

Corso di Perfezionamento "Strategie didattiche per promuovere un atteggiamento positivo verso la matematica e la fisica", a.a. 06/07

Imparare ad usare gli arnesi della matematica: analisi di un'attività didattica a partire da una batteria di problemi

prof. Leila d'Angelo, Liceo Scientifico "Ulisse Dini" di Pisa

Nella classe prima del liceo scientifico ho incentrato la programmazione sul tema della dimostrazione. Penso che il significato di dimostrazione sia molto importante, non solo relativamente all'insegnamento della matematica, ma anche come educazione ad un atteggiamento critico nell'apprendimento e nelle relazioni con gli altri. Sono anche persuasa che non deve essere solo la geometria l'ambito in cui si lavora con il dimostrare.

Le prime attività che ho proposto, in cui si intrecciano calcolo letterale, dimostrare, linguaggio sono quelle proposte da Gallo, come "Tante scritture per un numero" in cui il numero 24 si scrive come 2×12 per mettere in evidenza che è pari, $23+1$ per mettere in evidenza che è un successivo, $4 \times 5 + 4$ per mettere in evidenza che non è multiplo di 5 etc...Da qui si costruiscono le espressioni che permettono di descrivere sinteticamente la proprietà comune ad un insieme di numeri: i numeri pari si rappresentano con $2 \times n$, i dispari $2 \times n + 1$, i quadrati sono n^2 , etc. Possiamo allora fare delle piccole dimostrazioni, a patto di saper manipolare le espressioni usando le proprietà delle operazioni: la differenza tra i quadrati di due interi consecutivi sembra essere un numero dispari; è vero sempre? e la differenza tra i cubi? Cosa posso dire della somma dei quadrati di tre naturali consecutivi?

E poi dei piccoli problemi, attraverso i quali si può imparare come ciò che sembra evidente è invece falso e quindi la fase di congettura deve essere seguita dalla ricerca di una dimostrazione: se aumento di una unità i lati del rettangolo $a \times b$, come aumenta la sua area? Aumento di 1 la base di un quadrato e diminuisco di 1 la sua altezza, come cambia l'area?

Successivamente gli allievi hanno imparato ad usare le equazioni di primo grado per modellizzare problemi.

E' a questo punto che ho sottoposto alla classe un'attività proposta su "La matematica del cittadino 2003" sulla nozione di media.

Il 2 marzo agli allievi ho consegnato la batteria di problemi nell'allegato 1 chiedendo loro di discutere in gruppo il primo problema.

Inutile dire che unanimemente tutti hanno calcolato la media aritmetica delle due velocità. Nella loro esperienza passata "media" ha sempre significato "media aritmetica" e non sarebbe stato ragionevole aspettarsi che, di loro iniziativa, facessero una verifica assegnando un valore qualsiasi allo spazio percorso per verificare se il loro dato, in un caso particolare, risultava coerente. Questa verifica l'abbiamo fatta insieme ed abbiamo quindi riconosciuto che "velocità media" non è la stessa cosa che "media (aritmetica) delle velocità". Ho quindi mostrato loro come lavorare sulla equazione $v=s/t$ per scoprire che la velocità media che si cercava coincide con la media armonica.

In una lezione successiva, il 7 marzo, abbiamo discusso un problema in cui al posto delle velocità c'erano densità (allegato 2). Un paio di allievi hanno riconosciuto lo stesso modello.

Nel compito su calcolo letterale ed equazioni del 14 marzo ho riproposto il problema delle velocità, modificando però il rapporto degli spazi percorsi nelle due fasi (Allegato 3). Averlo segnalato come l'esercizio difficile del compito non è servito ad impedire che i più applicassero senza esitazione il modello che aveva funzionato in classe.

Gli allievi che arrivano alle superiori, anche quando sono 'bravi' come questi del liceo scientifico,

hanno ben radicata l'idea che un problema si risolve sfoderando la formula giusta, e basta; la fase di esplorazione, in cui il problema viene tradotto in un modello matematico e quella di verifica, in cui si cerca di valutare la coerenza del risultato con i dati, viene sistematicamente trascurata. Questo è quindi tutto lavoro da fare ex-novo per il docente del biennio.

Il 19 marzo abbiamo discusso il problema del compito ed il 21 marzo gli allievi hanno avuto due ore di tempo per discutere, in gruppo, gli altri problemi della batteria.

Il problema delle macchine in serie è stato interessante per capire quanto, anche in un gruppo selezionato di allievi, la lettura del testo possa presentare difficoltà. Gli allievi che non sapevano cosa significasse che le macchine fossero in serie non se ne sono preoccupati, così come non si sono preoccupati di saper tradurre operativamente il concetto di rendimento. Un allievo, nello spiegare il significato che dava ai due termini, ha usato l'espressione "più o meno": questo allievo ritiene che conoscere "più o meno" il significato di un'espressione che caratterizza l'oggetto del problema sia sufficiente per determinarne il modello. E' il *verbalismo*, l'abitudine al discorso che resta *chiacchera* senza mai diventare *ragionamento*. L'insegnante di matematica ha molto lavoro da fare per combattere il verbalismo.

Il 26 marzo abbiamo discusso un problema in cui tre macchine lavorano in parallelo invece che in serie.

Ho poi chiesto di calcolare il rendimento complessivo del sistema delle macchine in serie nel caso in cui il rendimento della prima macchina viene migliorato di 5 punti percentuali e successivamente nel caso in cui è il rendimento della terza macchina ad essere migliorato di 5 punti percentuali. Alla domanda perché migliorare il rendimento della terza macchina fosse più efficace che migliorare quello della prima, due allievi hanno risposto: a causa della posizione della macchina. E' stata l'occasione per notare come, ancora una volta, un pregiudizio prevalga sull'informazione che è lì, scritta chiaramente: il rendimento del sistema è il prodotto dei rendimenti delle macchine, il prodotto è commutativo e quindi la posizione delle macchine non è determinante..

Nel problema " Si può essere promossi avendo preso zero?" gli allievi hanno fatto fatica a comprendere la consegna: che "media" significhi media aritmetica è un'idea troppo radicata per poter pensare di modificarla in due lezioni. Gli allievi quindi hanno interpretato la richiesta come se si dovesse cercare il livello della sufficienza, al di sotto del quale bocciare, dando per scontato che si dovesse usare la media aritmetica. Hanno così stabilito che $(0+15+15+15) : 4$ fosse il discriminante tra promozione e bocciatura.

Per chiarire che cosa chiedesse il problema, gli ho suggerito di fingere di essere una commissione di matematici incaricati da una scuola di inventare un formula per poter assegnare i voti all'esame finale secondo le regole stabilite dalla stessa scuola: bocciare chi prende zero in una materia ma valorizzare le capacità di chi ha buoni risultati in alcune materie anche se, in altre, ha cattivi risultati purché diversi da zero e, naturalmente, assegnare lo stesso voto a chi ha votazione uguale in tutte le discipline.

Quando abbiamo discusso il problema dei crediti, che gli allievi avevano risolto dichiarando: i crediti sono un dato superfluo, un'allieva ha osservato: "Ma lei non ce lo ha detto che voleva la media pesata". In questo caso emerge la concezione di soluzione di un problema come *fare quello che vuole quella *#@!% dell'insegnante*. Come nel problema precedente, non era chiara la consegna, cioè *inventare la formula che risolvesse il problema del committente*.

Non è evidentemente una consegna banale, che si può sottointendere; è il lavoro che vorrei fare con i miei allievi e che mi piacerebbe avessero già fatto negli anni precedenti: vedere il lavoro del matematico come quello di un artigiano che costruisce utensili. Il committente dice qual è il suo problema ed il matematico, con gli arnesi che ha (numeri, operazioni, figure,...) costruisce l'utensile giusto.

Nell'allegato 1bis i problemi sono riformulati secondo le indicazioni emerse dal lavoro in classe.

Valutazione dell'esperienza

I problemi si sono rivelati difficili per gli allievi, anche per quelli *bravi*. In alcuni casi la consegna non era espressa in modo adeguato alle loro possibilità, in altri casi è emersa la mancanza di abitudine a gestire una situazione problematica: la congettura iniziale diventa immediatamente la soluzione senza che si senta la necessità di fare un controllo.

A questo proposito vorrei citare un esperimento che ho tentato nella classe seconda, sollecitata dal cap.6 di Zan, *Difficoltà in matematica*, Springer, Milano 2007. Ho chiesto agli allievi di formare delle coppie a ciascuna delle quali ho assegnato due problemi, due dimostrazioni non banali per loro ma nemmeno impossibili. A turno ciascun membro della coppia doveva cercare la dimostrazione del problema scelto pensando ad alta voce mentre il compagno annotava i suoi pensieri. Il tentativo di soluzione durava 20 minuti ed ogni 5 minuti l' allievo che registrava la *performance* del compagno segnava il passaggio del tempo.

Mi proponevo di verificare quanto tempo ciascun allievo avesse dedicato ai vari processi di controllo nella soluzione del problema. E' emersa con chiarezza la mancanza della fase di verifica: non appena l'allievo ritiene di aver conseguito un risultato, trovato una risposta parziale, l'assume subito come corretta senza tentare nessuna verifica.

La prova di verifica proposta agli allievi alla fine dell'attività è nell'allegato 4.

I primi due esercizi hanno lo scopo di verificare la mera conoscenza delle definizioni di media mentre il quarto esercizio richiede che si applichi opportunamente la media aritmetica.

Con il terzo esercizio mi proponevo di verificare se avesse dato dei risultati il lavoro fatto sul risolvere problemi cercando l'espressione o l'equazione modello da manipolare opportunamente. La classe è quel che si dice una bella classe, composta da allievi che all' inizio della prima conoscevano già molto calcolo letterale. L'esercizio 3i è stato svolto correttamente solo da 9 allievi su 26 mentre gli altri non hanno compreso la consegna; gli esercizi 3ii e 3iii hanno avuto ancora meno successo. Gli allievi hanno dato risposte spesso errate basate su considerazioni varie ma nessuno ha fatto riferimento all'espressione, nemmeno per fare una verifica con i dati numerici.

Ho individuato due errori in questa attività: i problemi debbono essere riformulati (vedi allegato 1 bis) rendendo più chiara la consegna e gli allievi debbono essere invitati ad occuparsi di un problema alla volta facendo subito seguire la discussione e la verifica con l'insegnante.

Allegato 1.

Problemi

a) Un viaggio in aereo

Un aereo viaggia da Roma a New York. All'andata le correnti favorevoli permettono all'aereo di viaggiare alla velocità di crociera di 932 Km/h; al ritorno la velocità è, invece, di 856 Km/h. Qual è la velocità media dell'aereo nell'intero percorso andata-ritorno?

b) In un processo produttivo

In un ciclo di lavorazione tre apparecchiature lavorano in serie: la prima macchina ha un rendimento del 90 % , la seconda dell'80% , la terza del 30%. Qual è il rendimento medio complessivo?

c) Una pagella meritevole?

Uno studente nella pagella del primo quadrimestre ha riportato i seguenti voti:

Italiano 7

Storia 8

Geografia 7

Lingua inglese 6

Scienze 5
Matematica 4
Educazione Fisica 9

Il padre gli ha promesso un regalo se la media dei suoi voti fosse stata superiore al 7.
Lo studente otterrà il regalo?

e) Borsa di studio: sì o no?

Uno studente universitario iscritto al corso di laurea in Matematica ha superato durante il primo anno i seguenti esami riportando le seguenti votazioni:

| Esame | Punteggio in trentesimi | Crediti |
|---------------------------|-------------------------|---------|
| Laboratorio di Matematica | 27 | 9 |
| Analisi Matematica | 28 | 12 |
| Geometria | 24 | 6 |
| Algebra | 27 | 6 |
| Calcolo delle probabilità | 26 | 9 |
| Fisica generale | 25 | 9 |
| Lingua inglese | 30 | 3 |
| Fondamenti di Informatica | 28 | 3 |
| Abilità relazionali | 30 | 3 |

Secondo l'ordinamento universitario ad ogni esame è associato un numero di crediti: ciascun credito corrisponde a circa 25 ore di lezione-tutoraggio-impegno individuale dello studente. Ogni anno lo studente è tenuto ad accumulare 60 crediti.

Lo studente accede ad una borsa di studio se ha conseguito una media superiore a 27/30.
Ottendrá il nostro studente la borsa di studio?

f) Si può essere promossi avendo preso zero?

In una prova multidisciplinare di Storia, Inglese, Matematica, Diritto, gli studenti vengono valutati con un punteggio da 0 a 15 per ogni materia. Il voto finale è dato dalla media dei quattro punteggi parziali. La prova non si considera superata se uno studente prende 0 punti in una delle materie. Quale valore medio consente di rappresentare adeguatamente questo modo di valutare?

g) Quale punteggio per un premio?

In una gara di matematica i 21 studenti di una classe hanno riportato i seguenti punteggi:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| studente | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| punteggio | 40 | 41 | 55 | 90 | 85 | 73 | 42 | 60 | 77 | 88 | 55 | 60 | 77 | 55 | 80 | 20 | 90 | 70 | 45 | 73 | 81 |

il professore decide di assegnare un premio a tutti gli studenti con punteggio superiore a quello conseguito dal 50% degli stessi. Quale punteggio deve superare uno studente per ottenere il premio?

Allegato 1bis.

Una possibile correzione nella consegna di alcuni problemi dell'allegato 1, tenuto conto delle

difficoltà incontrate dagli allievi.

a) Un viaggio in aereo

i) Un aereo viaggia da Roma a New York. All'andata le correnti favorevoli permettono all'aereo di viaggiare alla velocità di crociera di 932 Km/h; al ritorno la velocità è, invece, di 856 Km/h.

Qual è la velocità media dell'aereo nell'intero percorso andata-ritorno?

ii) *Dopo aver risolto il problema cerca sull'atlante qual è la distanza via aereo tra Roma e New York e calcola 1) il tempo impiegato all'andata e al ritorno, 2) il tempo complessivo, 3) lo spazio complessivo. Verifica se i dati 2) e 3) sono compatibili con il valore della velocità media che hai determinato.*

iii) *Che risultati ha dato la verifica al punto ii)? Quali sono i tuoi commenti?*

b) In un processo produttivo

In un ciclo di lavorazione tre apparecchiature lavorano in serie: la prima macchina ha un rendimento del 90 % , la seconda dell'80% , la terza del 30%.

Discuti con i compagni cosa significa "alcune macchine lavorano in serie" e che cosa significa "rendimento di una macchina" .

Qual è il rendimento medio complessivo?

c) Una pagella meritevole?

Uno studente nella pagella del primo quadrimestre ha riportato i seguenti voti:

| | |
|-------------------|---|
| Italiano | 7 |
| Storia | 8 |
| Geografia | 7 |
| Lingua inglese | 6 |
| Scienze | 5 |
| Matematica | 4 |
| Educazione Fisica | 9 |

Il padre gli ha promesso un regalo se la media dei suoi voti fosse stata superiore al 7.

Lo studente otterrà il regalo?

e) Borsa di studio: sì o no?

Uno studente universitario iscritto al corso di laurea in Matematica ha superato durante il primo anno i seguenti esami riportando le seguenti votazioni:

| Esame | Punteggio in trentesimi | Crediti |
|---------------------------|-------------------------|---------|
| Laboratorio di Matematica | 27 | 9 |
| Analisi Matematica | 28 | 12 |
| Geometria | 24 | 6 |
| Algebra | 27 | 6 |
| Calcolo delle probabilità | 26 | 9 |
| Fisica generale | 25 | 9 |
| Lingua inglese | 30 | 3 |
| Fondamenti di Informatica | 28 | 3 |
| Abilità relazionali | 30 | 3 |

Secondo l'ordinamento universitario ad ogni esame è associato un numero di crediti: ciascun credito corrisponde a circa 25 ore di lezione-tutoraggio-impegno individuale dello studente. Ogni anno lo studente è tenuto ad accumulare 60 crediti.

~~Lo studente accede ad una borsa di studio se ha conseguito una media superiore a 27/30.
Otterrà il nostro studente la borsa di studio?~~

Cerca una formula per calcolare la media dei voti di ciascuno studente che tenga conto del diverso valore in crediti degli esami.

f) Si può essere promossi avendo preso zero?

Nel college "Ulisse Dini" di Dublino a fine anno c'è una prova multidisciplinare di Storia, Inglese, Matematica, Diritto, in cui gli studenti vengono valutati con un punteggio da 0 a 15 per ogni materia. Il voto finale è dato dalla media dei quattro punteggi parziali. La prova non si considera superata se uno studente prende 0 punti in una delle materie. Cerca una formula per la media che permetta: i) di valorizzare gli studenti che hanno ottenuto buoni voti in alcune discipline pur avendo ottenuto un punteggio basso ma diverso da zero in altre; ii) che sia uguale a zero se il punteggio di almeno una disciplina è zero; iii) che, nel caso lo studente abbia lo stesso voto v in tutte le materie, sia uguale a v .

g) Quale punteggio per un premio?

In una gara di matematica i 21 studenti di una classe hanno riportato i seguenti punteggi:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| studente | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| punteggio | 40 | 41 | 55 | 90 | 85 | 73 | 42 | 60 | 77 | 88 | 55 | 60 | 77 | 55 | 80 | 20 | 90 | 70 | 45 | 73 | 81 |

il professore decide di assegnare un premio a tutti gli studenti con punteggio superiore a quello conseguito dal 50% 70% degli stessi. Quale punteggio deve superare uno studente per ottenere il premio?

Allegato 2:

Variazioni su alcuni problemi dell'allegato 1

Un artigiano, che fabbrica braccialetti, ha fuso 100 g di ottone di densità 7.70g/(cm cubi) con 100 g di ottone di densità 7.94 70g/(cm cubi) . Calcola la densità del metallo ottenuto dalla fusione.

La 1° I si reca in gita in Sardegna. All'andata viaggia in aliscafo alla velocità media di 300 Km/h. Al ritorno prende un traghetto sgangherato che viaggia, sulla stessa rotta dell'aliscafo, alla velocità media di 10 Km/h. Qual è stata la velocità media di tutto il viaggio?

Variazioni sul problema macchine: Se il rendimento della prima macchina aumenta fino al 95%, di quanto aumenta il rendimento del sistema? Se invece il rendimento della terza macchina aumenta fino al 35%, di quanto aumenta il rendimento del sistema? E il rendimento medio?

Gigia ha un carrettino per vendere il gelato sulle spiagge su cui sono montate tre gelatiere, per produrre tre diversi gusti di gelato. Il rendimento delle tre gelatiere è, rispettivamente, 90%, 80% e 30%. Se Gigia fa lavorare le tre gelatiere per lo stesso tempo e distribuisce equamente tra di esse la materia prima, qual è il rendimento complessivo del carrettino? E qual è il rendimento medio delle gelatiere?

Se il rendimento della prima gelatiera aumenta fino al 95%, di quanto aumenta il rendimento del carrettino? Se invece il rendimento della terza gelatiera aumenta fino al 35%, di quanto aumenta il

rendimento del carrettino? E il rendimento medio?

Alla fine dell'anno i docenti di matematica del liceo musicale di Castel sul Monte assegnano una prova comune a tutte le classi prime. La preside vorrebbe calcolare il voto medio su tutte le prove, ma ha disposizione solo i seguenti dati:

1°A voto medio 6,5 numero degli alunni 28

1°B voto medio 7,3 numero degli alunni 25

1°C voto medio 5,9 numero degli alunni 27

1°D voto medio 8,0 numero degli alunni 30

Sono sufficienti questi dati? Fornisci la soluzione del problema della preside.

Allegato 3:

Gigia si sta allenando per una gara automobilistica. Ieri ha fatto alcuni giri di pista alla velocità media di 200 Km/h. Oggi, non solo ha percorso il doppio dei giri di ieri, ma la sua velocità media è stata di 230 Km/h. Calcola la velocità media di Gigia sul totale dei giri fatti nelle due giornate.

Allegato 4

Prova di verifica

1)Scrivi le definizioni di media aritmetica, media geometrica, media armonica, mediana, moda tra n dati.

2) Considera i seguenti cinque dati: 3,5, 2, 4, 2.
Calcolane la media armonica e la moda.

3) Nella grande fabbrica di gelati di Gigia i cornetti sono prodotti da un sistema di tre macchine disposte tra di loro in una combinazione di serie e parallelo.

Nella tabella è espresso il rendimento del sistema a partire dal rendimento delle singole macchine:

| | |
|-------------|------------|
| | rendimento |
| 1° macchina | r |
| 2° macchina | s |
| 3° macchina | t |
| sistema | $(rs+t)/2$ |

i) Calcola il rendimento del sistema se $r=70\%$, $s=25\%$, $t=40\%$.

ii) Se $r=40\%$, $s=25\%$, $t=70\%$ il rendimento cambia? Puoi affermarlo anche senza fare calcoli? Perché?

iii) Gigia ha la possibilità di sostituire una sola macchina con una che ha un rendimento maggiore del 5%. Quale macchina le conviene sostituire? Perché?

iv)* Prova a dedurre come sono disposte tra loro le macchine dalla formula del rendimento del sistema.

4) Gigia è stata una pattinatrice su ghiaccio. Nella sua carriera ha partecipato a due gare alle Olimpiadi, cinque gare ai Campionati Italiani e tre gare agli Europei. Alle Olimpiadi il punteggio medio ottenuto in ogni gara è stato $7/10$, mentre nei Campionati Italiani ha avuto una media di $8/10$ ed agli Europei di $8,5/10$. Qual è stato il punteggio medio di Gigia in tutta la sua carriera?

| | | | | | | | |
|-----------|---|---|----|-----|------|------|---|
| esercizio | 1 | 2 | 3i | 3ii | 3iii | 3iv* | 4 |
| punteggio | 2 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |