

Corso di perfezionamento

Università degli Studi di Pisa

*Strategie didattiche per favorire un atteggiamento positivo verso la
matematica e la fisica*

I laboratori della settimana matematica Osservazioni didattiche

Gruppo: M. Ascoli, G. Fruendi, M. G. Marzario, C. Mogetta, D. Poletti

Relazione per il tirocinio ed il 2° laboratorio
di Ginetta Fruendi

<u>Premessa.....</u>	<u>3</u>
<u>I Parte – I Laboratori.....</u>	<u>3</u>
<u>Il lavoro dei docenti e tutors.....</u>	<u>4</u>
<u>Il lavoro dei ragazzi.....</u>	<u>5</u>
<u>Le motivazioni dei ragazzi.....</u>	<u>6</u>
<u>I questionari.....</u>	<u>6</u>
<u>Conclusioni.....</u>	<u>7</u>
<u>II Parte – Osservazioni didattiche sul laboratorio 3.....</u>	<u>8</u>
<u>1° giorno.....</u>	<u>8</u>
<u>2° giorno.....</u>	<u>12</u>
<u>3° giorno.....</u>	<u>13</u>
<u>Conclusioni.....</u>	<u>14</u>
<u>Appendice 1 - Programma della Settimana Matematica.....</u>	<u>15</u>
<u>Appendice 2 - I laboratori.....</u>	<u>15</u>
<u>Appendice 3 - Il questionario.....</u>	<u>16</u>
<u>Appendice 4 - Risultati dei questionari.....</u>	<u>18</u>

Premessa

La *Settimana Matematica* è un'iniziativa del Dipartimento di Matematica e del Corso di Laurea in Matematica dell'Università di Pisa, realizzata all'interno del Progetto Lauree Scientifiche.

E' rivolta agli allievi degli ultimi due anni delle scuole superiori interessati alla matematica e permette loro di frequentare per una settimana il Dipartimento di Matematica, sia di mattina che di pomeriggio. In tale modo essi conoscono il Dipartimento di Matematica di Pisa (gli spazi, i servizi che offre, le sue peculiarità), seguono una lezione di tipo "universitario", frequentano per tre pomeriggi una attività di laboratorio, partecipano a seminari e ad un incontro con i laureati (per conoscere le opportunità di lavoro, spesso sottovalutate, che una Laurea in Matematica offre) ed infine vengono posti in contatto con studenti iscritti a Matematica (alcuni dei quali saranno tutors nei vari laboratori), con la possibilità di confrontarsi e chiedere informazioni sull'esperienza che stanno vivendo¹.

Personalmente, all'interno appunto della Settimana Matematica, ho seguito il laboratorio 3: **A proposito di poliedri: dimostrazioni, confutazioni e robot.**

La relazione che segue è divisa in due parti:

- 1) la prima parte è relativa al lavoro di laboratorio², e consiste nell'analisi dell'impostazione data dai docenti ai laboratori e della loro riuscita didattica, sulla base delle osservazioni da noi fatte relative al lavoro dei ragazzi in tre distinti laboratori;
- 2) la seconda parte è relativa al lavoro di tirocinio ed è un riassunto delle tre giornate di laboratorio, non tanto dal punto di vista delle lezioni vere e proprie, quanto dal punto di vista didattico. Cercherò di ripercorrere l'intera attività del laboratorio sui poliedri, mettendo in evidenza il modo di lavorare dei docenti e dei ragazzi.

I Parte – I Laboratori

Il nostro lavoro sulla Settimana Matematica ha avuto l'obiettivo di analizzare, per quanto possibile, l'impostazione dei laboratori. Nei laboratori veniva data agli allievi la possibilità di confrontarsi con lezioni di tipo 'universitario' e di provare a 'fare matematica', da soli o in gruppo, scoprendo o costruendo ipotesi, congetture, definizioni e teoremi.

I ragazzi potevano partecipare soltanto se inviati dalla propria scuola e con l'indicazione di un docente di riferimento. La partecipazione è stata oltre i limiti previsti (120 ragazzi): hanno partecipato in tutto 126 ragazzi³; molti erano toscani, ma altri provenivano da tutta Italia.

¹ Il programma completo è in Appendice 1

² Svolto insieme a M. Ascoli, M. G. Marzario, C. Mogetta e D. Poletti.

³ Dato desunto dai questionari

I ragazzi hanno potuto scegliere tra otto laboratori⁴, corrispondenti a diversi argomenti, i quali non rientrano nei programmi scolastici e in alcuni casi si collegano ad aspetti della realtà non “direttamente” matematici.

I laboratori si sono svolti per tre pomeriggi, durante i quali i ragazzi hanno lavorato su un argomento, guidati da un docente universitario e un collaboratore e seguiti da uno o più tutors.

Il nostro gruppo di lavoro è composto da cinque perfezionande che hanno assistito a tre laboratori diversi e quindi le nostre osservazioni non pretendono di dare una panoramica completa dell’attività svolta. Per integrarle abbiamo analizzato i risultati di un questionario che è stato compilato da tutti i ragazzi aderenti all’iniziativa, e quindi dai partecipanti della totalità dei laboratori.

Tutti e tre i laboratori da noi frequentati hanno previsto una lezione iniziale e successivi lavori di gruppo dei ragazzi su problemi posti dai docenti. La diversità di contenuti nei tre laboratori non ci ha permesso di fare delle osservazioni comuni sull’aspetto matematico e quindi ci siamo concentrate sul modo di lavorare dei ragazzi, le risposte date loro ai questionari di valutazione dell’attività e su atteggiamenti osservati nei ragazzi, anche riguardo il loro modo di relazionarsi ad una eventuale frequenza del Corso di Laurea, ed inoltre sul modo di lavorare dei docenti universitari che tenevano i laboratori a cui abbiamo assistito.

Il lavoro dei docenti e tutors

Il docente ed i tutors, pur avendo il compito di fornire agli studenti le indicazioni teoriche per poi affrontare i problemi, hanno concentrato la loro attenzione a creare durante la lezione un’atmosfera molto distesa, presentando gli argomenti alla lavagna con un tono informale e colloquiale e a volte con un pizzico di teatralità. Hanno cercato di far partecipare i ragazzi anche alla lezione teorica, incoraggiandoli a fare supposizioni e osservazioni, facendo sì in tal modo che i ragazzi si sentissero liberi di chiedere spiegazioni e esplicitare le loro intuizioni al docente.

Alcuni docenti hanno usato solo gesso, lavagna e fotocopie: comunque l’uso di gesso e lavagna non è stato a nostro parere solo un modo per trasmettere le nozioni, ma anche uno strumento di “costruzione sociale” delle conoscenze. Altri docenti hanno usato invece molti strumenti (lavagna, lucidi, animazione al computer, modelli meccanici) ed un solo docente dei tre gruppi in cui eravamo presenti ha distribuito materiale all’inizio del lavoro di gruppo, mentre altri non hanno fornito affatto materiale cartaceo. Nel mio laboratorio il docente ha presentato gli argomenti usando prevalentemente la lavagna ma anche lucidi, animazioni al computer e poi successivamente modellini meccanici.

⁴ I titoli dei laboratori sono in Appendice 2

In tutti i laboratori il lavoro è stato centrato su un problema e sulla ricerca delle sue soluzioni. I docenti gettavano le basi, offrendo le nozioni teoriche necessarie per affrontare il problema e cercando di mettere in evidenza i collegamenti tra le parti, e poi lasciavano spazio ai ragazzi.

Nel laboratorio 1, in particolare, il docente ha simulato il “lavoro che fa un matematico” nella costruzione di una teoria:

- ❖ la sua attenzione è catturata da qualcosa (*in questo caso un gioco*)
- ❖ osserva incuriosito l’oggetto della sua attenzione (*prova a giocare*)
- ❖ inizia a porsi domande (*non gioca più, o meglio non gioca più solo per passare il tempo*)
- ❖ formula congetture (*è un gioco finito, esistono strategie vincenti; se sì, quali?*)
- ❖ cerca di dimostrare rigorosamente queste congetture
- ❖ generalizza gli eventuali risultati trovati (*dal chomp all’iperchomp*)

Il matematico investe tutte le sue energie in questa attività senza preoccuparsi della sua ricaduta a livello pratico e utilitaristico: c’è passione e amore in tutto questo, è un forte senso estetico che guida, sostiene e spinge il matematico ad andare avanti.

Nel laboratorio 3, il docente ha cercato di far capire ai ragazzi come si possa *costruire* una definizione che in qualche modo soddisfi le caratteristiche richieste da un particolare teorema, senza dover necessariamente puntualizzare tutti i casi particolari rischiando di aver una definizione pesante e quindi inservibile, e li ha condotti passo passo nella dimostrazione di alcune affermazioni.

Noi riteniamo comunque che sia la passione per la matematica, in fondo, il messaggio che i laboratori potevano dare ai ragazzi.

Il lavoro dei ragazzi

Riguardo al modo di lavorare dei ragazzi abbiamo osservato che essi hanno seguito molto volentieri le lezioni dei laboratori e hanno trascritto le spiegazioni teoriche dei docenti. Hanno partecipato attivamente e con entusiasmo ai lavori, in piccoli gruppi, talvolta in modo un po’ caotico, alcuni limitandosi a fare schizzi di configurazioni e calcoli disposti in modo confuso (è il caso del laboratorio che ho seguito), altri arrivando a trovare le soluzioni cercate, anche se in un modo poco rigoroso. Alcuni hanno avuto difficoltà a “mettere per iscritto” i propri ragionamenti e anche chi ha provato a farlo ha incontrato grosse difficoltà. Per molti non sembrava chiaro cosa significhi formalizzare e in alcuni casi sembrava che non avessero gli strumenti necessari, in altri casi hanno formalizzato ma commettendo dei piccoli errori. A volte da parte dei ragazzi c’era l’ansia di voler concludere velocemente il problema senza riflettere attentamente su ciò che si faceva.

Le motivazioni dei ragazzi

Ho parlato con alcuni studenti riguardo al motivo della scelta di un laboratorio anziché un altro e hanno detto di aver scelto il laboratorio 3 perché pensavano fosse utile in vista dell'esame di stato, in quanto la geometria solida era stata trattata, a loro giudizio, in modo incompleto dalla loro insegnante. L'argomento specifico del laboratorio 3, in sostanza la relazione di Eulero, non è stato di gran aiuto per il ripasso della geometria solida, ma ha sicuramente contribuito ad allargare la visione geometrica dei ragazzi, da quella solo euclidea a quella topologica.

In più laboratori inoltre molti ragazzi hanno affermato che sono venuti alla settimana matematica più perché i docenti li volevano mandare in quanto "bravi a matematica" che per un loro reale interesse.

In un laboratorio nessuno di loro ha dichiarato di voler iscriversi a matematica, mentre anche negli altri gruppi sono pochi quelli che stavano davvero valutando se iscriversi a matematica.

I questionari

Abbiamo guardato i risultati dei questionari sottoposti ai ragazzi alla fine dell'attività della Settimana Matematica; il testo dei questionari è riportato nella Appendice 3. Analizzando questi dati non abbiamo pensato solamente al laboratorio ma anche alla settimana matematica.

Dall'analisi dei questionari emerge che a quasi tutti i ragazzi è piaciuta l'attività della settimana matematica (dal 77% al 90%, a seconda se lezione universitaria o laboratorio); a quasi tutti i ragazzi sono piaciuti gli argomenti trattati alla settimana matematica (dal 67% al 86%, a seconda se lezione universitaria o laboratorio); per l'81% dei ragazzi l'attività (laboratorio, lezione universitaria) è stata impegnativa ma comunque per una percentuale che varia dal 65% al 73% rispondeva che la sua preparazione scolastica era stata sufficiente per seguire l'attività; i materiali utilizzati erano chiari per il 68-84% degli studenti e le spiegazioni dei docenti lo erano per il 65-93% degli studenti (lezione-laboratorio).

Inoltre per l'82% dei ragazzi le attività sono state utili per capire cosa è la matematica;

l'80,1% risponde "decisamente sì" alla domanda se sia valsa la pena di partecipare mentre rispondono "più sì che no" un altro 20,7%: tra tutti per il 98,4% è valsa la pena. Da questo si può dedurre che l'iniziativa abbia ottenuto dei risultati: su 126 ragazzi, per 124 è stata una bella esperienza ed anche se ovviamente non tutti decideranno di iscriversi a matematica, ci si può almeno aspettare che abbiano nella loro vita "un atteggiamento positivo"!

I ragazzi che partecipavano al laboratorio 4 hanno parlato con le perfezionande delle loro impressioni sulla settimana matematica: la lezione al mattino era stata più difficile rispetto al laboratorio. Hanno parlato poi proprio della paura di affrontare una facoltà come quella di matematica e non riuscire poi ad andare avanti, la paura del fallimento. Le conversazioni avute con i laureati hanno avuto, in qualche modo, anche aspetti negativi: forse si è sottolineato molto che frequentando il corso di laurea in matematica si incontreranno molte difficoltà, che la matematica della scuola superiore è tutt'altra cosa dalla matematica dell'università, e invece non si è messo in risalto quanto di piacevole ci può essere nello studio di questa materia, che ci ha spinto a raggiungere con ostinazione la tanto desiderata laurea.

Alcuni ragazzi del laboratorio 3 mi hanno riferito di aver trovato la lezione universitaria troppo veloce e troppo densa di concetti nuovi, per poterla seguire con profitto (una ragazza dice: *“la mia professoressa del liceo espone al massimo un paio di concetti per volta e poi si ferma per fare esempi ed esercizi prima di affrontare un altro argomento, riuscirò a stare al passo con queste lezioni universitarie oppure dopo le prime due o tre non ci capirò più assolutamente nulla?”*), al contrario hanno trovato alla loro portata, anche se talvolta impegnativa, la lezione svolta nel laboratorio perché il docente ed i tutors li coinvolgevano spesso con domande e li spingevano ad intervenire.

Conclusioni

Per quanto abbiamo potuto vedere, l'iniziativa della Settimana Matematica è molto positiva. L'esperienza dei laboratori, offerta a ragazzi che sono alla fine della scuola superiore, è un modo unico per conoscere la matematica ed il mondo universitario che le ruota attorno. La nostra impressione è stata ottima, anzi da questo punto di vista per noi l'unico rammarico è l'aver scelto la facoltà da frequentare quando queste iniziative non c'erano, ma la nostra scelta è comunque caduta sul corso di matematica.

Pensiamo che sia importante che ai ragazzi sia offerta l'opportunità di conoscere, senza spaventarsi però. Non è interesse di nessuno che i ragazzi che non ne sono convinti si iscrivano ai corsi di laurea delle materie scientifiche, ma dispiacerebbe davvero se qualcuno di loro più interessato non lo facesse per paure poco fondate. La conversazione avuta con i ragazzi ci fa pensare che potrebbe essere utile stimolare in loro una riflessione sull'esperienza e sulle ricadute emotive della paura sulla scelta che si sta per compiere. La cosa dovrebbe svolgersi a piccoli gruppi, come quelli dei laboratori, non tutti i 126 ragazzi insieme, perché è bene che ciascuno possa ricevere un po' di attenzione e si sentano liberi di esprimersi come hanno fatto con noi. Magari potrebbe trattarsi di una conversazione con dei ragazzi un po' più grandi, dei quasi - coetanei che stanno vivendo l'esperienza o l'hanno conclusa da poco (frequentare il corso di laurea, averlo appena finito). In

ogni caso può essere utile che parlino con qualcuno che ha vissuto questa esperienza e ne è uscito “vincitore”, in modo che chi ha veramente la passione per la matematica non si faccia spaventare dalla difficoltà di uno studio che, al pari di altri, ha bisogno di sacrificio, ma darà grandi soddisfazioni a chi lo intraprende con reale interesse.

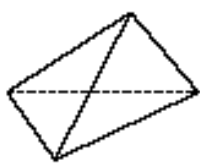
Il Parte – Osservazioni didattiche sul laboratorio 3

L’attività del laboratorio 3 si è svolta nell’arco di tre giorni avendo come filo conduttore la relazione di Eulero. Nei primi due giorni il docente universitario prof. Alberto Abbondandolo ha illustrato alcuni concetti teorici⁵ ed ha dato spunti per il lavoro di gruppo che è stato seguito dallo stesso docente, dal collaboratore M. Mazzucchelli e dal tutor Pietro Battiston. Il terzo giorno, riassunto ciò che era stato fatto nei giorni precedenti, Battiston ha coinvolto gli studenti in un’attività con gli origami.

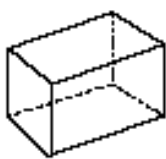
Ho suddiviso le mie osservazioni in tre parti relative ai tre giorni in cui si è svolto il laboratorio.

1° giorno

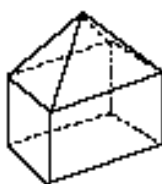
Il docente inizia osservando che un poligono ha tanti vertici quanti lati e fa alcuni esempi. Chiede ai ragazzi di pensare più in generale ai poliedri: gli enti da considerare sono vertici, spigoli e facce. Alla domanda diretta se qualcuno avesse un’idea della relazione esistente tra questi tre enti, tutti affermano di non sapere. Ci tengo a sottolineare che fin da subito gli studenti, dato il clima disteso, e se possibile informale instaurato tra loro ed il docente, si sono sentiti liberi di esporre le proprie opinioni senza paura di giudizi. Viene quindi mostrato il lucido con la figura seguente:



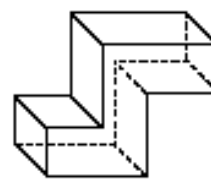
$$V=4, S=6, F=4$$



$$V=8, S=12, F=6$$



$$V=5, S=9, F=5$$



$$V=16, S=24, F=10$$

Viene sollecitata la costruzione di una formula sulla base dell’osservazione dei casi precedenti.

Una ragazza dice: “*se sommo numero dei vertici (V) e numero delle facce (F) ho sempre 2 più del numero degli spigoli (S)*”.

Si è giunti alla formula di Eulero: $V - S + F = 2$.

Il docente, a questo punto, cerca di far riflettere i ragazzi sul fatto che la formula proposta

⁵ La trattazione completa della parte teorica è contenuta in “Dimostrazioni e confutazioni” di A. Abbondandolo, 20 luglio 2006.

vale certamente per i quattro poliedri visti, ma per affermare che essa vale per tutti i poliedri è necessaria una dimostrazione. Viene proposta l'idea di dimostrazione come strumento che assicuri la validità di una congettura per tutti i casi possibili.

Ci si propone di seguire la dimostrazione di Cauchy del 1813. Questa consiste in una serie di lemmi che spezzano il problema in parti più semplici fino ad arrivare ad una affermazione evidentemente vera.

Viene proposto agli studenti di sviluppare il poliedro, di cui ci si vuol occupare, sul piano, ma non seguendo lo sviluppo classico, bensì supponendo di poter *stirare* sul piano la superficie del solido a cui si è tolta una faccia, nel caso del lucido proposto un cubo, come se questo fosse composto di gomma.

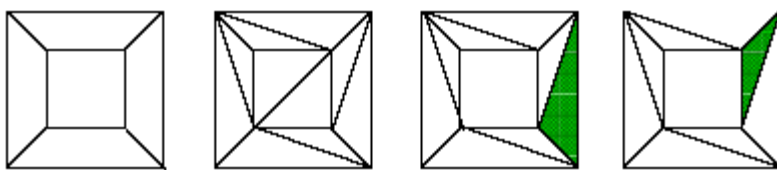


Figura 2: Dimostrazione del teorema di Eulero per un cubo.

Alla domanda su quanti vertici, spigoli e facce si possono contare in questo sviluppo, i ragazzi rispondono che V e S rimangono invariati mentre F è diminuito di 1.

Solo a questo punto il docente scrive alla lavagna il

Lemma 1. Assumendo che la superficie del poliedro sia fatta di gomma, togliamo una faccia e deformiamo la superficie rimasta fino a stenderla su un piano. Nella figura ottenuta V e S saranno immutati, mentre F sarà ridotto di 1 poiché abbiamo tolto una faccia (il primo disegno in figura 2 rappresenta questa costruzione nel caso in cui il poliedro sia un cubo).

Quindi ci basta dimostrare che per tale figura $V - S + F = 1$.

Si propone di tracciare le diagonali, come nel secondo disegno, e riprovare a contare V , S e F .

Alcuni allievi borbottano, altri rispondono bene.

Ecco quindi, si scrive alla lavagna, il

Lemma 2. Tracciando delle diagonali, dividiamo ogni faccia non già triangolare in triangoli. Per ogni diagonale che tracciamo V non varia, S aumenta di 1 (la diagonale tracciata), F aumenta di 1 (la diagonale divide la faccia in due). Quindi la quantità $V - S + F$ non varia: Se F aumentano dello stesso numero, ma nella formula compaiono con segni opposti (secondo disegno in figura 2).

Perciò ci basta dimostrare che per la nuova figura $V - S + F = 1$.

Lemma 3. Eliminiamo i triangoli uno ad uno, togliendone sempre uno esterno. Per eliminare un triangolo esterno le possibilità sono due:

(i) si elimina uno spigolo: Se F diminuiscono di 1, quindi $V - S + F$ non varia (terzo disegno

in figura 2).

(ii) si eliminano due spigoli e un vertice: F e V diminuiscono di 1, S diminuisce di 2, ancora $V - S + F$ non varia (quarto disegno in figura 2).

Dunque eliminando i triangoli uno ad uno partendo da quelli esterni, il valore di $V - S + F$ resta invariato. Alla fine restiamo con un solo triangolo, per cui $V = 3, S = 3, F = 1$. Quindi si ha $V - S + F = 1$, che è quanto volevamo dimostrare.

I ragazzi sono sembrati piuttosto soddisfatti di aver ricostruito passo passo, sotto la guida del docente, la dimostrazione. E subito dopo si sono stupiti dall'affermazione dell'insegnante:

Il lemma 3 è falso!

Il lemma 3 lascia liberi di scegliere l'ordine da seguire per eliminare i triangoli, ma nel caso delle figure del lucido seguente dopo aver tolto gli 8 triangoli numerati non cadiamo in nessun caso previsto dal lemma.

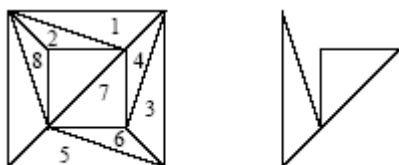


Figura 3: Ordine di eliminazione dei triangoli.

Il docente propone allora di completare il lemma prevedendo un terzo caso:

(iii) si eliminano tre spigoli, due vertici e una faccia: S diminuisce di 3, V diminuisce di 2, S diminuisce di 1, ancora $V - S + F$ non cambia.

Gli studenti sembrano di nuovo essere soddisfatti della precisazione inserita, ma nuovamente vengono stupiti dalla dichiarazione:

Il lemma 3 è ancora falso!!

Viene proposto quindi un nuovo lucido:

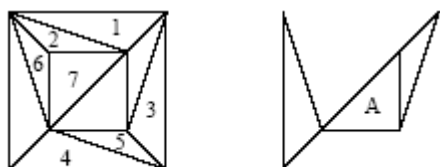


Figura 4: Nuovo ordine di eliminazione dei triangoli.

Supponiamo di aver seguito l'ordine indicato sopra, e voler togliere il triangolo A, non otteniamo la stessa conclusione dei casi precedenti.

Un ragazzo osserva: "ma A non è esterno", allora qualcuno tenta di dare una qualche definizione di *esterno*.

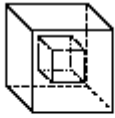
Il percorso seguito fino a questo punto dal docente è riuscito, a mio parere, a far riflettere gli studenti sulla necessità di avere definizioni non ambigue e su come occorra chiarire il significato nel contesto matematico specifico dei termini (come *esterno*) presi in prestito dal linguaggio comune. Inoltre tutti erano così coinvolti in questa ricerca di chiarezza e completezza, che qualcuno non ha subito accettato volentieri l'idea dell'insegnante di cambiare approccio, modificando l'enunciato del lemma in:

Lemma 3. E' possibile eliminare i triangoli uno ad uno, in modo che il valore di $V - S + F$ resti invariato. Le possibilità sono due: (i) o (ii).

I ragazzi, entrati ormai nel gioco delle confutazioni, non si sono stupiti molto all'ulteriore affermazione del docente:

Il teorema di Eulero 'e falso!

Viene proposto il seguente lucido:



$$V = 16, S = 24, F = 12$$

Figura 5: Primo controesempio.

Un ragazzo obietta che questo non è un poliedro.

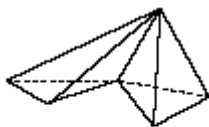
Nasce il problema di dare una definizione di poliedro.

Si considera inizialmente la definizione proposta dall'Enciclopedia Italiana Treccani:

DEFINIZIONE 1. *Un poliedro è un solido delimitato da facce poligonali.*

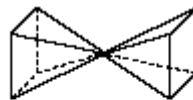
Questa viene modificata per considerare la superficie e non tanto il solido.

Attraverso la proposta di ulteriori controesempi (in lucido)



$$V = 6, S = 11, F = 8$$

Figura 6: Secondo controesempio.



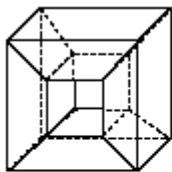
$$V = 9, S = 16, F = 10$$

Figura 7: Terzo controesempio.

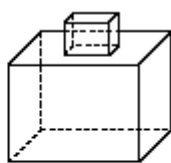
e la discussione guidata con i ragazzi si giunge alla definizione data da Hilbert e Cohn.Vossen nel 1932:

DEFINIZIONE 4. *Un poliedro è una superficie formata da un sistema di poligoni disposti in modo che in ogni spigolo si incontrino due e soltanto due di essi (formando un diedro), e che inoltre sia possibile arrivare da qualunque poligono del sistema a qualunque altro oltrepassando degli spigoli, ma senza passare dai vertici.*

Ma la proposta di un ulteriore controesempio, dopo un primo sgomento, provoca una ricerca di definizioni sempre più elaborate ma anche pesanti e complicate, bloccata dall'insegnante che propone ancora due controesempi.



$$V = 16, S = 32, F = 16$$



$$V = 16, S = 24, F = 11$$

Figura 9: La cornice e la torretta.

Gli studenti vengono invitati a verificare che per la cornice (poliedro con un foro) $V-S+F=0$ mentre per la torre (poliedro con una faccia con un buco) $V-S+F=3$.

Vengono introdotti nuovi termini *poliedri semplici* (senza fori) e *facce semplicemente connesse* (senza buchi).

Si giunge quindi ad una formulazione del teorema di Eulero per *un poliedro semplice con facce semplicemente connesse*.

Nell'ultima mezzora del 1° giorno viene proposto agli allievi la dimostrazione della seguente affermazione utilizzando ovviamente la formula di Eulero:

I poliedri semplici con n facce semplicemente connesse di l lati ciascuna per cui in ogni vertice si incontrano r facce sono tutti e soli i cinque solidi platonici.

Gli studenti, riunitisi spontaneamente in piccoli gruppi sono stati guidati da docente, tutor, collaboratore e da me stessa nella dimostrazione di questo fatto.

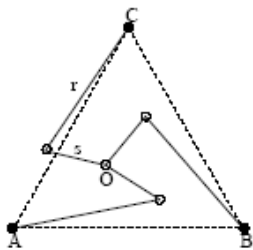
Molti procedevano in modo confuso, scrivendo sui loro fogli calcoli disordinati. Ma tutti i gruppi sono arrivati alla conclusione. Ho notato che alcuni di loro sembravano perplessi dall'essere chiamati in prima persona a dimostrare affermazioni sfruttando calcoli algebrici piuttosto che teoremi geometrici.

2° giorno

Il secondo giorno si è aperto con una introduzione teorica da parte del docente su cosa sia una superficie chiusa, un incollamento di due superfici e su come per questi oggetti si possa ancora calcolare $V-S+F$ (*caratteristica di Eulero*). La lezione è stata ancora una volta proposta attraverso lucidi, i ragazzi sono stati *condotti per mano* dal docente nella costruzione della teoria.

Successivamente l'insegnante ha mostrato agli allievi alcuni modelli meccanici di semplici robot costituiti da sistemi di leve e, con l'aiuto di animazioni Java, ha cercato di far comprendere come questi potessero muoversi e quali potessero essere le rappresentazioni grafiche di tutte le posizioni ammissibili (*spazio delle configurazioni*). Anche in quest'attività i ragazzi hanno interagito con il docente chiedendo spiegazioni ulteriori o cercando di esplicitare le loro idee.

Dopo una breve pausa è stato proposto come esercizio di trovare lo spazio delle configurazioni del seguente robot a tre braccia e quindi di quello a quattro braccia.



Anche in questo caso si sono formati piccoli gruppi spontanei di due o tre persone, che sono comunque sempre stati seguiti dal docente e dai collaboratori, senza *forzare* i passaggi delle dimostrazioni.

Gli appunti scritti dagli studenti sono solo schizzi delle varie configurazioni possibili, fatti per uso molto personale e non organizzati per essere comprensibili ad altri.

3° giorno

L'argomento iniziale dell'ultimo giorno è stato il problema⁶: “Quanti colori occorrono per colorare una carta geografica?”

In particolare dopo una breve introduzione, anche con riferimenti storici, al problema dei quattro colori, si è proposto ai ragazzi di dimostrare il

Teorema dei cinque colori. Ogni carta geografica è colorabile con al più cinque colori distinti, in modo che regioni adiacenti abbiano colori diversi.

In realtà è stato proposto loro di dimostrare quattro lemmi, che dividono il problema in casi più semplici. Il lavoro è stato compiuto, non senza fatica, a piccoli gruppi.

Per la seconda parte della giornata è stata affrontata un'attività⁷ decisamente più pratica, ma comunque sempre collegata al filo conduttore delle tre giornate ossia la *formula di Eulero*: la costruzione di poliedri con moduli di carta.

Gli studenti hanno dimostrato di aver gradito questa proposta di lavoro manuale, che ha portato alla realizzazione, per alcuni, solo di pochi moduli in carta, per altri, di semplici poliedri.

⁶ Una trattazione dettagliata si trova in “Che cos'è la matematica?” di Courant Robbins, Boringhieri e in “Il problema dei cinque (o quattro) colori” appunti di M. Mazzucchelli, Università di Pisa.

⁷ Una trattazione dettagliata si trova in “Poliedri ed origami modulari.” di Pietro Battiston, 8 Febbraio 2007

Conclusioni

Ritengo che per i ragazzi partecipanti i tre pomeriggi del laboratorio 3 siano stati decisamente impegnativi ma interessanti. Seguendo il percorso intrapreso da docenti e studenti, ho cercato da parte mia di riferire quale sia stato l'approccio dei docenti, il loro uso degli strumenti, oltre che il modo di lavorare degli studenti.

Dal mio punto di vista, in qualità di osservatrice, è stata un'esperienza molto positiva.

Ho apprezzato l'approccio costruttivo della teoria usato dal docente, che ha lasciato ampio spazio alle idee degli studenti e il lavoro fatto a piccoli gruppi assistiti comunque sempre da qualcuno più esperto che potesse guidare verso la corretta formulazione della dimostrazione. Cercherò, per quanto possibile, anche all'interno della mia pratica didattica di creare situazioni più coinvolgenti e di conseguenza più utili per la crescita dei nostri studenti.

Appendice 1 - Programma della Settimana Matematica

Settimana Matematica: presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa (Largo Pontecorvo, 5), dal 5 al 8 febbraio, con il seguente Calendario:

Lunedì 5 febbraio: 15.30-18.30

- Presentazione
- Laboratori

Martedì 6 febbraio: 9-13; 14.30-18.30

Mattina:

- Prof. Dario Bini: Matematica e Mondo Reale: il problema di Google e altre storie
- Visita alla struttura
- Una lezione universitaria di Matematica

Pomeriggio:

Laboratori

Mercoledì 7 febbraio: 9-13; 14.30-18.30

Mattina:

Incontro con giovani laureati sulle prospettive di lavoro della laurea in Matematica

Pomeriggio:

Laboratori

Giovedì 8 febbraio: 15.30-18.30

- Incontro con studenti del Corso di Laurea in Matematica
- Prof. Giovanni Alberti: Presentazione del Corso di Laurea in Matematica
- Consegna attestati.

Appendice 2 - I laboratori

Nei laboratori erano proposti i seguenti argomenti:

1. Passatempo e giochi: alla ricerca di problemi e soluzioni.
2. Tecniche per mescolare le carte, feste di compleanno e figurine di calciatori: quale legame?
3. A proposito di poliedri: dimostrazioni, confutazioni e robot
4. Impossibilità di un sistema democratico
5. Problemi e congetture in aritmetica: da Goldbach a Wiles
6. Giochi di Lego
7. Geometria e Algebra: le curve dei Greci e le curve di Cartesio
8. I numeri transfiniti

Appendice 3 - Il questionario

SETTIMANA MATEMATICA, 5-8 febbraio 2007

1) Quale classe frequenti? 4a 5a

2) Per quale motivo hai deciso di frequentare questo stage?

3) Quale laboratorio hai seguito?

1. Passatempi e giochi... 2. Tecniche per mescolare le carte, ... 3. A proposito di poliedri...

4. Impossibilità di un sistema democratico 5. Problemi e congetture in aritmetica 6. Giochi di

Lego 7. Geometria e Algebra: le curve dei Greci e le curve di Cartesio 8. I numeri transfiniti

4) Dai una valutazione per ognuna delle attività che hai seguito, rispondendo alle domande.

a) L'attività ti è piaciuta?				
ATTIVITA'	Decisamente NO	Più NO che SI'	Più SI' che NO	Decisamente SI'
Laboratorio				
Una lezione di tipo universitario				
Conferenza				
Incontro con laureati				
b) Gli argomenti dell'attività svolta sono stati interessanti?				
ATTIVITA'	Decisamente NO	Più NO che SI'	Più SI' che NO	Decisamente SI'
Laboratorio				
Una lezione di tipo universitario				
Conferenza				
Incontro con laureati				
c) L'attività è stata impegnativa?				
ATTIVITA'	Decisamente NO	Più NO che SI'	Più SI' che NO	Decisamente SI'
Laboratorio				
Una lezione di tipo universitario				
Conferenza				
Incontro con laureati				
d) La tua preparazione scolastica era sufficiente per seguire l'attività?				
ATTIVITA'	Decisamente NO	Più NO che SI'	Più SI' che NO	Decisamente SI'
Laboratorio				
Una lezione di tipo universitario				
Conferenza				
Incontro con laureati				
e) I materiali scritti (schede / dispense / power point) utilizzati per le attività erano chiari?				
ATTIVITA'	Decisamente NO	Più NO che SI'	Più SI' che NO	Decisamente SI'
Laboratorio				
Una lezione di tipo universitario				
Conferenza				
Incontro con laureati				
f) I docenti sono stati chiari?				
ATTIVITA'	Decisamente NO	Più NO che SI'	Più SI' che NO	Decisamente SI'
Laboratorio				
Una lezione di tipo universitario				

Conferenza				
Incontro con laureati				
g) Le attività svolte sono state utili per capire meglio cos'è la Matematica?				
ATTIVITA'	Decisamente NO	Più NO che SÌ	Più SÌ che NO	Decisamente SÌ
Laboratorio				
Una lezione di tipo universitario				
Conferenza				
Incontro con laureati				

5) Per quale motivo ti sono piaciute le attività che hai apprezzato di più?

6) Per quale motivo non ti sono piaciute le attività che hai apprezzato meno?

7) Nel tuo laboratorio si sono svolte:

	Per nulla	Qualche volta	Molto
Spiegazioni teoriche da parte dei docenti	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Lavori individuali e di gruppo da parte degli studenti	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

8) I locali e l'attrezzatura a disposizione erano adeguati?

Decisamente NO Più NO che SÌ Più SÌ che NO Decisamente SÌ

9) Fra quali corsi di laurea eri indeciso prima di venire allo stage?

10) L'esperienza dello stage ti sarà utile nella scelta dei tuoi studi futuri?

Decisamente NO Più NO che SÌ Più SÌ che NO Decisamente SÌ

11) Dopo questa esperienza, qual è la tua idea riguardo alla possibilità di iscriverti a Matematica?

12) In definitiva, valeva la pena partecipare a questa esperienza?

Decisamente NO Più NO che SÌ Più SÌ che NO Decisamente SÌ

13) Vorresti che nell'insegnamento della Matematica si desse maggiore attenzione (indicare con una crocetta non più di 3 caselle):

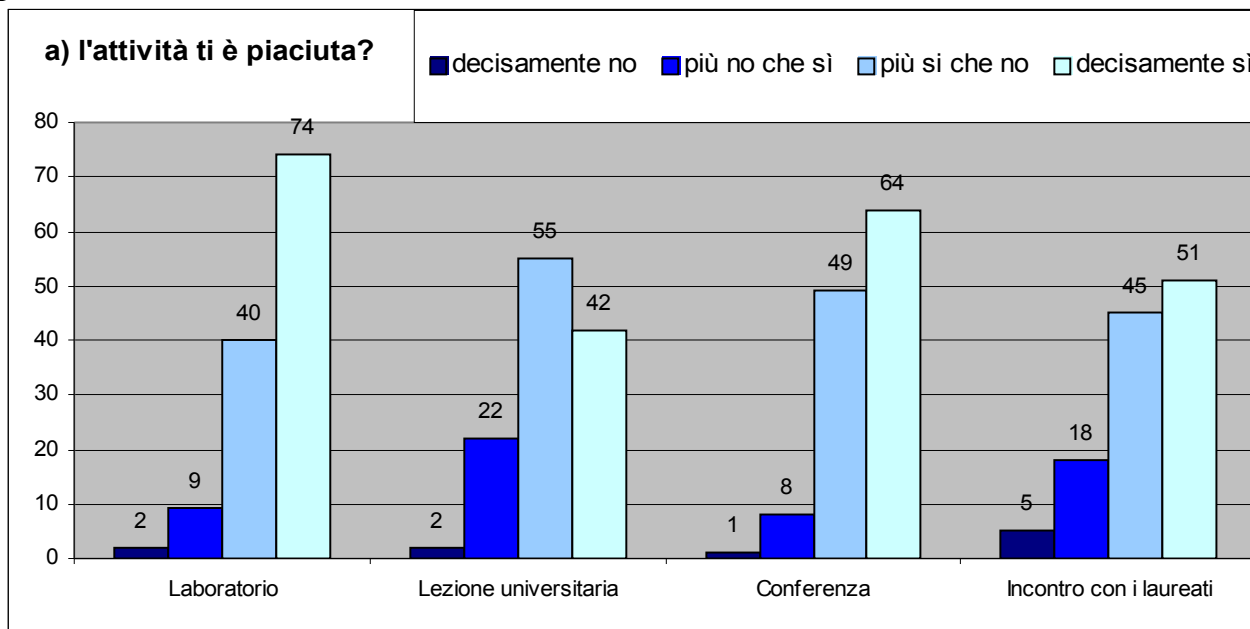
- a dare le motivazioni delle cose che si studiano
- all'aspetto sperimentale e pratico
- ad attività in cui gli studenti a gruppi affrontano problemi significativi
- all'aspetto formale
- ai problemi che hanno ispirato le teorie e gli argomenti che si studiano
- all'inquadramento storico
- alle ricerche fondamentali più recenti
- alle relazioni con altre discipline ed alle applicazioni tecnologiche
- alle implicazioni nella vita quotidiana
- altro

14) Eventuali commenti, osservazioni, suggerimenti:

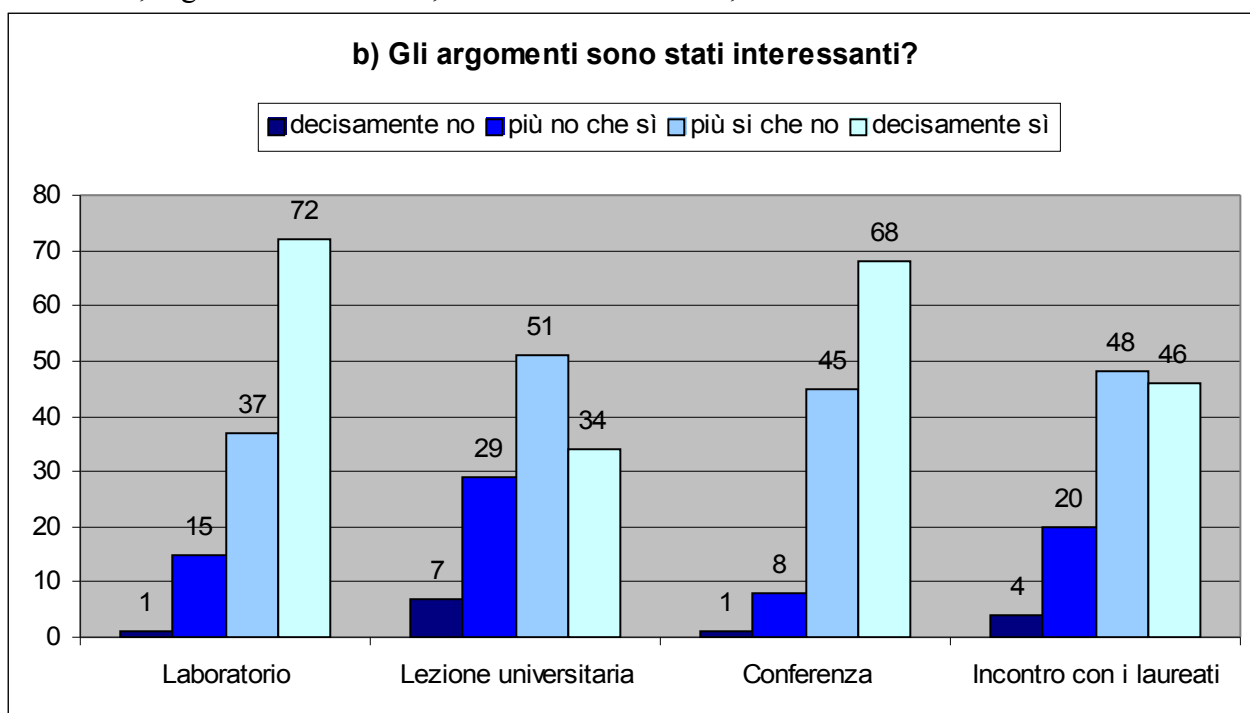
Appendice 4 - Risultati dei questionari

Questi sono i grafici con le risposte dei ragazzi che hanno partecipato all'iniziativa. Erano in totale 126 ragazzi.

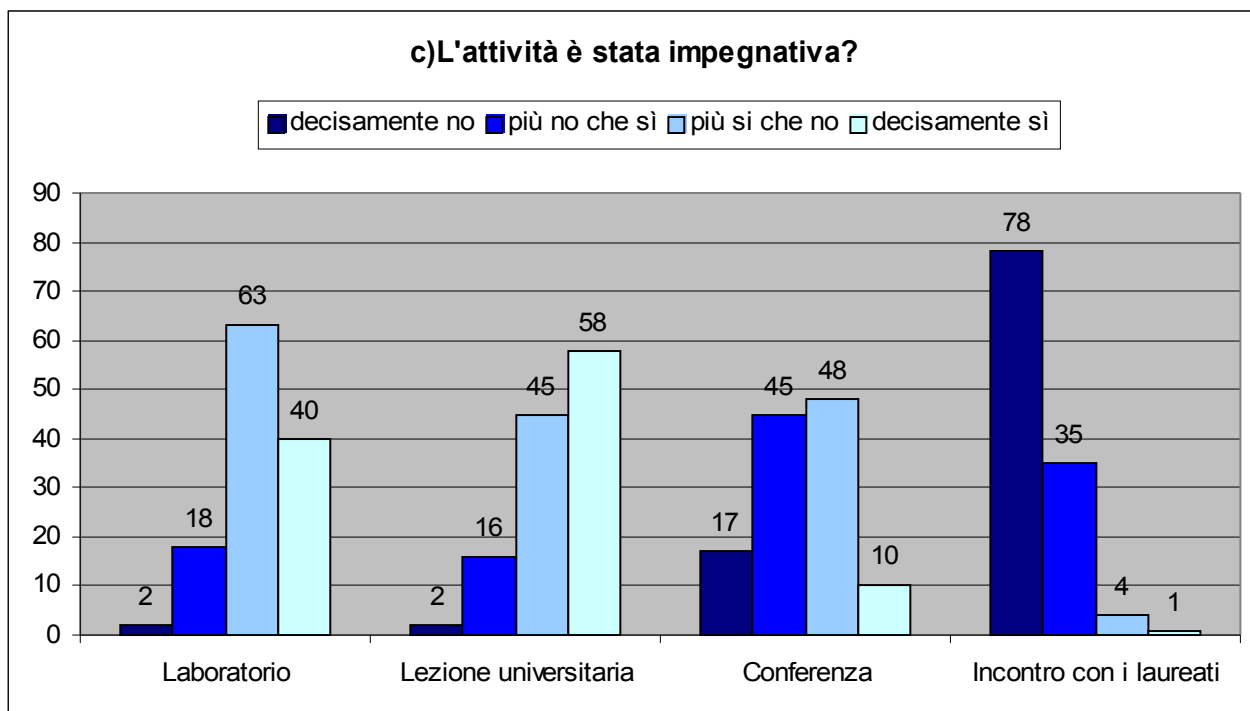
I colori più scuri delle colonne rappresentano le risposte più negative, quelli chiari le risposte positive.



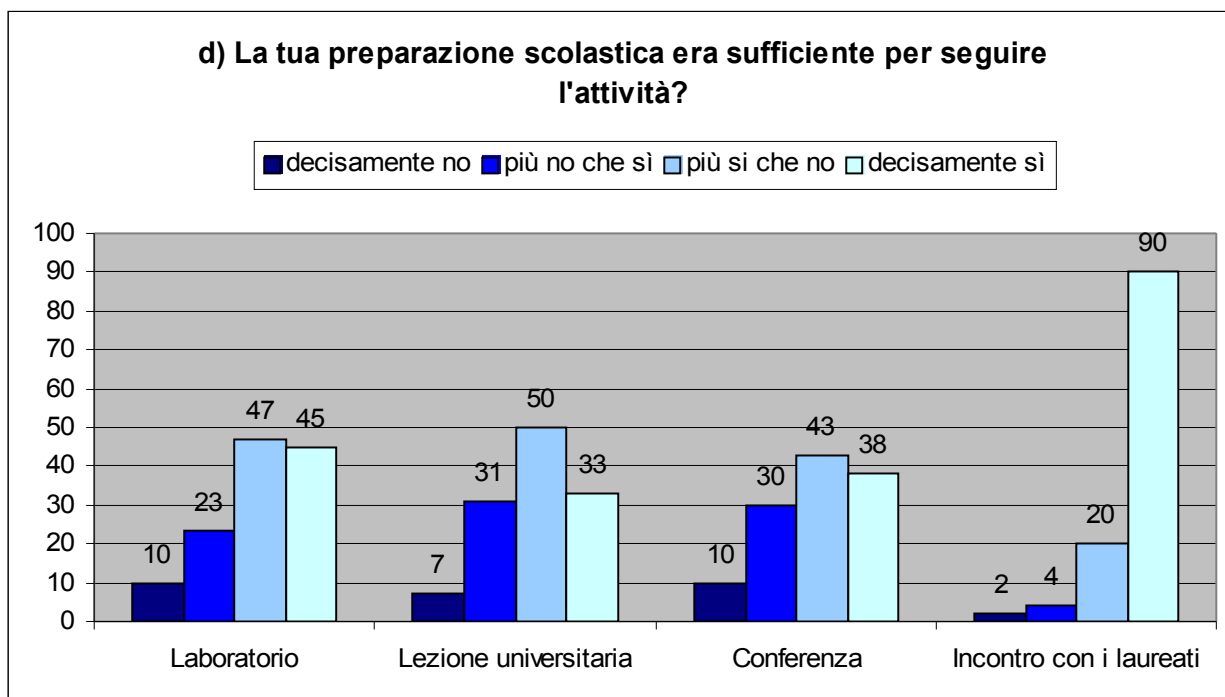
Da questo primo grafico si deduce che l'attività che i ragazzi hanno gradito più di tutte è stata il laboratorio, seguita da conferenza, incontro con i laureati, lezione.



Gli argomenti sono stati tutti interessanti per i ragazzi, ma maggiormente i laboratori e la conferenza.



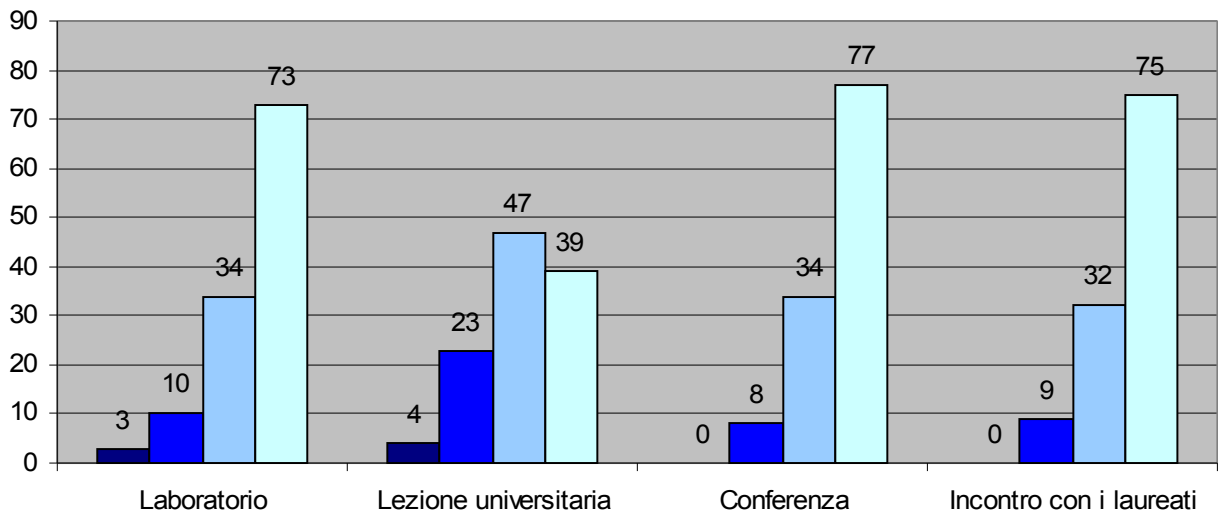
La cosa meno impegnativa è stata ovviamente l'incontro con i laureati, seguito dalla conferenza, la lezione universitaria e ultimo il laboratorio. Quest'ultimo dato si spiega forse pensando che il laboratorio durava alcuni giorni e gli allievi hanno dovuto assumere un ruolo più attivo che non nella lezione.



A parte per l'incontro con i laureati, la propria preparazione scolastica è ritenuta sufficiente (più sì che no e decisamente sì) per seguire le attività da un minimo 81 allievi su 126 (per la conferenza) ad un massimo di 92 su 126 per il laboratorio.

e) I materiali scritti utilizzati per le attività erano chiari?

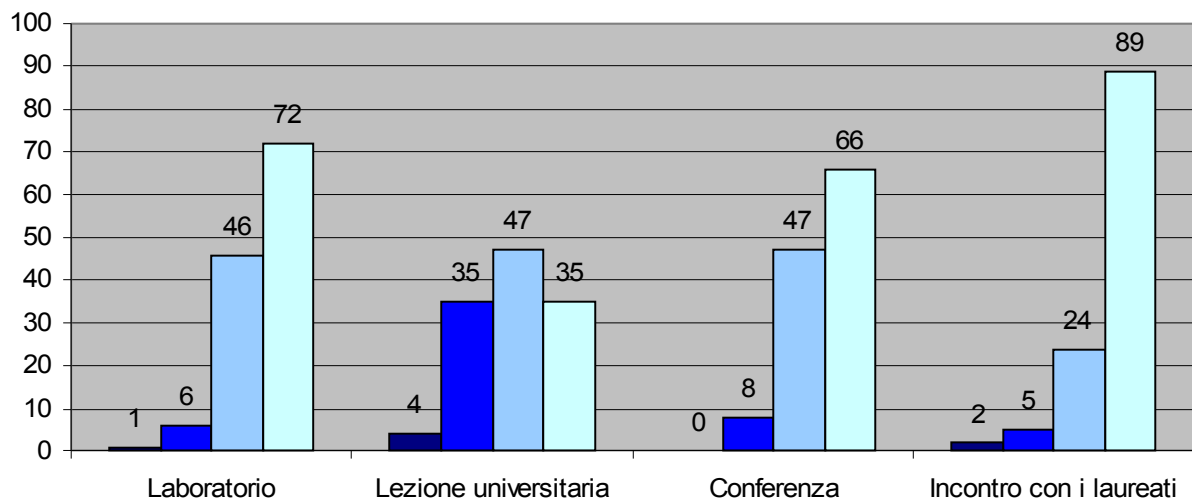
■ decisamente no ■ più no che sì ■ più sì che no □ decisamente sì



A parte la lezione universitaria, i materiali sono stati ritenuti decisamente chiari da più di 70 allievi mentre almeno altri 30 li ritenuti più chiari che non chiari. Tra tutto almeno 100 su 120 li hanno ritenevano abbastanza chiari.

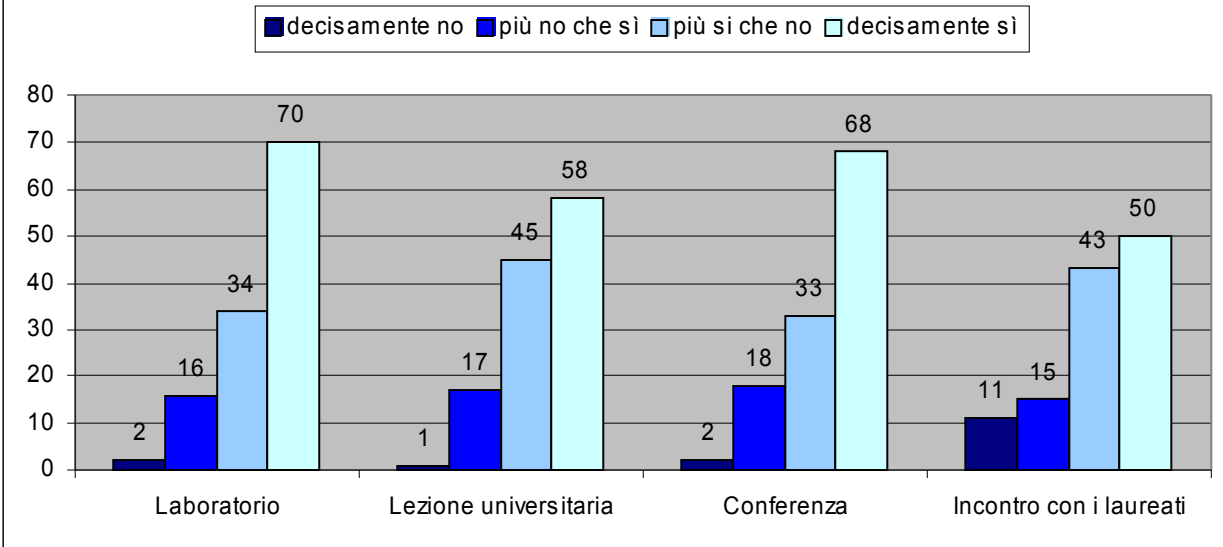
f) I docenti sono stati chiari?

■ decisamente no ■ più no che sì ■ più sì che no □ decisamente sì



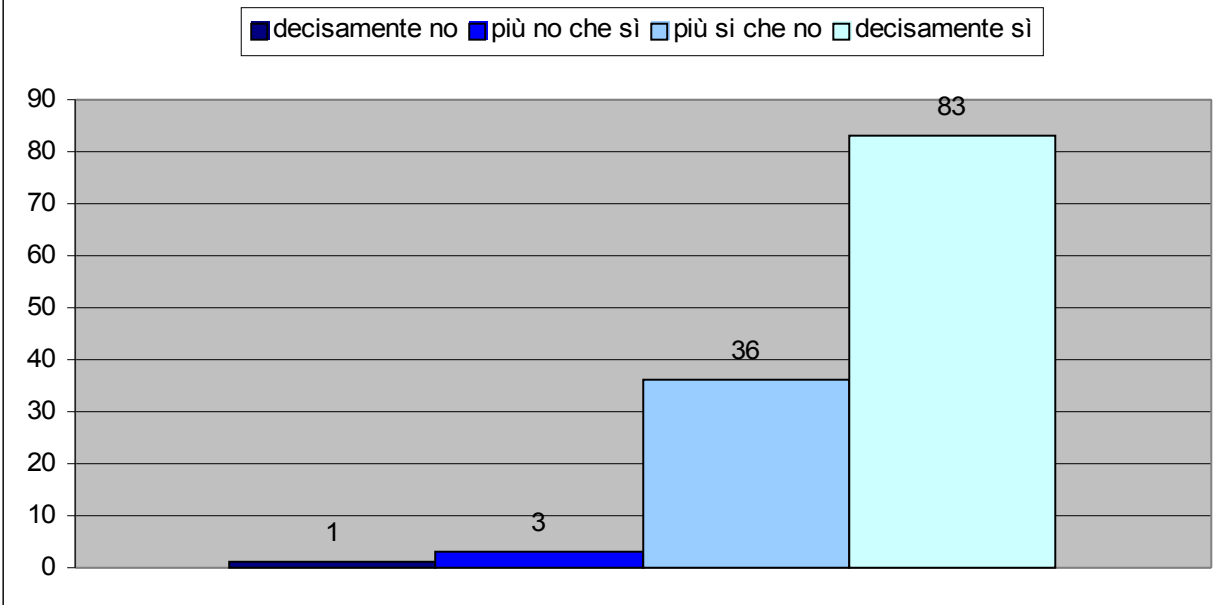
Lasciando da parte l'incontro con i laureati, i docenti del laboratorio sono stati i più chiari per i ragazzi, mentre lezione universitaria e conferenza prendono dagli studenti "voti" un po' più bassi (mettendo insieme i due giudizi più positivi, comunque, sono più di 100 studenti su 126 a ritenerli abbastanza chiari: un risultato lusinghiero).

g) Le attività svolte sono state utili per capire meglio cos'è la Matematica?

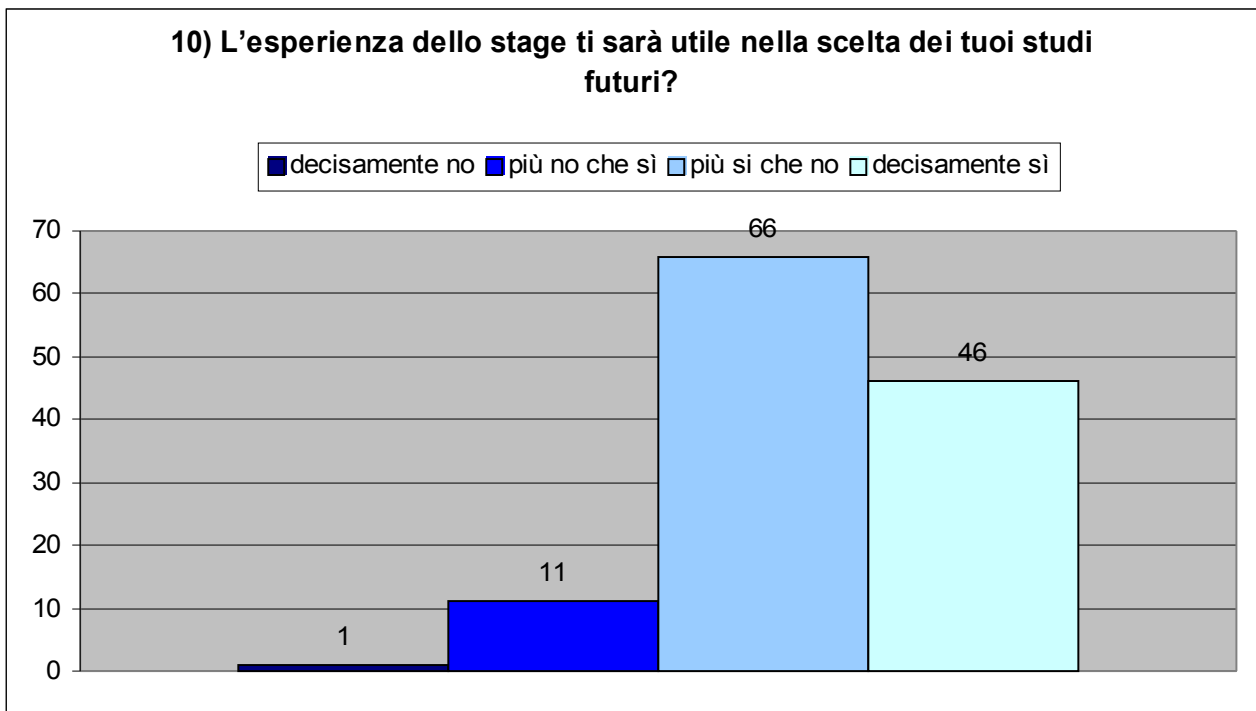


Per 93 studenti su 126 l'incontro con i laureati è stato utile per capire meglio cos'è la matematica, mentre per le altre attività si superano i 106 studenti su 126 (84 %).

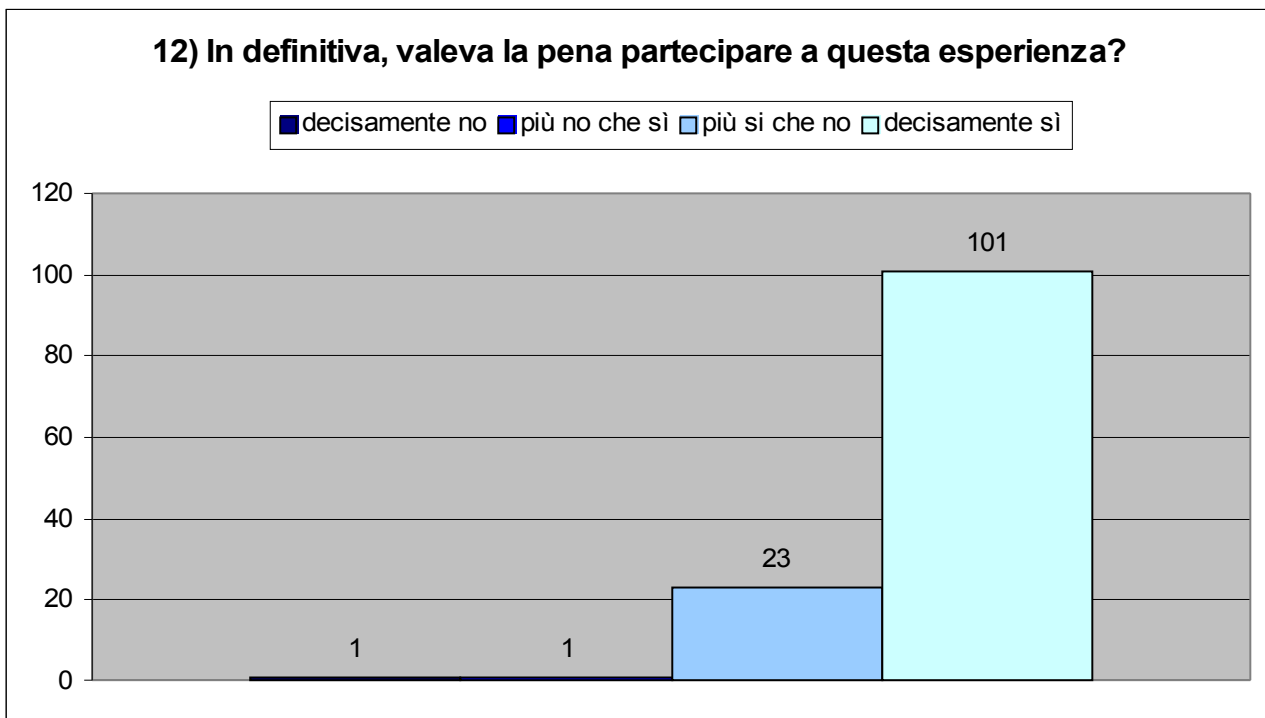
8) I locali e l'attrezzatura a disposizione erano adeguati?



I locali e l'attrezzatura sono giudicati più che adeguati.



E' un dato importante che quasi tutti gli studenti giudichino l'esperienza della Settimana Matematica come utile nella scelta negli studi futuri (52,3% più sì che no e 36,5% decisamente sì). Uno solo, partecipante del laboratorio 3, dice decisamente no, forse perché riteneva che l'argomento fosse più aderente al programma di geometria solida della scuola superiore.



Un solo ragazzo dice che decisamente non valeva la pena partecipare all'esperienza (è un allievo del laboratorio 1), ed un'altro solo risponde più no che sì (del laboratorio 5); per tutti gli altri valeva abbastanza la pena (18,3%) o decisamente la pena (80,1%) di partecipare. Complessivamente il 98,4% dei ragazzi è contento di aver partecipato alla Settimana Matematica e questo è davvero un buon risultato per gli organizzatori.