Corso di perfezionamento

Strategie didattiche per promuovere un atteggiamento positivo verso la matematica e la fisica

Relazione del Tirocinio
svolto nell'ambito della Settimana Matematica
Dipartimento di Matematica, 5 - 8 febbraio 2007

Dania Dazzini

Laboratorio 2: **Tecniche per mescolare le carte, feste di compleanno e figurine di calciatori: quale legame?**
Responsabile: **Rita Giuliano**

Nota introduttiva

Riporto la descrizione delle lezioni tenute dalla prof. Giuliano nell'ambito del laboratorio 2 della Settimana Matematica.
Le parti in colore blu rappresentano gli interventi dei ragazzi o in generale i fatti sui quali ho riflettuto. Le riflessioni seguono in coda il resoconto del laboratorio.

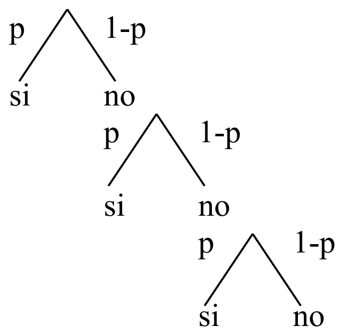
I giorno: LEZIONE FRONTALE DALLE ORE 16.00 ALLE ORE 17.30.

Alle ore 16.00 la prof.ssa ha salutato gli studenti e per prima cosa ha chiesto loro la provenienza in termini di livello scolastico. Non tutti gli studenti frequentavano l'ultimo anno, un piccolo gruppetto di 5-6 ragazzi era di IV. Le scuole di provenienza erano abbastanza eterogenee: liceoscientifico, ITI.
Questo si è rivelato essere assai condizionante riguardo alla partecipazione dei ragazzi.
Ai ragazzi è stato distribuito il materiale collegato al laboratorio:

1. Un fascicolino contenente *Richiami di calcolo combinatorio*, che la prof. ha consigliato di leggere per avere l'idea di "cosa stesse sotto" ;
2. un fascicolino di *Cenni di calcolo delle probabilità*;
3. un estratto (il capitolo 24 Shuffling cards) del libro *"Proofs from the book"* di M. Aigner-G.M. Ziegler (in inglese)

Poi la prof. ha esposto **il problema del collezionista**: Un ragazzo deve riempire un album di figurine che contiene *N* posti. Supponendo che il ragazzo compri le figurine 1 alla volta (che cioè i pacchetti contengano una sola figurina) in buste chiuse (non sapendo quindi se troverà doppioni), la domanda è: in media quanti acquisti deve fare per riempire l'album?
Da qui lo spunto per dare la seguente premessa: il linguaggio matematico costruisce modelli che funzionano non solo in una determinata situazione, ma anche in altre.
Supponiamo dunque di avere un dado e vogliamo che esca il 5. Lanciamo il dado e ci fermiamo quando esce il 5. In media quanti lanci devo fare per poter ottenere il primo 5?
Si tratta di un *esperimento aleatorio*, specifica la professoressa, sottolineando che intendiamo aleatorio come opposto di deterministico, quest'ultimo inteso come un esperimento del quale possiamo prevedere il risultato conoscendo i dati iniziali (per esempio per una macchina che si sposta su una strada a velocità ***v*** e per un tempo ***t*** io so dire quanto spazio s ha percorso: ***s=vt***).
Quasi tutti i fenomeni naturali sono aleatori, alea, sottolinea la prof.ssa, significa dado in greco.
Indichiamo con T il numero di lanci di dado necessari per vedere uscire il 5 la prima volta (la media la indichiamo con m(T)).
Facciamo qualche considerazione preliminare :
p(T=1) = probabilità che il numero di lanci necessari sia 1
= 1/6 (risponde un ragazzo)
= p
p(T=2) = 5/36 = 5/6 · 1/6 = (1-p) · p (risponde al volo lo stesso ragazzo, gli altri ridono smarriti)

la prof. disegna lo schema



-Continuo se non ottengo 5, spiega la prof.

"Perché c'è il · ? " chiede la prof. Al ragazzo che in precedenza aveva dato risposte e corrette. Lui non sa rispondere. Dice che non ricorda, poi aggiunge perché non sono indipendenti." "Perché sotto - conclude la prof. - c'è il **concetto di indipendenza."**

$p(T=3) = p\,(1-p\,)^2$

$p(T=k) = p\,(1-p)^{k-1}$ Per quali valori di k? escluso lo 0 per k=1,2,3… cioè $k \in \mathbf{N}$

A questo punto la professoressa chiede ai ragazzi se abbiano idea di come calcolare questa media. "Cosa sarà la media di T?"

Il solito ragazzo risponde

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5$$

ma il dado è equilibrato, cioè ogni faccia ha la stessa probabilità di uscire. Se invece il dado è truccato in modo che la faccia 1esce il doppio delle volte delle altre facce?

La professoressa chiarisce che in tal caso bisogna fare una *media pesata*.

Cioè:

1	2x
2	x
3	x
4	x
5	x
6	x

x = ?

La somma di tutti è 1. Dunque 7x=1, cioè x=1/7

1	2/7
2	1/7
3	1/7
4	…
5	…
6	…

m(T) = 1, 1, 2, 3, 4, …, …

Un ragazzo osserva: "Ma allora la probabilità che esca 6 è ½, perché la faccia 6 è opposta alla 1."
La prof. Chiarisce che in questo ambito non conta la fisicità.

Chiede la prof. "come rispondo in questo caso?"

$$\frac{1+1+2+3+4+5+6}{7} = \frac{2\cdot 1+2+3+4+5+6}{7}$$

La media del dado non truccato era:

1 1/6

2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

dado non truccato $m(T) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}$

dado truccato $m(T) = 1 \cdot \frac{2}{7} + 2 \cdot \frac{1}{7} + 3 \cdot \frac{1}{7} + 4 \cdot \frac{1}{7} + 5 \cdot \frac{1}{7} + 6 \cdot \frac{1}{7}$

L'operazione è identica: valori per le rispettive probabilità. I pesi sono in un caso 1/6 nell'altro 1/7. In entrambi i casi essi sono una misura dell'importanza del valore.

Consideriamo come esperimento aleatorio quello della *produzione di numeri.*
Ogni numero ha una probabilità . La media è uguale alla somma dei numeri per le rispettive probabilità.
La prof. schematizza alla lavagna:
T= k=1,2,3…
$1 \to p$
$2 \to (1-p)p$
$3 \to (1-p)^2 p$
$4 \to (1-p)^3 p$ $m(T)=1\cdot p+2\cdot p(1-p)+......k(1-p)^{k-1}p$
...
...
$k \to (1-p)^{k-1}p$

Chiede a questo punto la prof. :"Come si richiama una somma infinita, cioè con un numero infinito di addendi?" Gli studenti sono smarriti. La prof. continua indicando che si parla di *serie* e domanda agli studenti se abbiano mai visto la serie geometrica.

$\sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1}$ metti a k tutti i numeri e fai la somma, dice la prof.

C'è una serie molto importante, continua la prof. che è la *serie geometrica*:

$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$

quando $0 \le x < 1$ la $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ "La butto lì – dice la prof.- Prima o poi la vedrete"

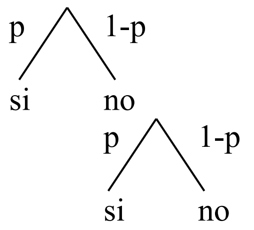
Poniamo $(1-p) = x \to p = 1-x$

$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}(1-x)$

$= \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} kx^k$ "Non si possono fare i conti con le serie come con le somme finite, ma la butto là" dice la prof.

Lascia fare il calcolo agli studenti per arrivare a dire che $\sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}$

La prof. propone di fare un secondo calcolo per arrivare sempre a questa media.



Con percentuale (1-p) non ho finito.
Se ho finito è bastato un lancio.
Se non ho finito tutto ricomincia,
ma ho già fatto un lancio.

m(T)= p·1 + (1-p)(1+m(T)) (1 perché un lancio l'ho già fatto)
y = p + (1-p)(1+y)
agli studenti il conto per mostrare che
y=1/p

Dunque, stabilito che p è la probabilità di successo e che 1-p è la probabilità di insuccesso, la prof. propone di tornare al problema delle figurine. Quante figurine deve acquistare quel tipo per completare la raccolta.

$$1+\frac{N}{N-1}+\frac{N}{N-2}+\ldots+\frac{N}{2}+\frac{N}{1}$$ Mediamente deve acquistare questo numero di figurine.

la prima figurina va bene

2° figurina

A questo punto ho finito l'album

Lo schema per la seconda figurina è quello fatto prima. Per la seconda figurina quante ne dovrà acquistare? (numero di prove per avere successo =1/p)
Posso pescare N-1 tipi di figurine diversi, una l'ho già pescata:

$\frac{1}{N}$ probabilità di pescare la figurina che ho già

$\frac{N-1}{N}$ probabilità di pescare una figurina nuova

per la terza figurina continuo ad acquistare finché trovo:

$\frac{2}{N}$ ripesco una di quelle

$\frac{N-2}{N}$ pesco una nuova

Il numero medio di acquisti è dunque

$$N\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N-2}+\ldots+\frac{1}{2}+1\right)$$

A questo punto la professoressa chiede agli studenti se abbiano fatto o meno gli integrali. Gli studenti rispondono che, a parte 1 o 2, questo è un argomento che non hanno ancora trattato.
La prof. scrive:

$$N\cdot\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\approx N\ln N$$

$$\int_1^N \frac{1}{k}$$

e chiede ai ragazzi se conoscono *e* (essendo il logaritmo in base e). Un ragazzo risponde che è compreso fra 2 e 3, un altro che è il limite di una successione….
Per notizia, dice la prof. , sappiate che

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \ln N \xrightarrow[N\to\infty]{} \gamma \quad \text{costante di Eulero}$$

"Esiste il limite di questa successione ed è razionale?" chiede la prof. La risposta è no. "E' trascendente, dice il ragazzo che interviene sempre. " cioè?" chiede la prof.
Le risposte sono una doccia di acqua fresca e lasciano intendere il grado di possibile comprensione dell'uditorio:
"Non è determinabile in maniera decimale"
"Va all'infinito regolarmente" (!!! La prof. sottolinea che un numero è fermo!)
A quel punto la prof. chiede:"Che cos'è un numero razionale"" E' un rapporto fra due interi"risponde qualcuno
Esempi di numeri razionali sono 1/3, 5, $0.\overline{3}$
e non è razionale, ma la dimostrazione non è alla vostra portata.
γ è non razionale = 0,5772156 è lo sbaglio che faccio a mettere il log al posto della sommatoria.

Dunque ipotizzando
N=10 $\rightarrow$ N lnN+ α = 29,29
N=100 $\rightarrow$ 518,74
N=200 $\rightarrow$ 1175

Quale sarà la probabilità che il numero degli acquisti da fare sia molto più grande della media? Nel caso in cui io sia particolarmente sfortunato?
Indichiamo con
V= numero degli acquisti da fare: è una variabile aleatoria

p(V>$N \ln N + \alpha$) con $N \ln N + \alpha$= numero di acquisti medio.

Cerchiamo la probabilità di avere una grande deviazione rispetto al valore medio.
Cerchiamo una valutazione superiore: questo valore non può essere più grande di tot. Vedremo che la maggior parte delle volte viene vicino a quello medio.

La lezione termina qui. La prof. lascia ai ragazzi la consegna di leggere gli assiomi della probabilità fino alla def. 1.6. e uscendo racconta ai ragazzi di Persi Diaconis, che prima di essere un matematico era un prestigiatore. Egli dimostrò che per mescolare bene un mazzo di carte bastano 7 smazzate. La prof. invita i ragazzi a cercare materiale su internet.

II giorno: LEZIONE FRONTALE DALLE ORE 14.00 ALLE ORE 17.00.

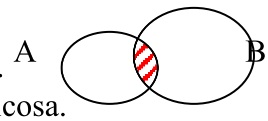
La prof. prima di iniziare a spiegare chiede ai ragazzi se abbiano delle domande. Nessuno proferisce parola.
Allora la prof. anticipa che arriveremo a qualche conclusione.
Ritorniamo ancora sul problema dell'acquisto delle figurine.
Ci servirà una qualche stima delle deviazioni dalle medie degli acquisti.
V= numero degli acquisti necessario.
Cerchiamo la stima di

$P(V>m)$ con $m = N \ln N + \alpha$
"Riusciamo a dire qualcosa su p" chiede la prof.

Cosa vuol dire che V>m? Vuol dire che per completare l'album ci vogliono più di m acquisti.
A questo punto la prof. scrive alla lavagna:
1,2,3,…,N
A_1={la figurina 1 non viene trovata entro m acquisti} Questo è un *evento* in probabilità, cioè una cosa che può accadere.
A_2={la figurina 2 non viene trovata entro m acquisti}
…
A_N={la figurina N non viene trovata entro m acquisti}
La prof. chiede ai ragazzi: Chi mi dice cosa vuol dire che V>m? Il solito ragazzo della prima fila risponde:"Almeno uno di questi eventi si verifica.".Ok. A questo punto la prof. dice ai ragazzi di guardare la definizione 1.6. Dalla quale si legge:
"(1.6) Definizione. Siano Ω un insieme, $\mathcal{A}$ una tribù di sottoinsiemi di Ω. Un'applicazione $\boldsymbol{P}: \mathcal{A} \to \boldsymbol{R}_+$ si chiama una *probabilità* (su $\mathcal{A}$) se verifica le due condizioni seguenti:

(i) $P(\Omega)=1$,
(ii) Se $(A_n)_{n\in \mathbf{N}}$ è una successione di elementi di $\mathcal{A}$ a due a due disgiunti (cioè tali che, per ogni $i\neq j$ si abbia $A_i \cap A_j = 0$) risulta $P(\bigcup_n A_n)=\Sigma_n P(A_n)$"

Se A e B sono eventi tali che uno dei due esclude l'altro (incompatibili), se C è l'evento: si verifica A oppure B, allora la probabilità di C è la somma di prob A e prob B: p(C) = p(A)+p(B).
Considerando l'esempio del dado, possiamo scrivere:
A= evento esce la faccia pari
B=evento esce la faccia dispari
Il solito ragazzo interviene dicendo:"l'intersezione di A e B è nulla".
La professoressa dice che bisogna interpretare gli eventi come sottoinsiemi.
p(A)=1/2
p(B)= 1/6
p(AoB)=1/2 +1/6
p(C)≤ p(a)+p(B)
La prof. A questo punto disegna sulla lavagna due insiemi A e B intersecati.



E aggiunge: "Per gli A_1, A_2, A_3… ecc. di prima sommo, così ho un ≤ a qualcosa.
Vorrei avere un =, ma mi accontento!"
$P(C)= p(A_1)+p(A_2)+.... +p(A_N)$
Dovremmo riuscire a calcolare la somma al secondo membro.
"Ditemi voi" esorta la prof.
Il solito ragazzo della prima fila dice:
$p(A_1) = (1-p)^m$
l'esponente m indica che la figurina non l'ho trovata m volte. La prof suggerisce ai ragazzi di ripensare allo schema del giorno precedente.
Poi sostituendo al posto di p 1/N (sostituzione indicata da tutti i ragazzi) si ha:
$p(A_1) = (1-1/N)^m$
Facendo così per tutti:

$$N\left(1-\frac{1}{N}\right)^m \leq *$$

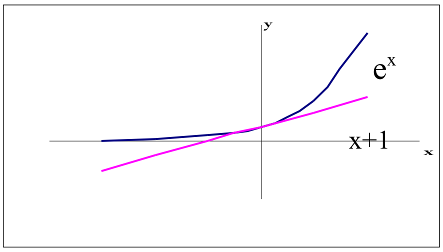
A questo punto la prof. chiede ai ragazzi se abbiano familiarità coi grafici di funzioni. Quando gli studenti rispondono di no chiede loro come mai, che classe facciano.Chiede "Non avete mai fatto e^x? Le potenze?" I ragazzi ancora una volta rispondono di no.
"Però - dice la prof. – devo parlare così" e continua.
$f(x) = e^x$ passante per il punto (0,1)

$f'(x)= e^x$

cosicché l'equazione della retta tangente è:

$y = 1\cdot(x-0) +1$

$y=x+1$



chiede la prof. "Va bene?"

L'esponenziale è convessa, spiega la prof. , ciò vuol dire che ogni retta tangente sta sotto il suo grafico. Ci vuole la derivata seconda per vedere la convessità di e^x, ma è intuitivo, si vede dal grafico che le rette tangenti stanno sotto.

Scrive dunque alla lavagna:

$$\leq Ne^{-\frac{m}{N}}$$

$$p(V > m) \leq Ne^{-\frac{m}{N}}$$

"Quindi - chiede la prof. – quanto più m è grande, come sarà la probabilità che per completare l'album mi servano più acquisti di m?" Una voce dice: "minore…".

Mi aspetto – continua la prof. che questa probabilità diventi sempre più piccola e che magari vada a 0.

E' una successione di numeri.

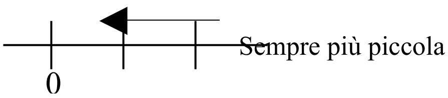
$$0 \leq p(V > m) \leq Ne^{-\frac{m}{N}}$$

0

Quanto varrà il limite?

C'è un teorema, del confronto, dice la prof. , ma i ragazzi sono perplessi. "o dei carabinieri" aggiunge la prof., al che "Ah…" dicono tutti i ragazzi .

Il membro a destra è 0, il membro a sinistra va a zero e quindi anche quello in mezzo… Spende poi 2 parole anche per i ragazzi di IV, che ancora non hanno fatto l'analisi, schematizzando sulla lavagna:



A questo punto:

$m= N \ln N + \alpha$

$$p(V > m) \leq Ne^{-\frac{N\ln N+\alpha}{N}} = Ne^{-\ln N-\frac{\alpha}{N}}$$

$$= Ne^{-\ln N}\cdot e^{-\frac{\alpha}{N}}$$

$$= N\cdot\frac{1}{N}\cdot e^{-\frac{\alpha}{N}} = e^{-\frac{\alpha}{N}}$$

Con questo abbiamo finito tutti i conti.

Passiamo alle carte, prima però analizziamo un attimo quanto visto:

Volevo che la probabilità di grandi deviazioni quando α è grande tendesse a 0. Abbiamo visto che grosso modo mi servono un numero m di acquisti.

Passando all'argomento "carte" la professoressa dice ai ragazzi di tenere sott'occhio i disegni delle fotocopie del libro.

1
2
3
4
5

Considerando un mazzetto di 5 carte: N=5, si prende la prima carta e la si mette in una delle possibili posizioni. "Quante sono queste possibili posizioni in cui può andare la carta?" chiede la prof.Sono 5. Possiamo pensare ad un'urna con 5 palline che

identificano la posizione. “Dove deve andare la pallina?” Bè, può tornare anche nella posizione 1, quella di partenza.
“Cosa vuol dire ‘A caso’, secondo voi?” Il solito ragazzo dice” A priori non si può determinare la posizione” “Questo significa che è aleatorio” dice la prof.
La probabilità è uguale. 1/N la probabilità che vada fra la 2 e la 3, fra la 3 e la 4, fra la 4 e la 5, sotto la 4 o alla 1.
Dopo un’operazione il mazzo non è casuale.
Da capire prima ovviamente cosa intendiamo per mazzo casuale e quando un mazzo casuale è vicino ad esserlo. Questo va stabilito prima.
Stabiliamo che un mazzo è casuale quando è ottenuto con un procedimento che ogni possibile distribuzione delle carte ha la stessa probabilità.
Dice il solito ragazzo “Piuttosto che di distribuzioni parliamo di permutazioni.”
“Quante sono le permutazioni di n oggetti?””n!”
La prof. indaga se tutti siano a conoscenza di questo, ma alcuni, in particolare quelli che frequentano la IV rispondono di no.
La prof. allora fa un disegno alla lavagna:
Se N=3

1	1	2	3	2	3
2	3	1	1	3	2
3	2	3	2	1	1

$3! = 1\cdot 2\cdot 3$

Se ho 4 carte il 4 lo posso mettere in 4 posti diversi per le 6, cioè $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$
Quindi il mazzo casuale vuol dire:
C_{N}={permutazioni delle N carte}
$\forall \pi \in C_N$ appiccico un numero che è $\frac{1}{N!}$

$U(\pi)=\frac{1}{N!}$ U è una funzione $U: C \to R$
Il dominio è l’insieme delle permutazioni, il condominio è R.
Si chiama distribuzione uniforme di probabilità.
E’ un modo diverso per dire che il mazzo è casuale, dice la prof.
“Il nostro mazzo è casuale?” NO.
“Vediamo perché.”
E’ casuale se per ogni permutazione posso ottenere ogni possibile distribuzione delle carte con $p=\frac{1}{N!}$
Vediamo cosa posso ottenere dato N=5

1	2
2	1
3	3
4	4
5	5

(1,2,3,4,5) p=1/5
(2,1,3,4,5) p=1/5
(2,3,1,4,5) p=1/5
→ (2,3,4,1,5) p=1/5
(2,3,4,5,1) p=1/5

non è $p=\frac{1}{N!}$ ma è $p=\frac{1}{5}$ solo per queste, per le altre è 0 (per esempio per la (2,3,1,5,4))

Possiamo scrivere allora:

$$\text{Top}(\pi) = \begin{cases} \dfrac{1}{N} & \text{Se } \pi \text{ è una di quelle permutazioni} \\ 0 & \text{Se no} \end{cases}$$

E' una distribuzione di probabilità, ma non è la distribuzione di probabilità di prima.
Altre distribuzioni possono essere:

$$E(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{Se } \pi \text{ è } (1,2,3,4,5) \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}$$

$$F(\pi) = \begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases} \text{ va bene?? NO}$$

Il condominio sarà l'intervallo di R^+ [0,1]

$$F(\pi) = \begin{cases} \dfrac{9}{10} & \text{Se } \pi \text{ è } (1,2,3,4,5) \\ \dfrac{7}{10} & \text{Se } \pi \text{ è } (2,1,3,4,5) \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}$$

Può essere una distribuzione del genere? No, perché la somma dei valori deve essere pari a 1.

Dunque, U è una funzione definita su C_N , condominio [0,1], e con la somma dei valori pari a 1.
Una generica distribuzione F è tale se è definita su C_N, se è a valori [0,1] e se è tale che $\sum_{\pi \in C_N} F(\pi) = 1$.

Si chiama Top in at random: la carta in cima dentro a caso.
A questo punto la professoressa si ferma e chiede ai ragazzi quali siano le impressioni, se ci siano critiche suggerimenti. Se sembra loro di capire abbastanza, se si siano spaventati a sufficienza alla lezione della mattina. Molti dei concetti, dice la prof. sono cose molto intuitive. Il consiglio che dà lei è di andare alle radici. Chiedere perché, perché si fa così, perché quella definizione. La maturazione, dice, li porterà a capire di più le radici delle cose.

A questo punto si deve cercare di capire cosa vuol dire che due distribuzioni sono vicine.
Cos'è la distanza fra due distribuzioni?
"Partiamo da cose che conoscete" dice la prof.
Sulla retta, che conoscete, che cos'è la distanza fra x e y?
Per esempio, la distanza fra 1 e 3 sarà:
d(1,3)=|1-3|
d(-5,-2)=|-5-(-2)|
d(-1,-4)=|-1-(-4)|
cioè in generale: d(x,y)=|x-y|
E' importante che alle conclusioni ci arrivino da soli, sottolinea la prof. rivolta a noi.
Appurato questo, complichiamo le cose.
Se ho questo vettore, questa coppia di numeri:

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ la distanza sarà: $\sqrt{\left((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\right)}$ (Teorema di Pitagora nel piano Cartesiano)

Un modo analogo di definire la distanza è questo:

$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ "Non è la stessa cosa – dice la prof. – ma ha le stesse funzioni. "
Quali devono essere le funzioni di una cosa che si chiama *distanza*?
Deve essere non negativa e la somma della distanza più il primo deve dare il scondo. Entrambe soddisfano questi requisiti, ma la seconda espressione è più facile.
Consideriamo la funzione:

$$\left.\begin{array}{l} X:\{1,2\}\to R \\ X(1)=x_1 \\ X(2)=x_2 \end{array}\right\}$$ E' un modo diverso per dire il vettore, dice la prof.

Lo stesso possiamo scrivere per l'altra.
$Y:\{1,2\}\to R$
$Y(1)=y_1$
$Y(2)=y_2$
Posso scrivere
$| X(1)- Y(1)|+| X(2)-Y(2)|$
L'immagine del punto 1 con la prima applicazione e con la seconda applicazione e così via.
Questa è una distanza. Abbiamo definito una distanza.
$V: C_N\to[0,1]$
$W: C_N\to[0,1]$
Secondo questa definizione:
$|V(\pi)-W(\pi)|+$…per un'altra permutazione…
Cioè:

$$\sum_{\pi \in C_N} | V(\pi) - W(\pi) | = \|V - W\|$$

Questa rappresenta la distanza fra le due distribuzioni V e W in variazione. Ci mettiamo ½, tanto non cambia niente.
Si tratta di calcolare quanto c'è di differenza tra i valori che piglia la prima e la seconda su un elemento e poi si fa la somma.

Proviamo con N=3

$$E(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{Se } \pi \text{ è } (1,2,3) \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}$$

$$U(\pi) = \frac{1}{3!} \quad \forall\pi\in C_3$$

Proviamo dunque a fare la distanza tra E ed U.
Prima di tutto scriviamo chi è C_3

$$\begin{array}{llllll} \quad\pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_5 & \pi_6 \end{array}$$
$$C_3=\{(1,2,3),(1,3,2),(3,1,2),(3,2,1)(2,1,3),(2,3,1)\}$$

La prof. esorta: "Dite!"
Dopo un po' di silenzio uno dice: (1,2,3), poi anche gli altri capiscono quel che devono fare.

$$d(V,W) = \frac{1}{2}\sum_{\pi \in C_N} | V(\pi) - W(\pi) |$$

Quindi nel nostro caso:

$$d(E,U) = \frac{1}{2}\left[|(E(\pi_1) - U(\pi_1)| + |(E(\pi_2) - U(\pi_2)| + |(E(\pi_3) - U(\pi_3)| + |(E(\pi_4) - U(\pi_4)| + |(E(\pi_5) - U(\pi_5)| \right]$$

Capite bene, spiega la prof., che queste cose non le si può scriverle in generale. Ci vogliono metodi di calcolo più efficienti.

$$d(E,U) = \frac{1}{2}\left[|1 - \frac{1}{3!}| + |0 - \frac{1}{3!}| + |0 - \frac{1}{3!}| + |0 - \frac{1}{3!}| + |1 - \frac{1}{3!}| \right] =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} \cdot 5)$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3!} + 1 - \frac{1}{3!}) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (1 - \frac{1}{3!}) = 1 - \frac{1}{3!}$$

Se le carte sono N la distanza sarà $1 - \frac{1}{N!}$

Notiamo che non è molto buona, perché se N è alto essa tende a 1. 1 è un minimo.
La distanza massima in variazione è 1. Qui siamo vicini ad 1, quindi va malissimo!
Proviamo con l'altra funzione Top.

$$\mathrm{Top}(\pi) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{Se } \pi = \begin{cases} (1,2,3) \\ (2,1,3) \\ (2,3,1) \end{cases} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Rifacendo il calcolo:

$$d(Top,U) = \frac{1}{2}\left[|(Top(\pi_1) - U(\pi_1)| + |(Top(\pi_2) - U(\pi_2)| + |(Top(\pi_3) - U(\pi_3)| + |(Top(\pi_4) - U(\pi_4)| + |(Top(\pi_5) - U(\pi_5)| \right]$$

$$d(E,U) = \frac{1}{2}\left[|\frac{1}{3} - \frac{1}{3!}| + |0 - \frac{1}{3!}| + |0 - \frac{1}{3!}| + |0 - \frac{1}{3!}| + |\frac{1}{3} - \frac{1}{3!}| + |\frac{1}{3} - \frac{1}{3!}| \right] =$$

$$= \frac{1}{2}[3(\frac{1}{3} - \frac{1}{3!}) + \frac{3}{3!}]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (1 - \frac{3}{3!}) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (1 - \frac{N}{N!}) = 1 - \frac{1}{(N-1)!}$$

Non ho guadagnato molto, in effetti.
La professoressa a questo punto invita i ragazzi a guardare la figura delle fotocopie del libro (fig. pag.161).
La distanza in variazione tra le varie ripetizioni, non giustificata è
$d((Top)^k,U) \leq p(T>k)$
dove T è l'istante in cui la carta che era in fondo è salita in cima.
Immaginiamo di fare l'operazione contraria. Il tempo T è lo stsso tempi che impiega il collezionista a completare l'album.
Questa è la bellezza della matematica! – dice la prof. – tutto sta in un'idea semplice, che però va vista!

Prendiamo $k = N \ln N + \alpha$
N numero delle figurine o delle carte
$\alpha = CN$

$$d < p(T > k) \leq e^{-\frac{\alpha}{N}} = e^{-\frac{CN}{N}}$$

Supponiamo N=52 e di volere una distanza minore di $\frac{1}{1000}$

I risultati che otteniamo non sono un granchè con questo tipo di mescolamento (una carta alla volta messa sotto)
(V>m) =(T>k) sono la stessa cosa.
Ln 52 =3,95
N lnN =205,46   Ci saranno grosso modo 205 operazioni.

Voglio C.

$$e^{-C} < \frac{1}{1000}$$

$$\frac{1}{e^{C}} < \frac{1}{1000}$$

$$e^{-C} < 1000^{-1}$$

$$C > \ln 1000 = 6{,}91$$

Prendendo C = 6,92 e sostituendo si ha:
k=205,96 + 6,92 · 52=565,24

A questo punto la prof. continua la spiegazione a parole, seguendo le fotocopie del libro. Tutto sta nella figura di pag. 165 che guarda le cose al contrario.
L'obiettivo è arrivare alla configurazione 1,4,2,3,5 col mescolamento veloce.
Analogamente a prima si può dimostrare che

$d((Rif)^k,U) \leq p(T>k) = 1 - \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{2k}\right)$

Se
$k = 2 \log_2 CN$

$$\approx 1 - e^{-\frac{1}{2C^2}} \approx \frac{1}{2C^2}$$

ora
$e^{-x} \geq 1-x$
in certe situazioni si può fare finta, dice la prof.,che
$e^{-x} \approx 1-x$

Se voglio che sia $< \frac{1}{1000}$

$$\frac{1}{2C^2} < \frac{1}{1000}$$

$$c > \sqrt{500}$$

La prof. finisce qui. Uscendo lascia ai ragazzi la propria e-mail nel caso vogliano contattarla per le loro tesine e la proposta di trovare la distanza in variazione per k=4 (24 permutazioni). Chiede loro di trovare un criterio per non andare a casaccio nello scrivere le permutazioni.

III giorno: ESERCITAZIONE DALLE ORE 14.00 ALLE ORE 16.30.
Inizialmente l'esercitatrice chiede agli studenti che cosa abbiano fatto i giorni precedenti con la professoressa. Un ragazzo risponde:"Mah…una distanza…."

Poi propone un paio di esercizi ai ragazzi.

Es. 1

L'esercitatrice chiede ai ragazzi di riflettere da soli 20 minuti sul problema dei compleanni:
"*Calcolare la probabilità che, tra n persone scelte a caso, almeno 2 festeggino il compleanno nello stesso giorno.*"
Supponendo n= 3 persone e che il numero dei giorni dell'anno sia 4 (A,B,C,D).
Dopo i venti minuti l'esercitatrice chiede ai ragazzi. Alcuni rispondono di aver sostituito nella formula indicata nella fotocopia i dati da lei assegnati. L'esercitatrice dice di provare a fare un ragionamento. Una ragazza interviene dicendo che si può scrivere:
[1- (casi non favorevoli)/(tutti i casi)]
dove i casi non favorevoli sono quelli in cui tutti sono nati in giorni diversi.
L'esercitatrice la chiama alla lavagna, ma lei preferisce non andare.
Dunque: i casi possibili sono $4^3=64$
Esplicitandoli tutti:

Antonio	a	b	c	d
Giuseppe	a	b	c	d
Luigi	a	b	c	d

Per il conteggio dei casi favorevoli:

Antonio	a	b	c	d
Giuseppe	b c d	a c d	a b d	a b c
Luigi	cd	…	…	

In tutto i casi sono $4\cdot3\cdot2=24$

Dunque la probabilità che non ci siano nati nello stesso giorno è $\frac{24}{4^3}=\frac{3}{8}$

E dunque la probabilità cercata dal problema è: $1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$

A questo punto l'esercitatrice propone di generalizzare per capire la formula delle fotocopie:
365 giorni all'anno per n persone.
La prima persona ha 365/ 365 possibilità
La seconda 364/ 365
La terza 363/365
…
cioè:

$$\frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdots\frac{(365-n+1)}{365}=$$

$$=1-\binom{365}{n}^{n}\cdot\frac{1}{365^{n}}$$

Esercizio 2

Ho 4 scatole e 5 palline: quanto vale la probabilità che in ogni scatola ci sia una pallina.
Ho 5 scatole e 3 palline: quanto vale la probabilità che in ogni scatola ci sia esattamente una pallina
Quanto vale la probabilità che in ogni scatola non ci sia più di una pallina.
Gli studenti risolvono l'esercizio consultandosi fra loro. Poi viene data spiegazione dall'esercitatrice.

A questo punto uno studente (quello solito delle domande) propone un **esercizio**:

In un'aula in cui si trovano 10 banchi, disposti in 2 file, quanto vale la probabilità che 4 persone, sedendosi a caso si dispongano in maniera che tutti vedano la lavagna.
Al solito viene fatto l'elenco dei casi favorevoli: 10·8·6·4 e dei casi possibili 10·9·8·7

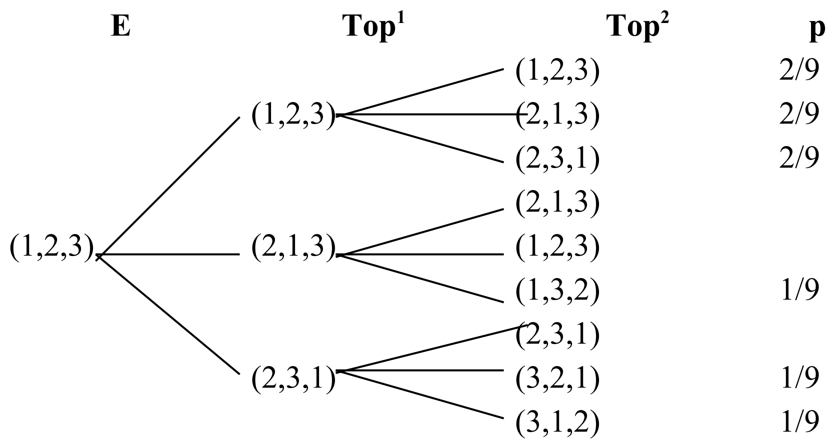
E quindi: $p = \dfrac{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \dfrac{24}{63}$

Esercizio 4
Ritornando alla distanza fra le distribuzioni supponiamo di avere
N=3

$d(E,U)=1-\dfrac{1}{3!}$ con $E\begin{cases} 1 \text{ se } \pi=(1,2,3) \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$ $\qquad U=\dfrac{1}{3!}$

$d(Top^1,U)= 1-\dfrac{1}{(3-1)!}$

$d(Top^2,U)=?$



Alcune ragazze, in particolar modo quelle di IV, non riescono a creare lo schema, nè tanto meno a definire Top^2. L'esercitatrice e la tutor si siedono nei banchini per dare loro un aiuto.
Cioè Top^2 è così fatta:

$$Top^2 = \begin{cases} \dfrac{2}{9} & \text{Se } \pi= (2,3,1),(1,2,3)(2,1,3) \\ \dfrac{1}{9} & \text{Se } \pi=(1,3,2),(3,2,1),(3,1,2) \end{cases}$$

$$d = \frac{1}{2}\left[3 \cdot (\frac{2}{9}-\frac{1}{3!}) + 3(-\frac{1}{9}+\frac{1}{3!})\right]$$

$$= \frac{3}{18}$$

Top^2 con N=4 e 24 elementi?
L'esercitatrice propone a chi ha voglia di fare questo caso.

Impressioni personali

In generale devo dire che, apprestandomi a partecipare a questo laboratorio, non immaginavo che esso si svolgesse in questo modo, con lezioni frontali seguite da una esercitazione sul modello universitario. Mi figuravo che venissero creati spunti per lavori di gruppo ed approfondimenti, ma tant'è.
L'argomento trattato era indubbiamente difficile: difficile di per sé e difficile se esaminato in relazione alla preparazione di base che potevano avere gli studenti. Tanto più che a seguire non erano solo studenti dell'ultimo anno, ma anche studenti del penultimo a cui mancava, dunque, tutta l'analisi. Riguardo alla probabilità come argomento, essa generalmente non viene affrontata nell'ambito degli studi superiori, seppure sia prevista nelle indicazioni ministeriali. E quando raramente accade che essa venga studiata, per quel che ne so, mai viene approfondita più di tanto, vale a dire che mai si arrivano ad introdurre le variabili aleatorie o si parla di distribuzioni di probabilità.
Il materiale distribuito era, a parer mio, difficilmente fruibile da ragazzi delle superiori. Le fotocopie del testo erano in inglese, cosa già di per sé in grado di limitare la comprensione: se è vero che i ragazzi al liceo studiano inglese, è altresì vero che mai essi apprendono a consultare testi scientifici in inglese. Anche i richiami di probabilità ed i cenni di calcolo combinatorio compendiati nelle fotocopie fornite dalla professoressa erano di livello elevato, tenuto presente che i ragazzi, come è stato detto più volte anche nell'ambito dello stesso corso di perfezionamento, non sono soliti consultare o studiare i testi di matematica, usando gli stessi piuttosto come eserciziari.
Come dicevo, l'argomento era difficile. Soprattutto perché per la sua comprensione la professoressa si è trovata costretta a "buttare là" argomenti tutt'altro che banali. Così per esempio le serie, la serie geometrica, gli integrali, il numero e, le variabili aleatorie, le deviazioni rispetto al valore medio, le derivate, la retta tangente, la convessità di una funzione, le successioni di numeri, il calcolo combinatorio; senza considerare aspetti che, pur essendo comprensibili per il livello scolastico della platea, per esempio le funzioni che hanno un dominio diverso da R (C_N) o la definizione alternativa di distanza, necessitavano di una riflessione alla loro portata. In effetti parlando con la professoressa mi ha detto come lei trovi estrema difficoltà a rendere le cose semplici ed alla portata dell'uditorio, ma che più di così effettivamente non possa fare. Sempre la professoressa sottolineava come a suo parere sia importante far arrivare al dunque in maniera graduale.
Per quanto riguarda la partecipazione degli studenti, la mia impressione è che essa sia stata condizionata non poco dalla presenza del ragazzo della prima fila, super appassionato di probabilità (ha detto di aver letto libri per conto suo e di aver svolto un intero libro di esercizi per passione, e di aver partecipato già lo scorso anno alla settimana matematica scegliendo il laboratorio di probabilità) e intenzionato ad iscriversi alla facoltà di matematica. Credo che gli altri si sentissero inibiti dai suoi interventi.
Nelle interviste fatte loro il primo giorno, i ragazzi, specialmente quelli di IV, avevano confessato di non aver capito quasi nulla, anche per i frequenti richiami a cose a loro sconosciute. Il secondo giorno, invece, pareva essere andata meglio, come pure al termine delle esercitazioni. Così dicevano anche le ragazze che non erano in grado di scrivere Top[1] ed il ragazzo che aveva risposto all'esercitatrice che il giorno precedente, a lezione, era stata determinata una non bene identificata distanza. La mia impressione è che fossero sollevati dall'avere una formula nella quale sostituire i valori.
Infine però è degno di nota il confronto fra le mie impressioni e i risultato dell'analisi del questionario somministrato ai ragazzi. Mi è parso di rileggervi le mie impressioni, salvo che per i materiali utilizzati, i quali sono stati dichiarati 'chiari' da 10 su 12 studenti (considerando sia la risposta si (6) che il più si che no (4)). Questo mi ha lasciato un po' perplessa, e allora delle due l'una: o sottovaluto in maniera pesante le capacità degli studenti, oppure la maggior parte di loro non ha guardato il materiale e per non fare brutta figura l'ha giudicato positivamente. Ai posteri l'ardua sentenza….