr)} = \begin{matrix} >1 \\ =1 \\ <1 \end{matrix}$$

· voglio far vedere che A è contenuto in B

· il c della sfera stessa



dimostrare che x ogni punto dell'intersezione del cono tagliato con il piano.

verifica: $d(PF_1) + d(PF_2) = K$

· perché mi sono convinta che di coni ce ne sono molti dove sono i vertici?

· Esercizio: vertici determinare un iperbole nel piano ⊥ al ~~punto~~ punto A e B.

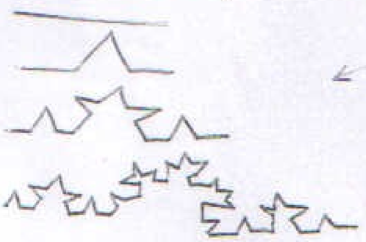
6

"SEMINARIO"

- $\mathbb{R}$ insieme n° reali → retta
- $\mathbb{R}^2$ " delle coppie (x_1, x_2) → piano
- $\mathbb{R}^3$ " " terne $(", ", x_3)$ → spazio
- $\mathbb{R}^n$ " " n-uple $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ → spazio n dimensionale

$X = (x_1, x_2)$ distanza : $d(X,0) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (→ teorema pitagora)
$X = (", ", x_3)$ " : $d(X,0) = \sqrt{" + " + x_3^2}$
$X = (", ", " \ldots x_n)$ " : $d(X,0) = \sqrt{" + " + " \ldots x_n^2}$

- in matematica c'è anche:
  - esistenza di infiniti non numerabili
  - spazi a dimensione infinita
    $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: insieme delle successioni $(x_1, x_2 \ldots)$ $d(X,0) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 \ldots}$
  - spazi funzionali con 1 numero non numerabile di dimensioni : $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
- oggetti geometrici a dimensione frazionaria (frattali)
  ~~[illegible]~~ x es. la curva di Koch:



dimensione = $\frac{\log 4}{\log 3} = 1,2615$

oppure insieme di Cantor
$\dim = \frac{\log 2}{\log 3}$

- in matematica ci sono proposizioni che non possono essere dimostrabili (non sono né vere né false)

mondo reale $\xrightarrow{\text{astrazione}}$ matematica
matematica $\xrightarrow{\text{applicazione}}$ mondo reale

- ~~[illegible]~~
  ~~[illegible]~~ crittografia:
  - metodo ASCII
  - codice RSA:
    - scelgo p e q ; n° più alto grandi affinché $m = p \cdot q$ sia > del n° cifre del messaggio m
    - scegliamo "e" coprimo di $f = (p-1)(q-1)$, $1 < e < f$
    - calcoliamo il n° intero d (esponente chiave privata) tale che $e \cdot d = 1 \mod f$
    - x criptare messaggio(m) calcolo $c = m^e \mod n$
    - x violare il codice bisogna sapere p e q

(computer, x ora, + veloce è il "Blue Gene" dell'IBM →

7

· MATEMATICA NEL WEB":

- page ranking (Google)
- information retrieval
- gestione informazioni

· 2 studenti dell'università di Stanford (Page e Brin), ~~Google~~ hanno inventato Google.

In Google cercando 1 parola spuntano tantissime pagine, ~~le~~ Google mette in ordine queste pagine ~~mettendo~~ mettendo in cima le + significative. Come fa a decidere le pag + significative?

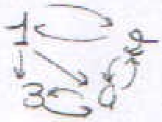
varie proposte:
- n° volte ke compare la parola cercata
- in base ~~ai~~ ai link ke da essa partono
- " " ai " " ed " arrivano

è il criterio giusto →
- " " al n° delle pag. importanti ke puntano a quella pag

numeriamo le pag. del web da 1 a m:
la matrice di connettività (H)

x es se $m = 4$

~~H_{ij}~~ $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$



grazie alla matrice (H) capiamo i collegamenti.

~~[illegible]~~ l'equazione usata da Google:

$$x_j = d\left(h_{1j}\frac{x_1}{r_1} + h_{2j}\frac{x_2}{r_2} + \dots h_{mj}\frac{x_m}{r_m}\right) + \frac{1}{3}(1-d)$$

dove "x_j" è l'importanza della pag "j"
(questa equazione ci permette di ordinare le pag in ordine d'importanza)

SITO: WWW.DM.UNIPI.IT/~BINI
WWW.DM. "

8

• Laboratorio: a) • definisci una tg alla circonferenza:

1 retta ~~tg~~ che ha 1 punto in comune con la circonferenza (1 x la cui distanza dal centro della circo = raggio)

b) • definisci 1 tg alla parabola:

retta che ha 1 punto in comune con la parabola esternamente

c) • definisci 1 tg ad 1 curva qualunque,

1 retta che ha 1 punto in comune con 1 curva esterna.

– dire ke ha 1 punto in comune non va bene x tutte le curve xké x es. nella parabola:

tg come caso limite della secante → 2 punti coincidenti

• sistema: $\begin{cases} \text{curva} \\ \text{retta} \end{cases}$ $\Delta=0$

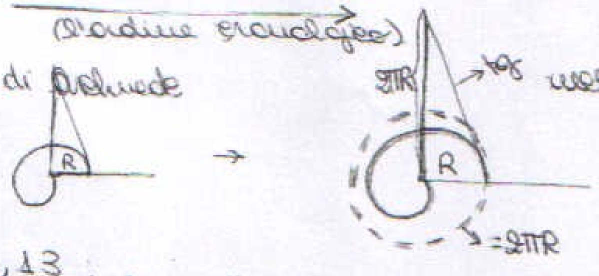
→ non funziona neanche nelle curve "flesse"

e nelle curve ke ritornano su se stesse

• In Euclide si definita la retta di ogni curva xké non c'è 1 definizione x tutte le curve
(x es la tg di 1 circo è ...
" " " " para è ...
" " " " iperbole è ...)

· Euclide, Archimede, Apollonio
(in ordine cronologico)

· spirale di Archimede



mette in relazione la tg con la circo
(il segmento retta = alla circo tratteggiata)

Spirali, 13: • se 1 retta è tg alla spirale, la tocca in 1 sol punto

(la tg "accarezza" in 1 sol punto)

x costruire la tg bisogna costruire quel segmento lungo $2\pi R$

· la geometria greca tratta le curve 1 alla volta, è difficile dare 1 regola così generica. I greci hanno circa 1 decina di curve. Poi 1 curva, x Descartes, sono il luogo degli zeri → così si potrà fare definizione + generale

$F(x;y)=0$

$(y-y_0)=m(x-x_0)$

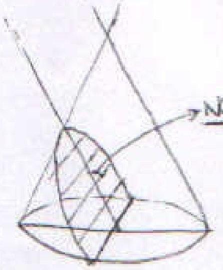
$Q(x)=(x-x_0)^2 P(x)$

polinomio in x

9

· dall'idea ke ci sia 1 radice doppia $(x-x_0)^2$ viene in mente qualcosa di + generale →

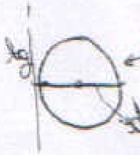
indirizzo: napolita@dm.unipi.it



NON è necessario che quest'angolo sia = 90°

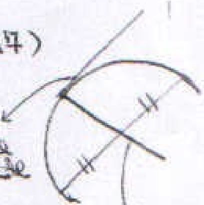
(diametro
direzione ordinate)
lato retto → che è il "SINTONO" della curva (e dà l'equazione della curva.

nella parabola: i quadrati delle ordinate sono = ai rettangoli costruiti sulle ascisse ed il lato retto

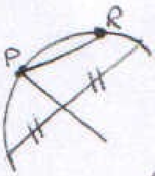


← circonferenza
la tg è ⊥ al diametro

· I, 17)



I, 10)



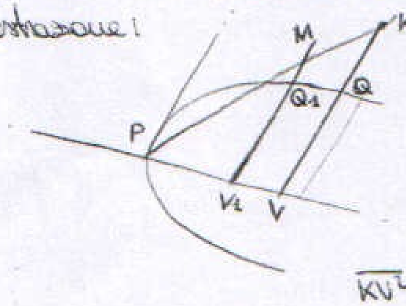
("la r // alle ordinate nel punto in cui diametro incontra curva è tg alla curva stessa.")

(se la retta r è tg alla curva tra la retta e la curva non si possono stare altre rette.)

· X dimostrare ciò bisogna analizzare proprietà delle singole curve

(proposizione 17, III libro elementi)

dimostrazione:



$\overline{KV}^2 : \overline{PV}^2 > \overline{QV}^2 : \overline{PV}^2 \quad (KV > QV)$

→ è il quadrato dell'ordinata che è $= PL \cdot PV$ ←

$\overline{KV}^2 : \overline{PV}^2 > (\overline{PL} \cdot \overline{PV}) : \overline{PV}^2$

$= \overline{PL} : \overline{PV}$

$\overline{KV}^2 : \overline{PV}^2 = \overline{PL} \cdot \overline{PV_1}$

$= \overline{PL} \times \overline{PV_1} : \overline{PV_1}^2$

$= \overline{Q_1V_1}^2 : \overline{PV_1}^2$

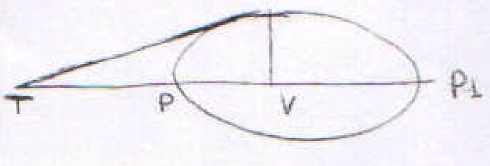
$KV^2 : PV^2 = MV_1^2 : PV_1^2 \Rightarrow Q_1V_1^2 : \overline{PV_1}^2 = \overline{MV_1}^2 : \overline{PV_1}^2$

$= \overline{Q_1V_1}^2 : \overline{PV_1}^2$

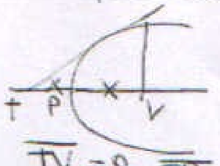
$Q_1V_1 = MV_1$

importante è la regola: $\overline{QV}^2 = \overline{PL} \cdot \overline{PV}$

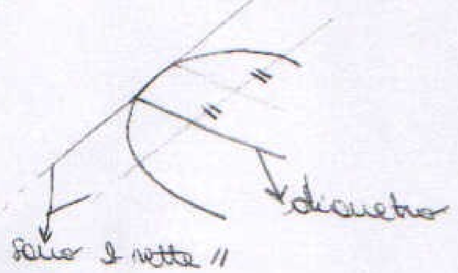
nell'ellisse:



nella parabola:

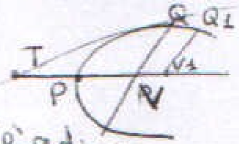


$\overline{TV} = 2 \cdot \overline{TP}$



proviamo a dimostrare che $\overline{AB} = \overline{BC}$:

siamo su parabola



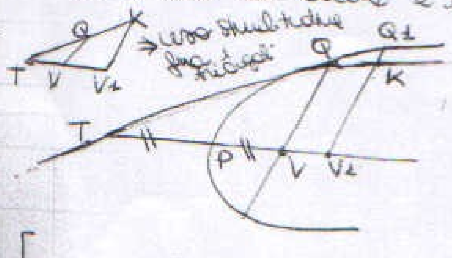
① ipotesi) retta $\overline{PV}$ è diametro e retta $\overline{QV}$ è ordinata

$$\overline{QV}^2 : \overline{Q_1V_1}^2 = PV : PV_1$$ (è 1 ipotesi sempre vera).

② ipotesi) $\overline{TP} = \overline{PV}$

Ts (Tesi): retta $\overline{TQ}$ è tg alla parabola
per dimostrarlo possiamo dimostrare che:
1) tra TQ e la parabola non ci sono rette
2) TQ taglia la parabola solo in Q, cioè nessun punto di TQ sta dentro la parabola né prima né dopo Q

procediamo per assurdo e supponiamo che ci sia 1 punto "K" sulla retta ed interno. (nel disegno dobbiamo fare la retta 1 po' storta xkè in realtà è impossibile)



∴ x assurdo esista "K" su TQ interno alla parabola.

① $Q_1V_1 > KV_1$ (1° punto della dimostrazione)

$$\overline{Q_1V_1}^2 : \overline{QV}^2 > \overline{KV_1}^2 : \overline{QV}^2 = \overline{TV_1}^2 : \overline{TV}^2$$

$$\overline{Q_1V_1}^2 : \overline{QV}^2 = \overline{PV_1} : \overline{PV}$$

$$\overline{PV_1} : \overline{PV} > \overline{TV_1}^2 : \overline{TV}^2$$

(moltiplico sopra e sotto per GTP) $(GTP \cdot \overline{PV_1}) : (GTP \cdot \overline{PV}) > \overline{TV_1}^2 : \overline{TV}^2$

visto che $\overline{TP} = \overline{PV} \Rightarrow (GTP : \overline{PV_1}) : (G \underbrace{\overline{PT} \cdot \overline{PT}}_{GPT^2})$ →

dimostrazione del libretto.

$Q_1V_1^2 : QV^2 > KV_1^2 : QV^2 = TV_1^2 : TV^2$

$Q_1V_1^2 : QV^2 > TV_1^2 : TV^2$

$PV_1 : PV = Q_1V_1^2 : QV^2 > TV_1^2 : TV^2$

$PV_1 : PV > TV_1^2 : TV^2$

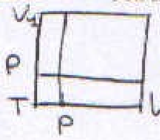
nostra dimostrazione ~~[illegible]~~

poi usiamo la 2ª ipotesi: $PV = TP$

$PV_1 : PV > TV_1^2 : TV^2$

$TV_1 = TP + PV_1$

$TV_1^2 = TP^2 + PV_1^2 + 2TP \cdot PV_1$ (quadrato di binomio)



i greci lo facevano così xké non avevano l'algebra

$PV_1 : PV > (TP^2 + PV_1^2 + 2TP \cdot PV_1) : TV^2$

$TV^2 = (2PV)^2 = 4PV^2$

$PV_1 : PV > (TP^2 + PV_1^2 + 2TP \cdot PV_1) : 4PV^2$

$(TP = PV)$

$PV_1 : PV > (PV^2 + PV_1^2 + 2PV \cdot PV_1) : 4PV^2$

$4PV^2 \frac{(PV_1)}{PV} > PV^2 + PV_1^2 + 2PV \cdot PV_1$

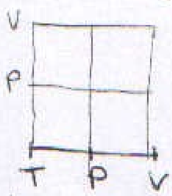
$4PV \cdot PV_1 > PV^2 + PV_1^2 + 2PV \cdot PV_1$

$2PV \cdot PV_1 > PV^2 + PV_1^2$

$0 > PV^2 + PV_1^2 - 2PV \cdot PV_1$

$0 > (PV - PV_1)^2$

$\Rightarrow$ è impossibile ke 1 quadrato di binomio sia minore di 0 $\Rightarrow$ abbiamo portato a termine la dimostrazione x assurdo.



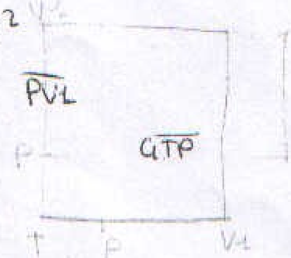
$PV_1 : PV > TV_1^2 : TV^2$

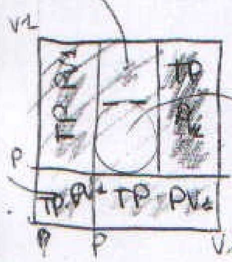
$4 \cdot TP \cdot PV = TV^2$

$(4TP \cdot PV_1) : (4TP \times PV) > TV_1^2 : TV^2$

$4TP \times PV_1 > TV_1^2$

dal disegno vedo ke non è vero: $4TP \times PV_1$ è $< TV_1^2$





$\rightarrow$ questo quadrato qui avanza $\Rightarrow 4TP \times PV_1$ è $< TV_1^2$

7-09-'09

· All'inizio del 600 viene introdotta l'algebra simbolica (l'algebra era nata con orale). X ora l'algebra ha ruolo minore rispetto alla geometria

All'inizio del 600 François Viète ha idea di usare algebra x risolvere geometria. Fa invenzione di introdurre come oggetti dell'algebra delle lettere → 1 lettera ke notazione ha? è un numero, 1 grandezza.... ?

Applica quest'algebra ai problemi di geometria.

François Viète (1540 - 1603)

Cartesio trova nel modello di Viète 1 esempio di metodologia.

(Des Cartes) nel 1637 Cartesio pubblica discorso sul metodo

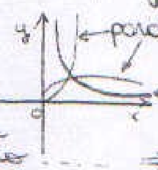
· Cartesio crea l'idea di curva - equazione

x es. $a:x = x:y = y:b$ si può risolvere con equazioni anche:

$ab = x \cdot y$
$a \cdot y = x^2$ sono 2 parabole ed 1 iperbole
$b \cdot x = y^2$

· poi Cartesio dice ke le curve accettabili sono quelle ke si possono mettere in equazione (dopo Viète le equazioni possono essere di tutti i gradi)

· con Cartesio c'è rovesciamento rispetto Apollonio: con Apollonio 1 curva nasce già con il suo asse, diametro, ordinate... invece con Cartesio dall'equazione della curva poi si possono trovare asse, diametro ... → rovesciato il punto di vista.



NORMALE

questa è la "normale" → la ⊥ alla tg

Cartesio dice ke conoscendo la normale poi si può trovare tutto (pag 595 del volumetto)

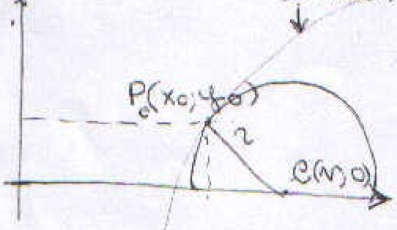
x cui Cartesio vuole trovare la ⊥ alla tg di 1 curva qualsiasi

· ipotesi x cui Cartesio cerca la normale, e non la tg, è ke Cartesio si interessa anche di fisica ed in fisica c'è la normale nella rifrazione.

· Viète studia problemi determinati → c'è 1 soluzione determinata (x es. 1 punto)

· Cartesio " " indeterminati → non c'è 1 " determinata ma è indeterminata (x es. 1 luogo di punti)

· x Cartesio 1 equa è 1 modo di esprimere 1 curva



voglio determinare 1 cerchio tangente in P alla curva con il centro sull'asse x

equa del cerchio: $PC = r$, $OC = v$

$$(x-v)^2 + y^2 = r^2$$

è di grado m ⇐ $\begin{cases} P(x;y) = 0 \leftarrow \text{insieme tra curva e} \\ (x-v)^2 + y^2 = r^2 \leftarrow \text{cerchio} \end{cases}$

trovo polinomio

$$\underbrace{Q(x)}_{\text{di grado } 2m} = \underbrace{(x-x_0)^2}_{\text{grado } 2} \cdot \underbrace{R(x)}_{\text{grado } 2m-2}$$

13

→

(nel caso della parabola):

$$\begin{cases} y = mx^2 \\ (x-r)^2 + y^2 = \ell^2 \end{cases} \qquad x^2 + r^2 - 2xr + m^2x^4 = \ell^2$$

$$m^2x^4 + x^2 - 2xr + r^2 - \ell^2 = 0$$

questo è $Q(x)$ che in questo caso è di grado 4 $\Rightarrow 2n=4$

$$Q(x) = (x-x_0)^2 \cdot \underline{R(x)}$$

di grado $2n-2$ $(2n=4)$ $\rightarrow$ $R(x)$ è di grado 2

$$Q(x) = (x-x_0)^2(ax^2+bx+c) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - 2ax^3x_0 - 2bx^2x_0 - 2xx_0c + ax^2x_0^2 + bxx_0^2 + cx_0^2$$

$$\begin{cases} m^2 = a \\ b - 2ax_0 = 0 \\ c - 2bx_0 + ax_0^2 = 1 \\ -2r = -2cx_0 + bx_0^2 \\ r^2 - \ell^2 = cx_0^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (li ho ottenuti confrontando questa con $m^2x^4 + x^2 - 2xr + r^2 - \ell^2 = 0$)

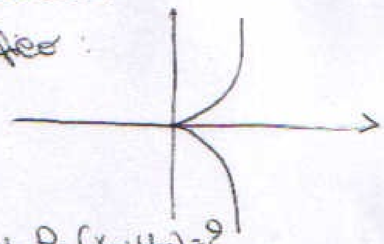
$$\begin{cases} a = m^2 \\ b = 2m^2x_0 \\ c = 1 + 3m^2x_0^2 \\ r = x_0 + 2m^4x_0^3 \\ \ell^2 = m^2x_0^4 + 4m^4x_0^6 \end{cases}$$

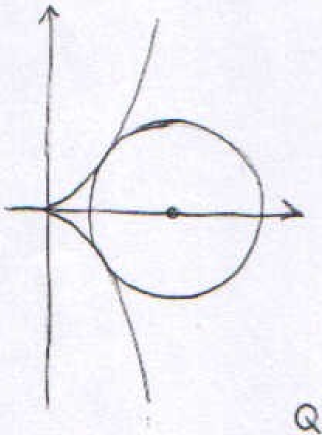
(al contrario di Apollonio non si è disegnato niente, questo vale x tutte le curve).

- metodo $\neq$ regola $\rightarrow$ è 1 algoritmo completamente spiegato
  ↳ è 1 specchio della costruzione geometrica

"PARABOLA SEMICUBICA"

l'equazione: $x^3 = y^2$ grafico:





tg in $P_0(x_0; y_0) = ?$
uso il metodo di Cartesio $\rightarrow$ disegno il cerchio

$$\begin{cases} y^2 = x^3 \\ (x-r)^2 + y^2 = \ell^2 \end{cases}$$

$$x^2 + r^2 - 2xr + x^3 = \ell^2 \Rightarrow 2n = 3$$

$$Q(x) = (x-x_0) \cdot R(x)$$

$2n - 2 \rightarrow 1$ è di grado

$$Q(x) = (x-x_0)^2(ax+b)$$

$$(x^2 + x_0^2 - 2x \cdot x_0)(ax+b) \rightarrow x^3a + x^2 \cdot b + x_0^2 \cdot ax + x_0^2 \cdot b - 2x^2 \cdot x_0 \cdot a - 2bx \cdot x_0$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ 1 = b - 2ax_0 \\ -2r = x_0^2a - 2bx_0 \\ r^2 - \ell^2 = x_0^2 \cdot b \end{cases}$$

14

$$\begin{cases} a = 1 \\ 1 = b - 2 \cdot 1 \cdot x_0 \\ -2r = x_0^2 \cdot 1 - 2bx_0 \\ r^2 - \rho^2 = x_0^2 \cdot b \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = 2x_0 + 1 \\ r = -\frac{x_0^2}{2} + bx_0 \rightarrow r = \frac{-x_0^2}{2} + (2x_0+1)x_0 \\ \rho^2 = r^2 - bx_0^2 \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad r = \frac{-x_0^2}{2} + 2x_0^2 + x_0$$

$$\rho^2 = \left(\frac{3}{2}x_0^2 + x_0\right)^2 - bx_0^2 \qquad \downarrow \qquad r = \frac{3}{2}x_0^2 + x_0$$

$$\downarrow$$

$$\rho^2 = \frac{9}{4}x_0^4 \ldots\ldots - (2x_0+1) \cdot x_0^2$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 + 2ax_0 \\ r = \frac{3x_0^2 + 2x_0}{2} \\ \rho^2 = \frac{x_0^3}{4}(9x_0 + 4) \end{cases}$$

· FLORIMOND DE BEAUNE (1629)

$$\begin{cases} y = mx^2 \\ y = y_0 + K(x - x_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q(x) = mx^2 - K(x - x_0) - y_0 \\ \end{cases}$$

· METODO di HUDDE (1659) $\rightarrow$

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{m-1}x^{m-1} + a_mx^m$$

la derivata di $P(x)$ è:

$$P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 \ldots + (m-1)a_{m-1}x^{m-2} + ma_mx^{m-1}$$

TEOREMA: $P(x)$ ha 1 radice doppia in x_0 se e solo se ha 1 " " in comune con $P'(x)$.

· 1ª implicazione: $P(x) = (x-x_0)^2 Q(x)$

$$P'(x) = 2(x-x_0)Q(x) + (x-x_0)^2 Q'(x)$$
$$= (x-x_0) \cdot [2Q(x) + (x-x_0)Q'(x)]$$

quindi x_0 è radice di $P'(x)$

· 2ª implicazione:

Hyp $P(x) = (x-x_0)Q(x)$

$$P'(x) = Q(x) + (x-x_0)Q'(x) =$$
$$= (x-x_0)R(x)$$

$$P(x) = (x-x_0) \cdot Q(x)$$
$$= (x-x_0) \cdot [(x-x_0)S(x)]$$
$$= (x-x_0)^2 \cdot S(x)$$

metodo di Hudde (1659):

$$\begin{cases} P(x,y)=0 \\ y=y_0+m(x-x_0) \end{cases} \qquad \begin{cases} Q(x_0)=0 \\ Q'(x_0)=0 \end{cases}$$

$P_0(x_0,y_0)$

(con parabola)

$$\begin{cases} y=kx^2 \\ y=y_0+m(x-x_0) \end{cases} \text{ sostituisco}$$

$kx^2=y_0+m(x-x_0)$

$Q(x)=kx^2-m(x-x_0)-y_0$

$Q'(x)=2kx_0-m$

$Q'(x)=0$

$2kx_0=m$

$y=y_0+2kx_0(x-x_0)$

$$\begin{cases} y^2=x^3 \\ y=y_0+m(x-x_0) \end{cases}$$

$y^2=(y_0+m(x-x_0))^2 \rightarrow y^2=y_0^2+2y_0 m\cdot(x-x_0)+(m(x-x_0))^2$

$y^2=y_0^2+2mxy_0-2y_0m\, x_0+m^2(x^2+x_0^2-2x\cdot x_0)$

$y^2=y_0^2+2mxy_0-2y_0m\cdot x_0+x^2m^2+x_0^2m^2-2x\cdot x_0m^2$

$x^3 \quad Q(x)=y_0^2+2mxy_0-2y_0m\cdot x_0+x^2m^2+x_0^2m^2-2x\cdot x_0m^2 - x^3$

$Q'(x_0)=0 \quad 3x_0^2-\cancel{2m^2x_0^2}+\cancel{2m^2x_0^2}-2mx_0y_0=0$

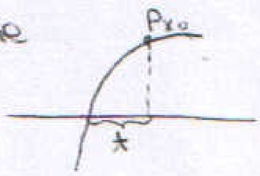
· Nel 1697 Leibniz scrive "Nova methodus" ke è la nascita del calcolo infinitesimale

· dal metodo ..... alla regola

"REGOLA DI "DE SLUSE"":

t = sottotangente

(pag 76 del libretto con copertina bianca)



(parabola semicubica)

$x^3=y^2$

$3x^3=2y^2$

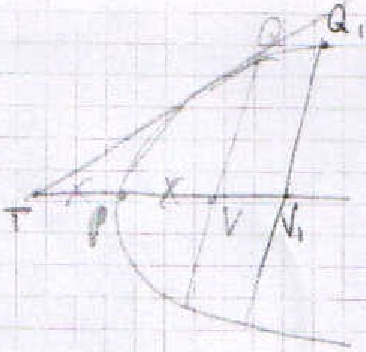
$3x^2t=2y^2$

$t=\dfrac{2y_0^2}{3x_0^2} \qquad t=\dfrac{f(x)}{f'(x)} \rightarrow f'(x)=\dfrac{f(x)}{t}$

$m=\dfrac{3x_0^2}{2y_0} = m$

16

- Il metodo di Cartesio era lunghissimo, con De Beaune è + corto, con Hudde ancora + corto e con De Sluse ancora + corto.
Poi tutti i metodi vennero soppiantati da Leibniz



① PV è diametro e QV è ordinata

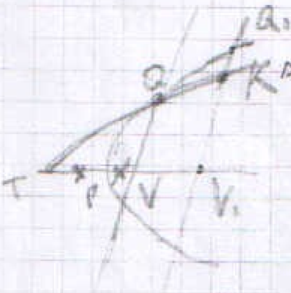
$$QV^2 : Q_1V_1^2 = PV : PV_1$$

② TP = PV ipotesi

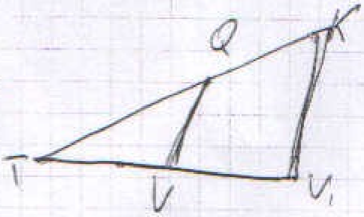
TS: TQ è tangente alla parabola

1) tra TQ e la parabola non ci sono rette

2) TQ taglia la parabola solo in Q, cioè nessun punto di TQ sta dentro la parabola né prima né dopo Q



per assurdo supponiamo che K stia sotto la parabola e tra T (anche se è falso)



③ $Q_1V_1 > KV_1$

~~per supposizione~~ $Q_1V_1^2 : QV^2 > KV_1^2 : QV^2 = TV_1^2 : TV^2$

$$PV_1 : PV = Q_1V_1^2 : QV^2 > TV_1^2 : TV^2$$

$$PV_1 : PV > TV_1^2 : TV^2$$

$TV_1 = TP + PV_1$ $\qquad$ $TV = TP + PV = 2PV$

$TV_1^2 = PV_1^2 + 2TP \times PV_1 + TP^2$ $\qquad$ $TV^2 = 4PV^2$

$$PV_1 : PV > (TP^2 + PV_1^2 + 2TP \times PV_1) : 4PV^2$$

$$PV_1 : PV > (PV^2 + PV_1^2 + 2PV \times PV_1) : 4PV^2$$

$$PV_1 > \frac{(PV^2 + PV_1^2 + 2PV \times PV_1)}{4PV}$$

$$\frac{4PV \cdot PV_1}{\cancel{4PV}} > \frac{PV^2 + PV_1^2 + 2PV \times PV_1}{\cancel{4PV}}$$

18

$$0 > -(4PV \cdot PV_1) + PV^2 + PV_1^2 + 2PV \times PV$$

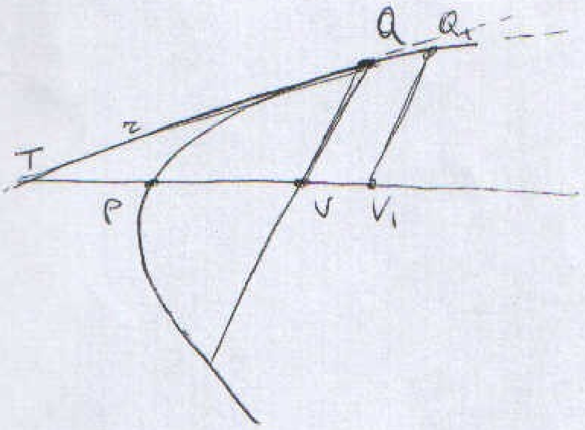
$$0 > PV^2 + PV_1^2 - 2PV\,PV_1$$

$$(PV - PV_1)^2 < 0$$

19

Silmonetti J

IPOTESI



PV diametro della parabola

QV è ordinata

QV_1 è ordinata

$QV^2 : QV_1^2 = PV : PV_1$

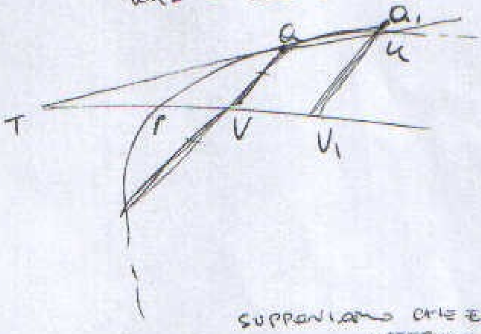
$TP = PV$

dimostrare che ~~r~~ è tangente alla parabola

① si può dimostrare che tra TQ e la parabola non ci sono (altre) rette

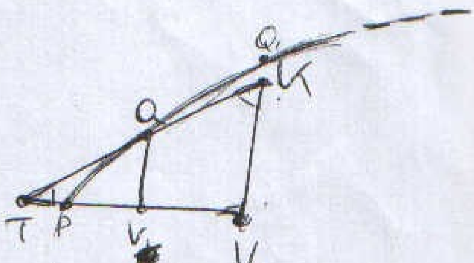
② si può dimostrare che TQ taglia la parabola solo in Q cioè nessun punto di TQ (ovvero r) sta dentro la parabola né prima né dopo Q

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO: supponiamo che taglia la retta anche in U



SUPPONIAMO CHE ESISTA U SU TQ INTERNO ALLA PARABOLA

$QV^2 : QV_1^2 = PV : PV_1$



① $Q_1V_1 > UV_1$ dimostrarlo:

$\overline{Q_1V_1}^2 : \overline{QV}^2 = \overline{PV_1} : \overline{PV}$

$UV_1 \cdot TV = QV \cdot TV_1$

$PV_1 : PV > TV_1 : TV \Rightarrow P \equiv T$ (?)?

$\overline{UV_1}^2 : \overline{QV}^2 = \overline{TV_1}^2 : \overline{TV}^2$

20 $\overline{Q_1V_1}^2 : \overline{QV}^2 > \overline{UV_1}^2 : \overline{QV}^2 = \overline{TV_1}^2 : \overline{TV}^2 \Rightarrow Q_1V_1^2 : QV^2 > TV_1^2 : TV^2$

$$PV_1 : PV = Q_1V_1^2 : QV^2 > TV_1^2 : TV^2$$

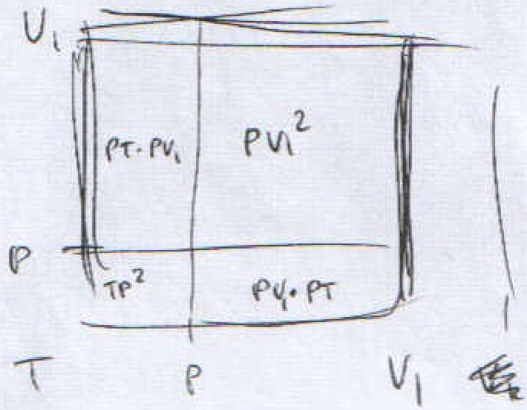
$$PV_1 : PV > TV_1^2 : TV^2$$

$$\boxed{TP = PV} \longrightarrow \overline{TV} = 2\overline{TP}$$

$$PV_1 : TP > TV_1^2 : (2TP)^2$$

$$TV_1 = TP + PV_1$$

$$TV_1^2 = TP^2 + PV_1^2 + 2TP\,PV_1$$



$$PV_1 : PV > TP^2 + PV_1^2 + 2TP \times VP_1 : 4TP^2$$

$$PV_1 : TP > TP^2 + PV_1^2 + 2TP \times VP_1 : 4TP^2$$

$$PV_1 \cdot 4TP^2 > TP(TP^2 + PV_1^2 + 2TP \times VP_1)$$

$$4TP^2 \times PV_1 > TP^3 + TP \times PV_1^2 + 2TP^2 \times VP_1$$

$$4TP^2 \times PV_1 - 2TP^2 \times VP_1 > TP^3 + TP \times PV_1^2$$

$$2TP^2 \times PV_1 > TP^3 + TP \times PV_1^2$$

$$2TP \times PV_1 > TP^2 + PV_1^2$$

$$TP^2 - 2TP \times PV_1 + PV_1^2 < 0$$

$$(TP - PV_1)^2 < 0$$

IMPOSSIBILE!

21