Università di Pisa

Corso di perfezionamento

“Strategie didattiche per promuovere un atteggiamento positivo verso la matematica e la fisica”

Secondo laboratorio:
La matematica ricreativa

Francesco Daddi

Anno Accademico 2006-07

Corso di perfezionamento
“Strategie didattiche per promuovere un atteggiamento positivo verso la matematica e la fisica”

28 Marzo 2007

Francesco Daddi

La matematica ricreativa a scuola

Esistono molti problemi di matematica ricreativa che possono essere affrontati a scuola; a mio avviso questo tipo di matematica, affiancato a quello tradizionale, può migliorare negli studenti l'atteggiamento verso la disciplina.
E' in ogni caso interessante far vedere come la matematica sia importante e fondamentale anche in ambiti che, a prima vista, possiamo reputare ad essa estranei.

Questo che segue è solo un elenco di attività che possono essere presentate in classe:

- Risolutore di equazioni ad acqua
- Grafi e figure disegnabili con continuità; camere e ponti;
- Gioco del 15
- Sezione aurea, rettangoli aurei e poliedri regolari
- Somma di potenze e figure geometriche
- Numeri poligonali
- Triangolo di Tartaglia e numeri di Fibonacci
- Curiosità aritmetiche
- Problemi geometrici
- Problema dei travasi

Risolutore di equazioni ad acqua

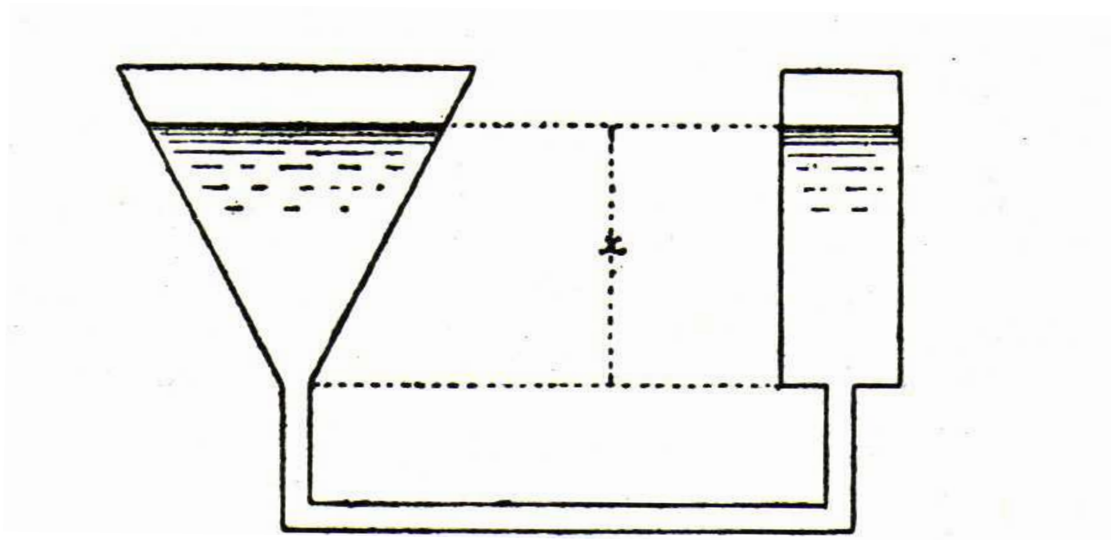

Figura 1: Metodo Demanet per risolvere le equazioni cubiche.

Il metodo idrostatico di A. Demanet è adatto alla soluzione delle equazioni di terzo grado della forma:

$$x^3 + x = c \tag{1}$$

nella quale c indica una costante positiva data. Esso è basato sull'uso dei vasi comunicanti di forma convenientemente stabilita.

Se introduciamo un volume d'acqua determinato in uno dei due vasi comunicanti, l'altezza comune del liquido nei due vasi fornisce il valore della radice cercata.

Nel caso specifico dell'equazione (1) si prendono come vasi comunicanti un cono di rivoluzione in cui il raggio r di base e l'altezza a sono nel rapporto:

$$\frac{r}{a} = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \simeq 0,977...$$

e un cilindro di base uguale ad un centimetro quadrato. Se indichiamo con V_{acqua} il volume d'acqua che versiamo, con V_{tubo} e con x l'altezza comune nei due recipienti, la relazione è:

$$x^3 + x + V_{\text{tubo}} = V_{\text{acqua}}$$

da cui si ha:

$$x^3 + x = V_{\text{acqua}} - V_{\text{tubo}}\,.$$

In generale, preso un cilindro di raggio r e un cono di altezza h e raggio R, l'equazione diventa:

$$\pi r^2 x + \frac{1}{3}\pi \frac{R^2}{h^2}\, x^3\,;$$

possiamo allora scegliere opportunamente i due recipienti se vogliamo risolvere una data equazione del tipo:

$$k_1\,x^3 + k_2\,x = k_3\,.$$

Ritroviamo le stesse equazioni se al posto del cilindro mettiamo un parallelepipedo e se al posto del cono mettiamo una piramide, ad esempio a base quadrata.

E' possibile utilizzare solamente il cono ed avere un metodo per il calcolo di radici cubiche: se versiamo nel cono V cc di acqua, il livello ci dà il valore di $\sqrt[3]{V}$.

E' possibile generalizzare il metodo anche per altre equazioni polinomiali; ad esempio, se al posto del cono mettiamo un paraboloide di rotazione, l'equazione da risolvere sarà:

$$kx^2 + x = c$$

dove k dipende dalle caratteristiche del paraboloide; possiamo far sì che k valga 1, come visto per l'equazione iniziale.

Anche qui, in modo del tutto analogo al caso precedente, è possibile utilizzare solamente il parabolide di rotazione per avere un metodo di calcolo per le radici quadrate.

In generale, se vogliamo risolvere un'equazione di grado n, dobbiamo prendere in considerazione solidi di rotazione la cui curva generatrice è

$$y = x^{\frac{2}{n-1}}$$

Per dimostrarlo, bastano infatti pochi calcoli:

$$\int_0^a \pi\left(x^{\frac{1}{k}}\right)^2 dx = \frac{\pi}{\frac{2}{k}+1}\,a^{\frac{2}{k}+1} \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{k}+1 = n \quad\Rightarrow\quad 2+k = n\,k \quad\Rightarrow\quad k = \frac{2}{n-1} \quad \square$$

Nella tabella sono riportate le curve generatrici per $n = 2, \ldots, 10$.

n	x^p
2	x^2
3	x
4	$\sqrt[3]{x^2}$
5	$\sqrt{x}$
6	$\sqrt[5]{x^2}$

n	x^p
7	$\sqrt[3]{x}$
8	$\sqrt[7]{x^2}$
9	$\sqrt[4]{x}$
10	$\sqrt[9]{x^2}$
11	$\sqrt[5]{x}$

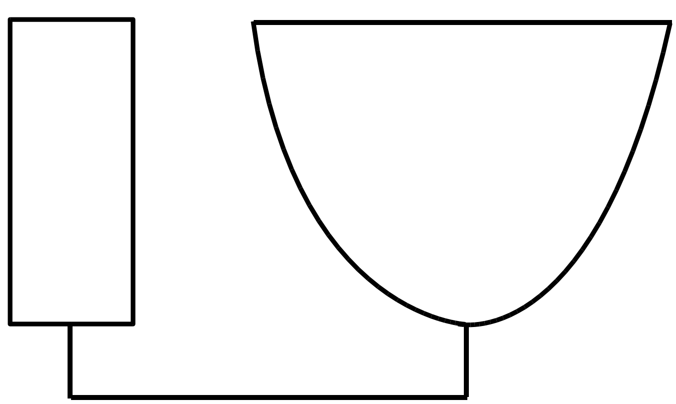

Figura 2: Metodo Demanet per risolvere le equazioni di secondo grado.

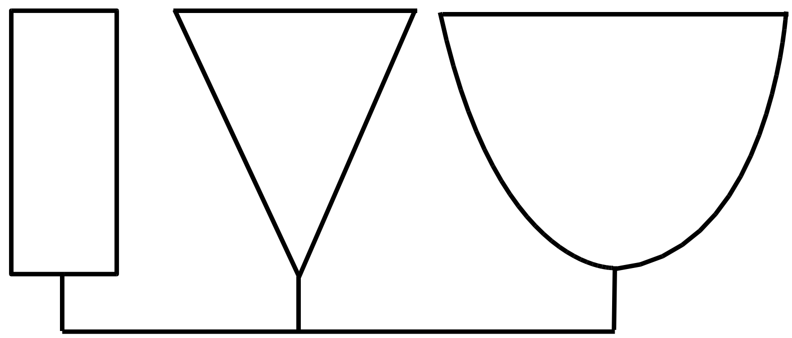

Figura 3: Metodo Demanet per risolvere le equazioni di terzo grado complete.

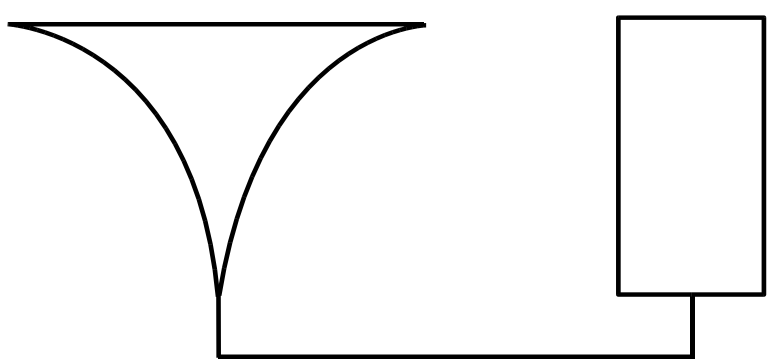

Figura 4: Metodo Demanet per risolvere le equazioni di quinto grado: $k_1\,x^5 + k_2\,x = k_3$.

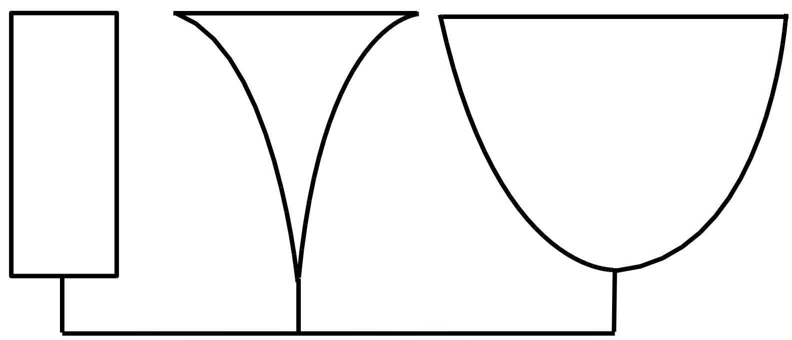

Figura 5: Metodo Demanet per risolvere le equazioni di quinto grado: $k_1\,x^5 + k_2\,x^2 + k_3\,x = k_4$.

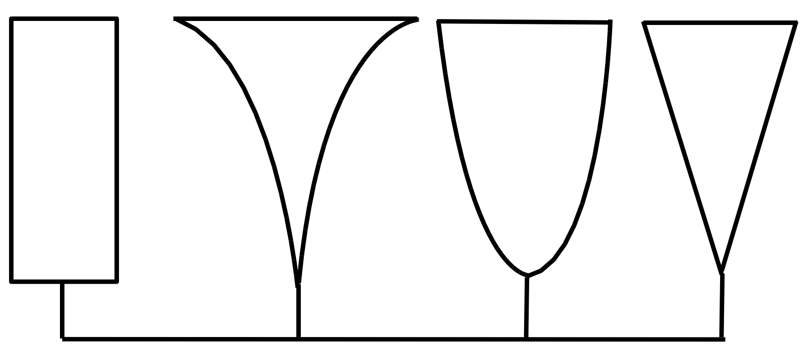

Figura 6: Metodo Demanet per risolvere le equazioni di 5^o grado: $k_1\,x^5 + k_2\,x^3 + k_3\,x^2 + k_4\,x = k_5$.

Si osserva che, alle prese ad esempio con l'equazione $x^5 + x = c$ (figura 4), quando l'acqua è poca, il livello cresce praticamente solo nel cilindro; quando l'acqua è tanta, il livello cresce lentamente perché la base del recipiente di grado massimo si allarga sempre di più.

Questo fornisce un'interpretazione fisica dell'andamento di un polinomio vicino all'origine (i valori del polinomio sono in pratica dati dal termine lineare); se invece andiamo a studiare il comportamento lontano dall'origine, vediamo che basta considerare il termine di grado massimo.

Grafi e figure disegnabili con continuità

Il problema dei sette ponti di Königsberg è un problema ispirato da una città reale e da una situazione concreta. La città di Königsberg, già facente parte della Prussia Orientale ed ora chiamata Kaliningrad, è percorsa dal fiume Pregel e da suoi affluenti e presenta due estese isole che sono connesse tra di loro e con le due aree principali della città da sette ponti.

Ci si pone la questione se sia possibile con una passeggiata seguire un percorso che attraversa ogni ponte una e una volta sola e tornare al punto di partenza. Nel 1736 Leonhard Euler lavorò sul problema e dimostrò che la passeggiata ipotizzata non era possibile. Non sembra dotata di fondamento storico, ma piuttosto leggenda urbana, l'affermazione secondo la quale intorno al 1750 i cittadini benestanti di Königsberg la domenica passeggiassero per la loro città cercando invano di risolvere il problema.

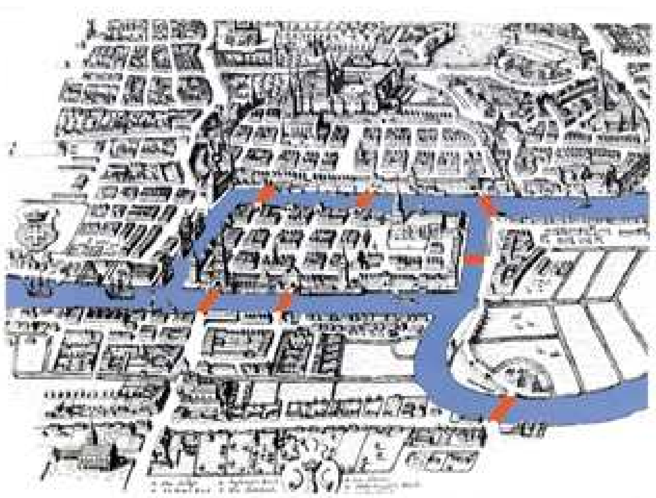

Figura 7: Veduta di Königsberg.

Le figure che non hanno nodi dispari si possono tracciare con tratto continuo partendo da un nodo qualsiasi. Quando una figura ha soltanto 2 nodi dispari, si può descrivere con tratto continuo partendo da uno di essi. Le figure con più di 2 nodi dispari non possono essere descritte con tratto continuo.

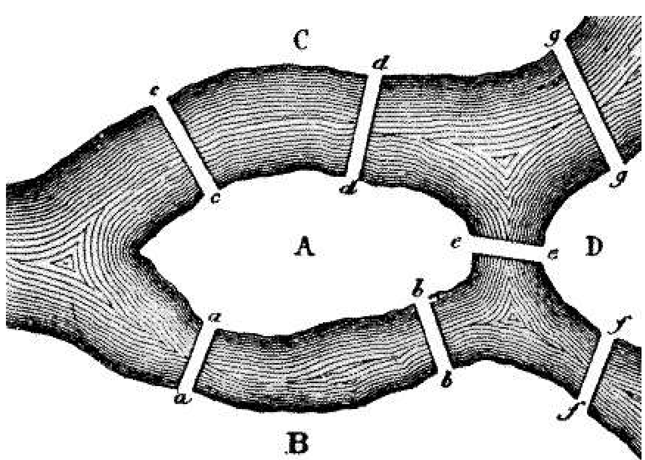

Figura 8: Ponti di Königsberg.

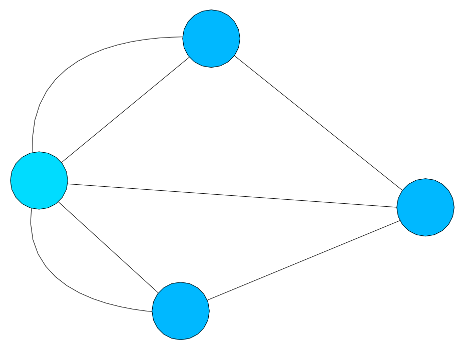

Figura 9: Grafo relativo al problema dei ponti di Königsberg.

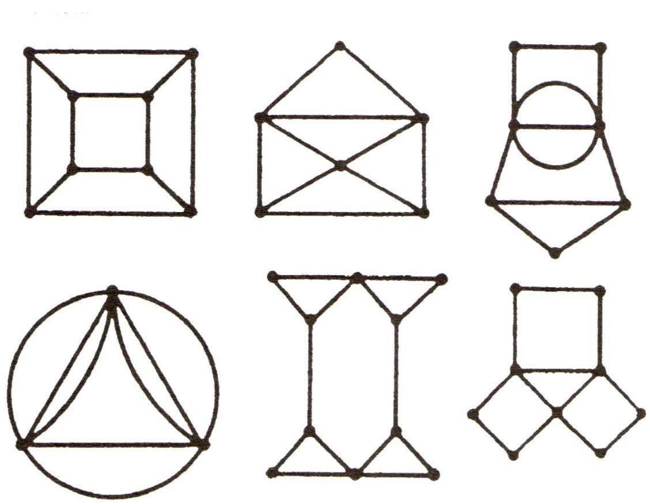

Figura 10: Quali di queste figure si possono disegnare senza mai staccare la penna dal foglio?

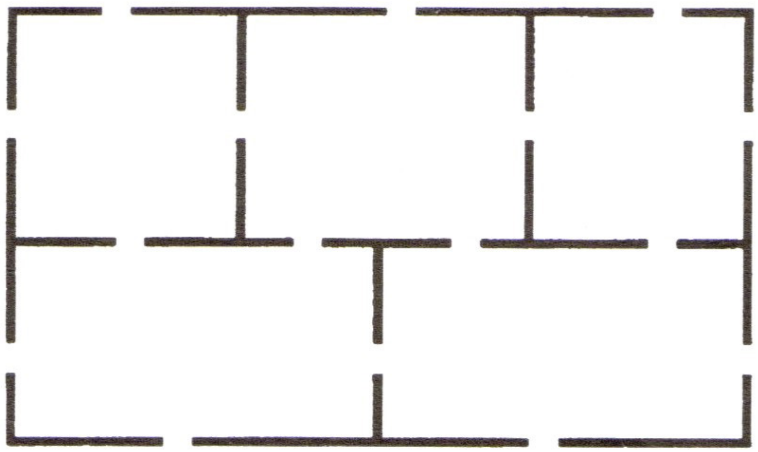

Figura 11: E' possibile trovare un cammino che passa attraverso ciascuna porta una sola volta, senza mai alzare la penna?

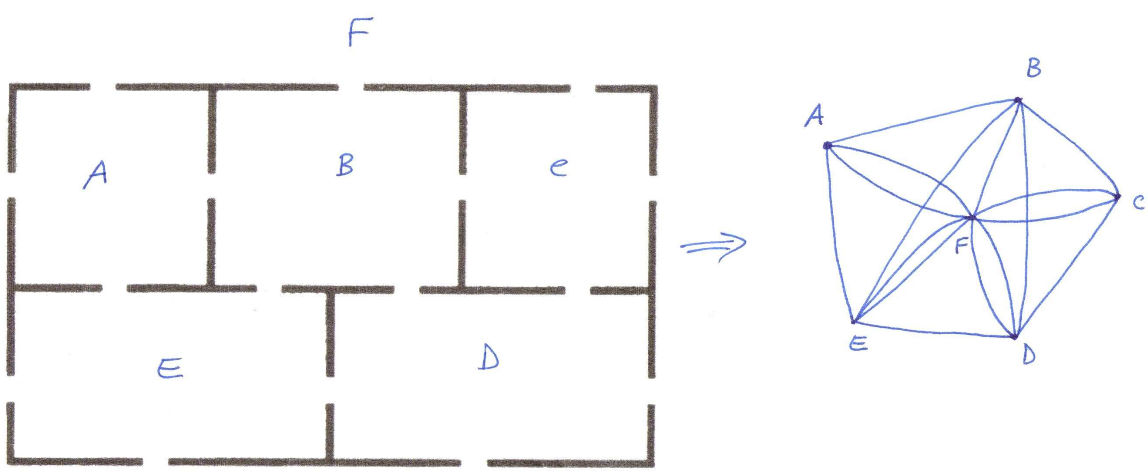

Figura 12: La risposta è negativa: ci sono 4 nodi dispari.

Il gioco del 15

Il gioco del quindici è un rompicapo classico inventato da Samuel Loyd (1841 - 1911) nel 1878. Il gioco consiste di una tabellina di forma quadrata, solitamente di plastica, divisa in quattro righe e quattro colonne (quindi 16 posizioni), su cui sono posizionate 15 tessere quadrate, numerate progressivamente a partire da 1. Le tessere possono scorrere in orizzontale o verticale, ma il loro spostamento è ovviamente limitato dall'esistenza di un singolo spazio vuoto. Lo scopo del gioco è riordinare le tessere dopo averle mescolate in modo casuale (la posizione da raggiungere è quella con il numero 1 in alto a sinistra e gli altri numeri a seguire da sinistra a destra e dall'alto in basso, fino al 15 seguito dalla casella vuota). In questo senso, la dinamica generale del gioco presenta delle evidenti analogie con quella del cubo di Rubik.

Loyd descrisse per la prima volta il suo fifteen puzzle (rompicapo del quindici) nel volume Sam Loyd's Cyclopaedia of 5000 Puzzles, Tricks and Conundrums, pubblicato postumo nel 1914 dal figlio (anche lui Samuel Loyd). Il gioco ebbe sin da subito grande successo, contribuendo alla fama del suo inventore, già rinomato enigmista e autore di altri giochi di successo.

Loyd mise in palio la cifra di mille dollari come premio per chi fosse riuscito a risolvere una versione del gioco identica a quella tradizionale, ma con i numeri 14 e 15 a posizioni invertite. Un premio che nessuno mai avrebbe potuto reclamare poiché, come l'autore sapeva benissimo, la soluzione del gioco partendo da una tale configuarazione è matematicamente impossibile. Il gioco del quindici è oggi considerato un solitario classico, un cosiddetto schiacciapensieri o rompicapo. È stato commercializzato da tantissime case editrici e in moltissime varianti. Molte edizioni uniscono l'idea originale con quella del puzzle, distribuendo sulle tessere un disegno che riappare correttamente solo quando gli stessi sono state riordinati correttamente. Esistono anche varianti con un numero di caselle (e quindi di tessere) differente. Molte versioni software sono disponibili per personal computer.

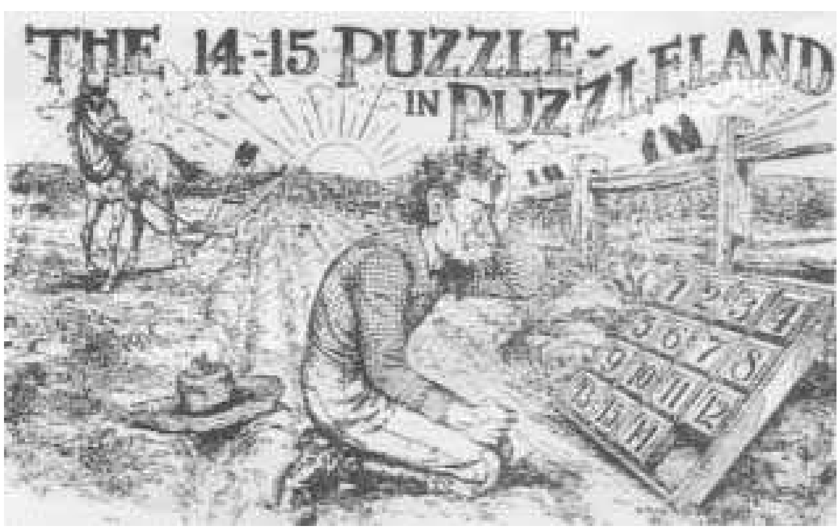

Figura 13: Gioco del 15.

Il gioco è risolubile solo per alcune configurazioni iniziali. Per stabilire se è risolubile è utile definire i concetti di inversione e di parità. Se la tessera contenente il numero i compare prima di n numeri minori di i allora chiamiamo questa situazione una inversione di ordine n e la chiamiamo n_i.

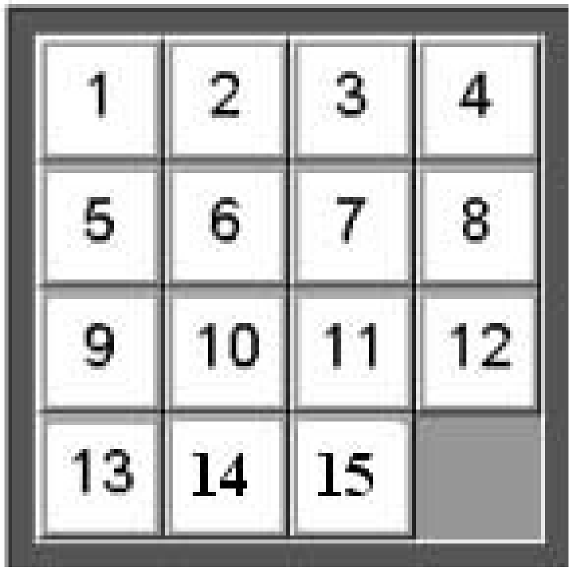

Figura 14: Gioco del 15.

Osservazione. I numeri vanno letti da destra a sinistra e dall'alto in basso come se fossero in una unica striscia.

Se definiamo $N = i(p)$ il numero di inversioni della permutazione di numeri che al momento compare nel gioco

$$N = \sum_{i=2}^{15} n_i$$

(la sommatoria deve partire da 2 perché non ci sono numeri minori di 1) N può essere pari o dispari;

- Se N è pari il gioco è risolvibile.
- Se N è dispari il gioco non è risolvibile

Figura 15: Gioco del 5.

Sezione aurea

La sezione aurea emerge in natura come risultato della dinamica di alcuni sistemi. È stato ritrovato, tra l'altro, nella struttura delle conchiglie, nella dimensione delle foglie, nella distribuzione dei rami negli alberi, nella disposizione dei semi di girasole, e nel corpo umano.

Nell'antichità, gli egizi e i greci conoscevano già questo numero. Lo avevano scoperto in natura, e lo utilizzarono nell'arte, in architettura e nella filosofia. I greci pensavano che il rapporto aureo rappresentasse la proporzione "ideale" tra parti del corpo come il viso e il torso, o tra gli arti e il corpo intero. La sezione aurea fu perciò usata come guida per riprodurre accuratamente il corpo umano nella pittura e nella scultura.

Vista la sua diffusione in natura, veniva considerato esteticamente piacevole e di buon auspicio, perciò veniva usato anche per le creazioni umane. Diversi dipinti sono stati composti secondo la sezione aurea; edifici, giardini e monumenti sono stati progettati con rettangoli aurei (per esempio alcune teorie, non da tutti condivise, ne attibuiscono l'applicazione a il Partenone di Atene e alla Grande Piramide a Giza). Anche il pentagramma caro ai pitagorici contiene la sezione aurea.

E' curioso notare che

$$\phi = 1,61803398875 \quad ; \quad \frac{1}{\phi} = 0.61803398875 \quad ; \quad \phi^2 = 2.61803398875$$

$$\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}} \quad ; \quad \phi = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}$$

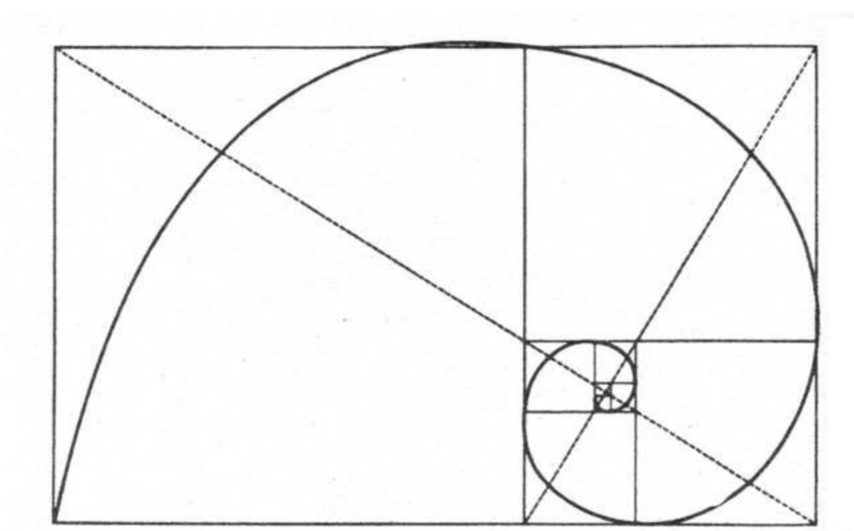

Figura 16: Spirale logaritmica a partire dal rettangolo aureo.

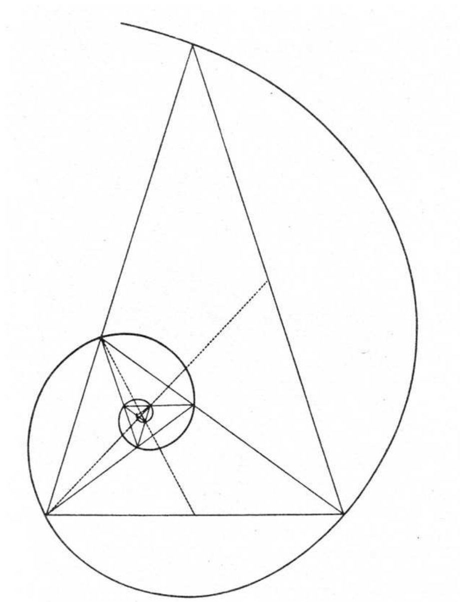

Figura 17: Spirale logaritmica a partire dal triangolo aureo (angoli = $72°$, $72°$, $36°$).

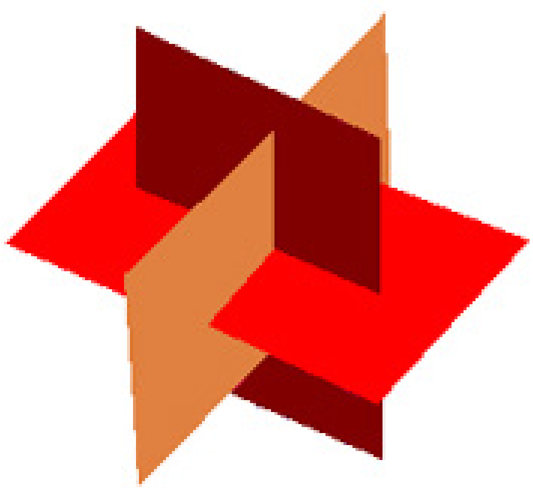

Figura 18: Rettangoli aurei: a partire da queste intersezioni si possono costruire l'icosaedro e il dodecaedro.

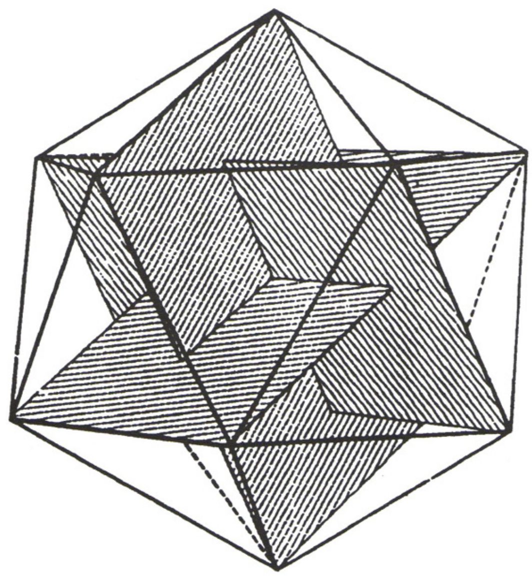

Figura 19: Rettangoli aurei e l'icosaedro: i vertici dei rettangoli sono i vertici del solido a 20 facce.

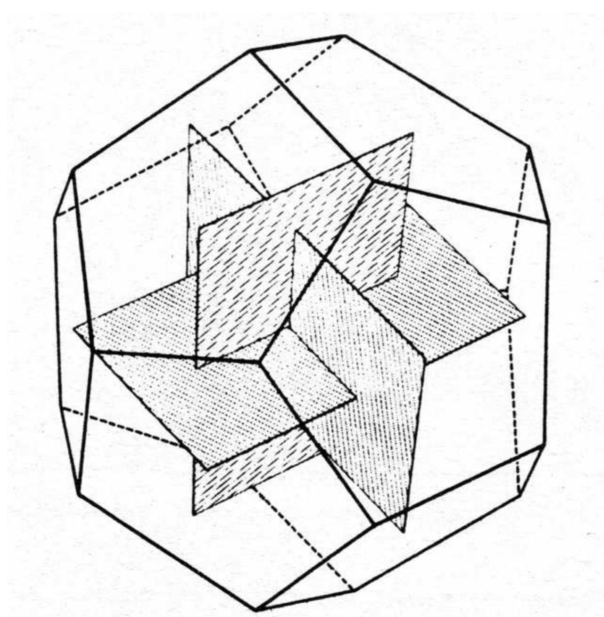

Figura 20: Rettangoli aurei e il dodecaedro: i vertici dei tre rettangoli sono i centri delle 12 facce.

Somme di potenze e geometria.

Un esempio di applicazione della serie geometrica è la seguente: considerato un quadrato di lato unitario, costruiamo una successione di quadrati e rettangoli così fatta:

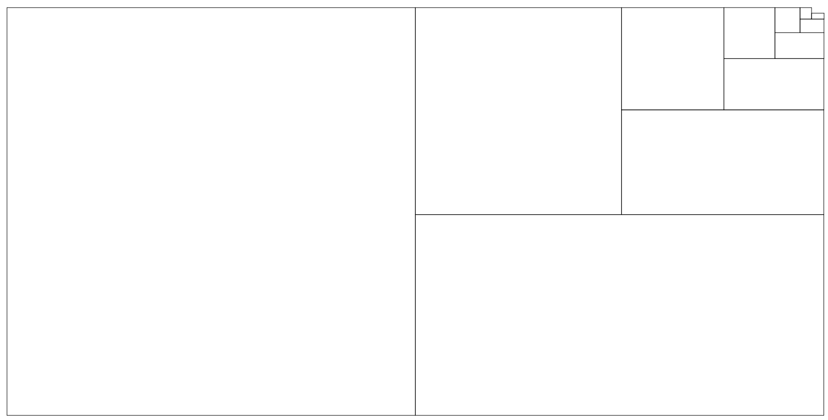

Figura 21: La successione di rettangoli e quadrati è limitata dal rettangolo esterno di area 2.

La somma delle aree può essere così scritta:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\dots$$

osservando che ogni frazione è una potenza di $\frac{1}{2}$ troviamo:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\dots=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\dots=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\,.$$

La somma infinita delle aree è quindi pari all'area del rettangolo esterno: quest'ultimo, in pratica, "viene riempito" dalla successione considerata.

Osservazione 1. E' possibile rivedere la somma delle aree osservando che l'omotetia di centro $Q=(2\,;1)$ (l'origine è presa nel vertice in basso a sinistra) e rapporto $\frac{1}{2}$ fa corrispondere (rispettivamente) i quadrati e i rettangoli (le aree sono in progressione geometrica di ragione $\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$).

Se analizziamo la figura formata dal quadrato e dal rettangolo a lui adiacente (di area $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$), la somma delle aree può essere riscritta nel modo (del tutto equivalente al precedente):

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{64}\cdot\frac{3}{2}+\dots=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\dots\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=2\,.$$

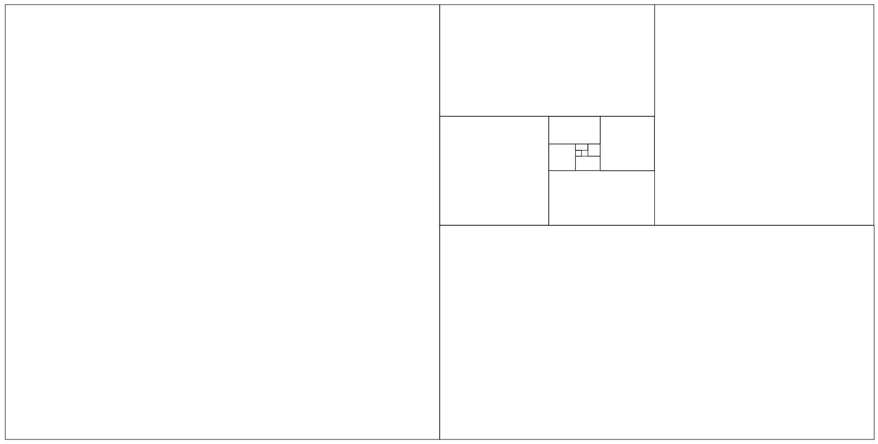

Figura 22: La successione in questo caso converge ad un punto interno.

Prendendo in considerazione l'estremo sinistro inferiore dei quadrati 1, 3, 5, 7,...

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \cdots = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

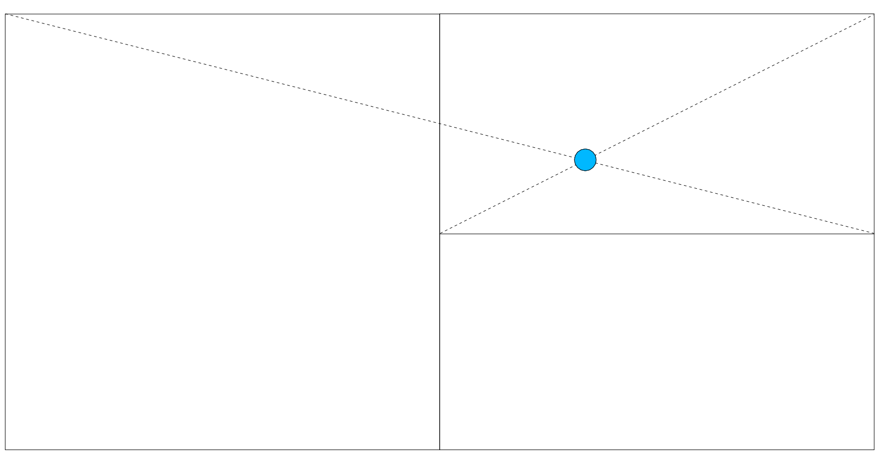

Figura 23: Costruzione del punto limite.

Numeri poligonali

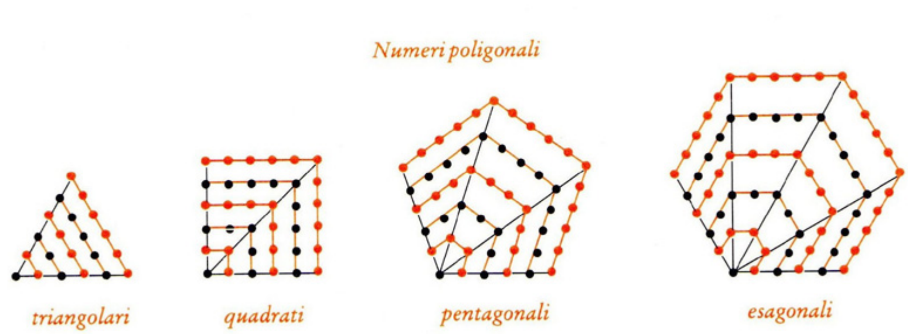

Figura 24: Numeri poligonali.

L'n-esimo numero k-gonale è

$$n\,\frac{(k-2)\cdot n+4-k}{2}$$

Un numero pentagonale è uguale al proprio lato aumentato de triplo del triangolare che lo precede. Un numero pentagonale è la somma del triangolare dello stesso ordine ABC e del doppio del triangolare antecedente.

Un numero esagonale è uguale al proprio lato aumentato di quattro volte il triangolare dell'ordine precedente. Si osserva allo stesso modo che un esagonale è costituito dal triangolare ABP dello stesso ordine, aumentato del triplo del triangolare che lo precede.

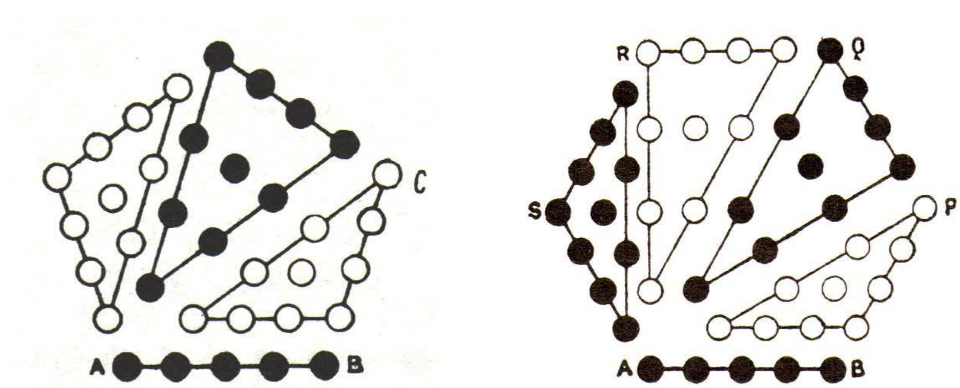

Figura 25: Suddivisione di numeri pentagonali ed esagonali.

L'n-esimo numero piramidale si ottiene in questo modo:

$$1^2+2^2+3^2+4^2\cdots+n^2=\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}=\frac{1}{3}\,n^3+\frac{1}{2}\,n^2+\frac{1}{6}\,n$$

Vale la relazione:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\alpha_1\,n^3+\alpha_2\,n^2+\alpha_3\,n\;;$$

i coefficienti possono essere ricavati risolvendo il sistema lineare:

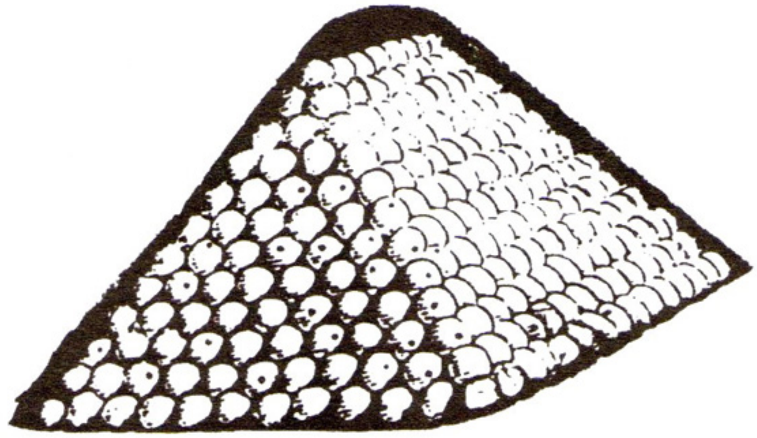

Figura 26: Quante sfere ci sono?

$$
\begin{cases}
1^2 & = \alpha_1 \cdot 1^3 + \alpha_2 \cdot 1^2 + \alpha_3 \cdot 1 \\
1^2 + 2^2 & = \alpha_1 \cdot 2^3 + \alpha_2 \cdot 2^2 + \alpha_3 \cdot 2 \\
1^2 + 2^2 + 3^2 & = \alpha_1 \cdot 3^3 + \alpha_2 \cdot 3^2 + \alpha_3 \cdot 3
\end{cases}
$$

e quindi:

$$
\begin{bmatrix} 1^3 & 1^2 & 1 \\ 2^3 & 2^2 & 2 \\ 3^3 & 3^2 & 3 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}
$$

E' possibile procedere anche nel modo seguente: dalla relazione

$$(k+1)^3 - k^3 = 3\,k^2 + 3\,k + 1$$

sommando per $k = 1, \dots n$ si ha:

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - k^3 = (n+1)^3 - 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} (3\,k^2 + 3\,k + 1) = (n+1)^3 - 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} 3\,k^2 + \sum_{k=1}^{n} 3\,k + \sum_{k=1}^{n} 1 = (n+1)^3 - 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} 3\,k^2 = (n+1)^3 - 1 - \sum_{k=1}^{n} 3\,k - \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$3 \sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^3 - 1 - \left(3\,\frac{n(n+1)}{2} + n \right) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)^3 - 1}{3} - \left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n}{3} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}\,.$$

Triangolo di Tartaglia e numeri di Fibonacci

E' curioso notare come il triangolo di Tartaglia (o di Pascal) abbia a che fare con i numeri di Fibonacci:

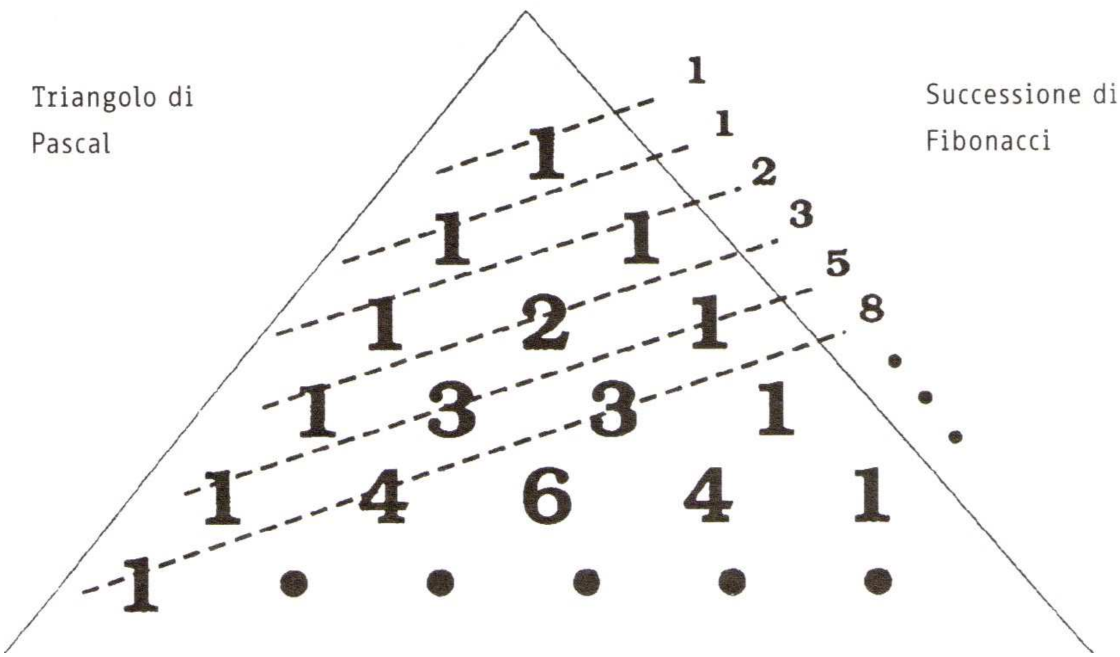

Figura 27: Relazione tra i numeri del triangolo di Tartaglia e i numeri di Fibonacci.

Per dimostrare la proprietà indicata dalla figura basta applicare la formula:

$$\binom{n}{h-1} + \binom{n}{h} = \binom{n+1}{h}$$

Curiosità aritmetiche

Gli sviluppi decimali offrono molti spunti didattici; si potrebbe fare un elenco lunghissimo di esempi. Riporto qui due casi numerici interessanti.

Guardando le cifre decimali del numero $\frac{1}{49}$

$$\frac{1}{49} = 0,020408163265306122244...$$

si nota che nelle prime posizioni ci sono le potenze di 2; è una coincidenza? Come mai poi appare 65, mentre ci aspettavamo 64?

Andando a calcolare la somma infinita

$$\frac{2}{10^2} + \frac{4}{10^4} + \frac{8}{10^6} + \frac{16}{10^8} + \dots$$

si scopre che:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{10^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{50}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{50}} - 1 = \frac{1}{49}$$

La ragione di quel 65 sta nel fatto che la prima potenza di 2 a tre cifre è 128 e la frazione $\frac{128}{10^{12}}$, sommandosi alle altre, fa aumentare di una unità il 64 precedente.

Questa osservazione fa capire come è possibile generare frazioni che ammettano uno sviluppo decimale simile. Ad esempio, si verifica facilmente che

$$\frac{3}{997} = 0,0030090270812437311 93...$$

Per dare un senso pratico alla relazione

$$0,\overline{9} = 1$$

può essere interessante pensare al seguente problema:

Una fontana ha infiniti rubinetti: il primo impiega 10 ore per riempire 9 fontane, il secondo ne impiega 100 per riempirne 9, il terzo 1000 per riempirne 9, etc. Quanto tempo impiegheranno a riempire la fontana tutti assieme?

Il problema si risolve sommando le frazioni:

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots = 0,9 + 0,09 + 0,009 + \cdots = 0,\overline{9} = 1$$

Problemi geometrici

Ci sono tantissimi problemi geometrici non standard che possono essere portati in classe.

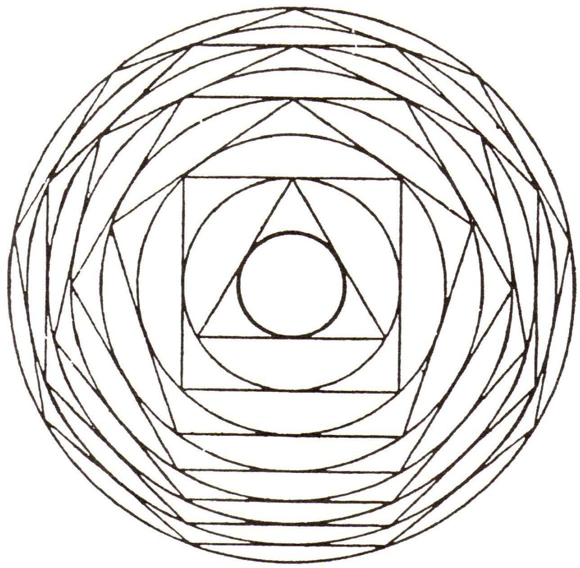

Figura 28: Sembrerebbe che i raggi debbano aumentare senza limiti, ma in realtà essi si avvicinano ad un limite finito.

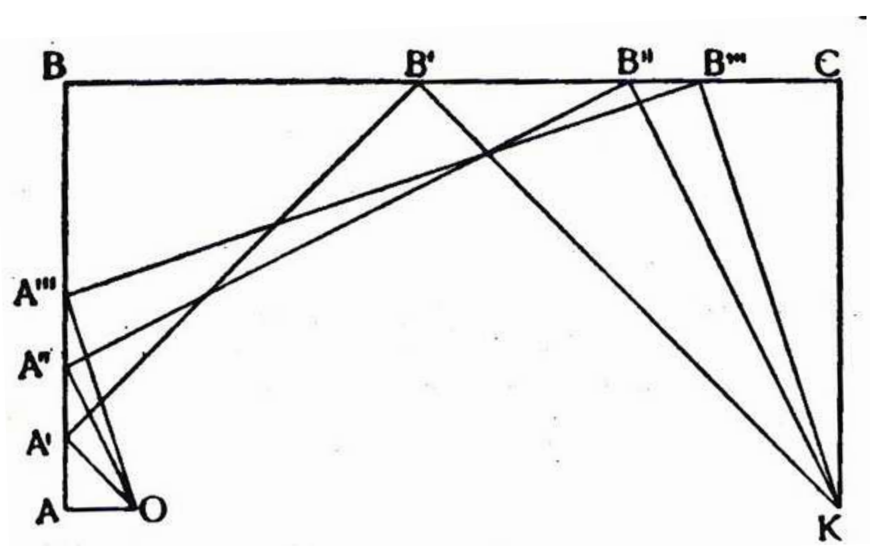

Figura 29: Sia $\overline{OA} = 1$, $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 11$ e $\overline{CK} = 6$; i tre segmenti AA', AA'' e AA''' rappresentano le tre radici dell'equazione $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

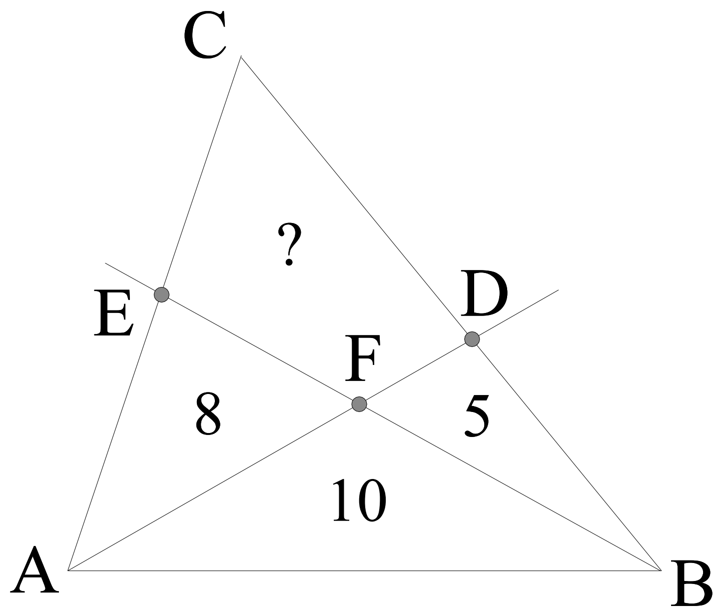

Figura 30: L'area incognita è univocamente determinata; l'area ABF deve essere maggiore della media geometrica dei triangoli AEF e BDF.

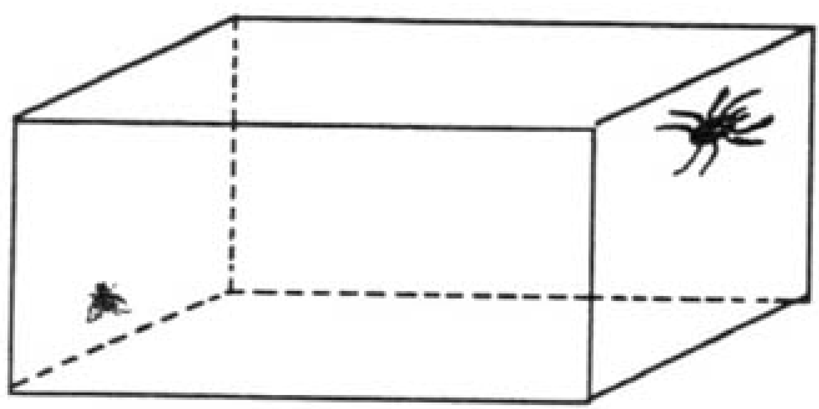

Figura 31: Qual è la distanza più breve che deve percorrere il ragno per raggiungere la mosca?

Il problema dei travasi

Come è possibile dividere in parti uguali 12 litri di vino avendo a disposizione una tanica da 12 litri e due recipienti da 5 e 9 litri?

Questo problema può essere agevolmente risolto in modo geometrico:

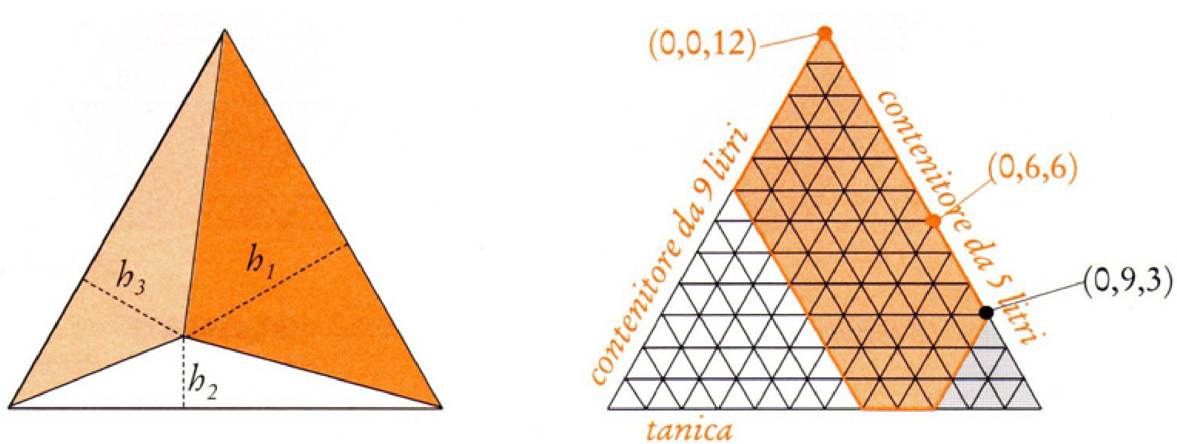

Figura 32: Proprietà dei triangoli equilateri: la somma delle distanze dai lati di un punto interno qualsiasi è costante ed è uguale all'altezza del triangolo ($= \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot$ lato).

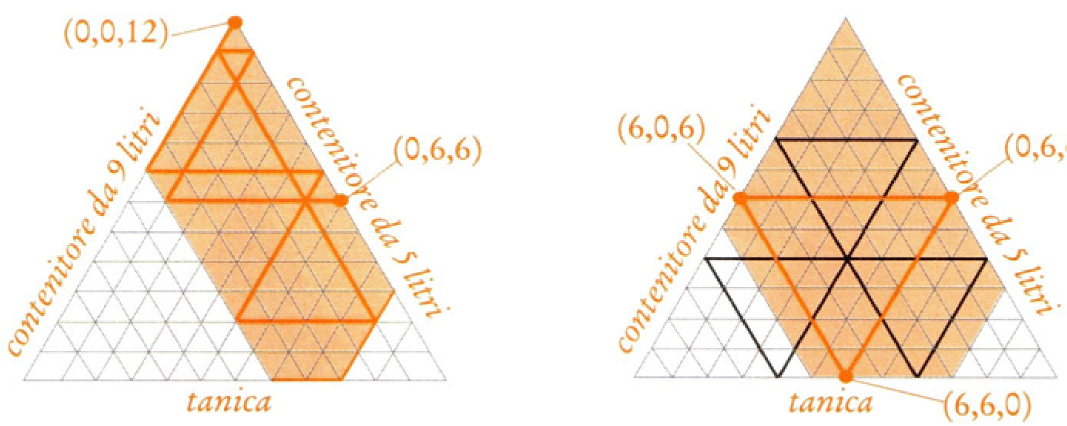

Figura 33: Le linee indicano le operazioni da fare con i tre recipienti.