Approccio alla geometria sintetica e al concetto di funzione con il software Cabri

Pisa 13 Dicembre 2006

Introduzione alla dimostrazione in geometria e al concetto di funzione e all'idea di grafico con supporto del software di geometria dinamica Cabri

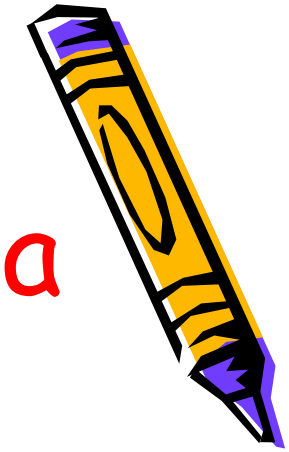
Sperimentazioni nate dall'esperienza del Gruppo di Ricerca Didattica dell'Università di Pisa coordinate dalla professoressa Maria Alessandra Mariotti

Pisa 13 Dicembre 2006

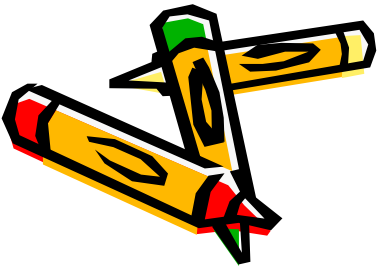
CABRI

Software aderente al mondo euclideo, in particolare al mondo delle costruzioni con riga e compasso

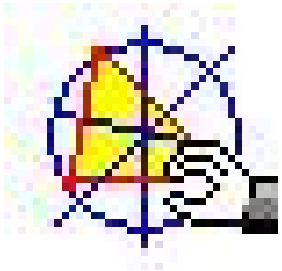
Costruzione Geometrica



COSTRUZIONE GEOMETRICA
non come semplice catena di operazioni da eseguire con riga e compasso ma come problema geometrico la cui soluzione è attesa in un ben determinato quadro assiomatico e che ha come giustificazione della sua correttezza un TEOREMA



La costruzione della bisettrice di un angolo



LA FUNZIONE DI TRASCINAMENTO

Le variazioni prodotte attraverso la funzione di trascinamento hanno come invarianti tutte le relazioni geometriche definite attraverso i comandi usati nella costruzione → si ha a disposizione una classe di figure

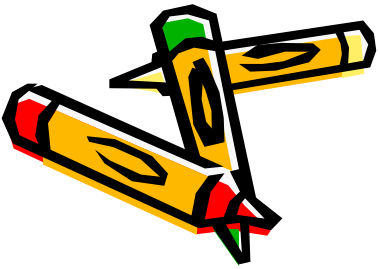
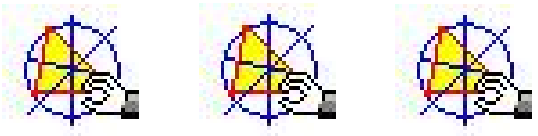


FIGURA DI CABRI

Una FIGURA DI CABRI è da considerarsi corretta se ogni figura ottenibile per trascinamento da questa può essere considerata corretta 

Criterio di validazione che rende gli alunni autonomi e sposta l'attenzione dal prodotto al processo

Il micromondo di cabri come particolare ambiente che offre mediazione per la costruzione del significato di teorema come enunciato valido nella teoria

Elenco attività

- **Unità criteri di uguaglianza**
  1. Disuguaglianza triangolare e criterio LLL
  2. Costruzione del trasporto di un angolo
  3. Costruzione della bisettrice
  4. Criterio ALA
  5. Criterio LAL

- **Unità il triangolo isoscele e la costruzione di una perpendicolare**
  1. Definizione di retta perpendicolare
  2. Il triangolo isoscele e le relative proprietà
  3. Costruzione della perpendicolare ad una retta data
  4. Angoli opposti al vertice sono uguali
  5. La relazione di perpendicolarità è simmetrica
  6. Costruzione del punto medio

- **Unità rette parallele**
  1. Definizione di rette parallele
  2. Teorema delle rette parallele tagliate da una trasversale
  3. Costruzione della parallela
  5. Teorema dell'angolo esterno

- **Unità quadrilateri**
  1. il parallelogrammo
  2. il quadrilatero convesso
  3. il trapezio
  4. il rettangolo
  5. il rombo
  6. il quadrato

Tutte le unità di lavoro riguardanti il primo anno sono raccolte in un Cd dal titolo

Quaderno interattivo di Geometria

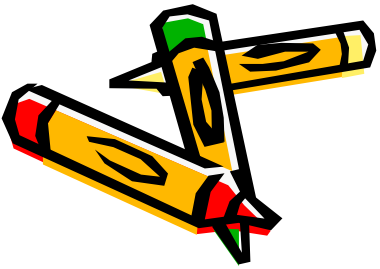
Cabri per l'introduzione al concetto di funzione

Cabri Géomètre l'abbiamo anche usato per introdurre lo studente gradualmente ai concetti di funzione geometrica e numerica e all'idea di grafico come funzione geometrica associata ad una funzione numerica per la sua rappresentazione.

Si parte da schede che possono essere date direttamente agli studenti per studiare:

Immagini sullo schermo che, coordinando tutti gli elementi importanti e le loro relazioni incorporano l'idea di :

- funzione geometrica, di variabile, di variabile indipendente e di variabile dipendente
- Dominio, immagine puntuale e insieme immagine_di una funzione geometrica
- Concetti di variabile, di variabile indipendente e di variabile dipendente, dominio, immagine puntuale e insieme immagine_di una funzione numerica
- Grafico di una funzione numerica



Per iniziare …

UTILIZZO DEL COMANDO MACRO DI CABRI COME SCATOLA NERA DA ESPLORARE

SCHEDA 1

Effetto1

La tabella riassume la situazione: ci sono dei punti che possono essere trascinati, altri che non possono essere trascinati, altri che si muovono quando si trascina. E' chiaro che H è il solo punto che non può essere trascinato direttamente ma che si muove sempre quando si trascinano gli altri, questo introduce l'idea di variabile, di variabile indipendente, di variabile dipendente e di funzione GEOMETRICA

Pisa 13 Dicembre 2006

Il comando TRACCIA è l'elemento chiave della nostra sperimentazione e da subito deve diventare uno strumento di osservazione e di lavoro per gli studenti, che sono invitati ad utilizzarlo. A partire da esso si dovrà costruire l'idea di traiettoria → metafora fondante per l'idea di insieme immagine di una funzione geometrica e poi di grafico di una funzione qualsiasi.

La traccia è un elemento statico, ma per come è stata costruita essa incorpora la dinamicità della sua origine: è una traiettoria (ad un tempo curva e percorso). Un insieme di punti (concezione statica) e un insieme di posizioni (dinamica).

Quindi con questa attività si introducono i concetti di IMMAGINE PUNTUALE (punto H), INSIEME IMMAGINE (traccia di H) e DOMINIO di una funzione (triangolo) →

l'insieme immagine e il dominio concepiti come traiettorie percorse una liberamente, l'altra condizionatamente.

UTILIZZARE LA "CALCOLATRICE" DI CABRI PER COSTRUIRE LA TAVOLA DEI VALORI DI UNA FUNZIONE NUMERICA

SCHEDA Rappresentazione funzione numerica

Esempi file ragazzi

- ✓ **Alessio**
- ✓ **Lorenzo**
- ✓ **Matteo**

Questa attività consente di acquisire familiarità con le opzioni Cabri "numeri" e "calcolatrice" e introduce i concetti di dominio e di insieme immagine per le funzioni numeriche

Pisa 13 Dicembre 2006

IL TESTO DI EULERO PER LA COSTRUZIONE DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE NUMERICA

Lettura/comprensione del testo di Eulero

Eulero in Cabri

Dopo la lettura e la discussione del "testo di Eulero", con questa attività viene introdotto un metodo operativo per associare ad una funzione numerica la funzione geometrica da noi comunemente chiamato grafico. Tale oggetto esprime nel particolare contesto una nota originale e cioè la evidente correlazione dinamica tra variabile indipendente e variabile dipendente

Esempi file ragazzi

- ✓ **Luca**
- ✓ **Giovanni**

Pisa 13 Dicembre 2006

Pisa 13 Dicembre 2006

LE VARIE FASI

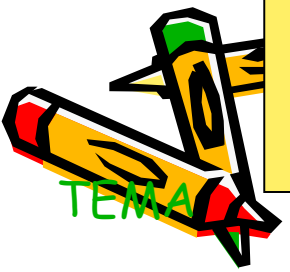
- ✓ Congetture con l'utilizzo dei software e relativi report
- ✓ Raccolta dei report da parte della prof. per preparare la discussione
- ✓ Discussione collettiva
- ✓ Eventuale verbalizzazione di cosa ho capito e cosa non ho capito
- ✓ Sistemazione quadernino

USO SOFTWARE

Assieme alla nostra professoressa abbiamo svolto un programma molto INNOVATIVO … **Tramite l'utilizzo dei SW abbiamo compreso appieno per esempio le proprietà base di una equazione, la natura di una funzione e abbiamo svolto anche un'infinità di dimostrazioni in una maniera anche** DIVERTENTE **e** PRATICA (Alessio 4°)

E' DIVERTENTE **fare delle congetture con software, in particolare mi piace il programma Cabri. … possiamo realizzare figure e muovendole possiamo vedere se la nostra costruzione è giusta o sbagliata. Questa cosa non si può vedere sul foglio con la matita.** (Federica 3°)

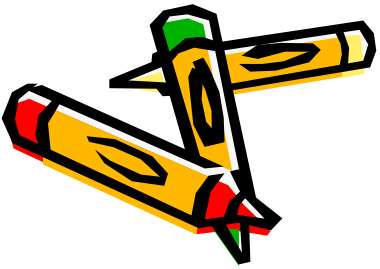
UTILE … **mi fa capire come utilizzare i teoremi già dimostrati, per dimostrarne degli altri** (Lorenzo 3°)



INTERESSANTE … **quando tentiamo di risolvere un problema di geometria o di algebra possiamo avere subito un' idea chiara dell' ipotesi del problema, poi possiamo fare vari tentativi per vedere quale potrà essere la soluzione esatta, quella più appropriata, o magari quella più semplice. Fare questo mi piace anche perché, rispetto al farlo in classe o a casa, è molto più** VELOCE **e** FACILE **per me.** (Cristal 2°)

LA VERBALIZZAZIONE

Tutte le attività svolte con Cabri prevedono sempre la richiesta di fornire una descrizione e una giustificazione delle proprie congetture, insieme con una descrizione di come si è giunti ad elaborarle → per i problemi di costruzione, si chiede esplicitamente di descrivere una procedura e di giustificare tale procedura



LA DISCUSSIONE

Raccolti e classificati i report dei ragazzi, è prevista un'attività di discussione collettiva in classe come contesto educativo in cui i processi argomentativi possano evolvere in processi dimostrativi o di definizione ad opera della mediazione consapevole dell'insegnante

La discussione collettiva sulle diverse strategie e le diverse giustificazioni prodotte dagli allievi risulta fondamentale per l'evoluzione verso l'idea di Teorema e di funzione e sua rappresentazione. Infatti, la necessità di difendere il proprio operato spinge ad esplicitare le operazioni utilizzate, ma soprattutto spinge a trovare una motivazione ad esse nel quadro della teoria fino a quel punto condivisa

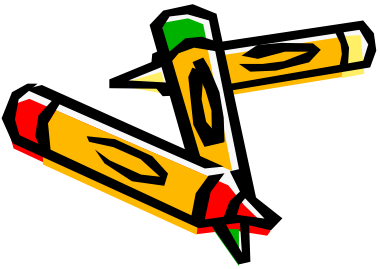
LA DISCUSSIONE

STIMOLANTI perché stimolano, appunto, tutti gli alunni a dire la propria opinione in quanto non ci si può sentire in imbarazzo con i compagni. Inoltre noto che in alcuni può sopraggiungere un senso di COMPETIZIONE in quanto se qualcuno dice una cosa giusta altri si sentono sempre superiori e per dimostrarlo entrano in una sorta di battaglia matematica a colpi di affermazioni e congetture (Matteo 4°)

UTILI … Discutendo insieme riesco a capire meglio e allo stesso tempo mi aita a ragionare ed entrare meglio nei procedimenti (Chiara 3°)

COSTRUTTIVE … alla fine riusciamo a trovare due o più dimostrazioni che come singoli non saremmo riusciti a intuire (Nicolas 2°)

DIVERTENTE, ANIMATA , INTERESSANTE … mi è più facile capire l'argomento con domande dirette e dove ognuno può mettere al corrente la classe delle sue idee giuste o sbagliate che siano … in tal caso mi riesce meglio capire sentendo modi diversi di interpretare la stessa cosa e una di queste idee, di solito quella che mi è piaciuta di più, mi entra in testa e mi risulta più facile da ricordare … (Giacomo 2°)



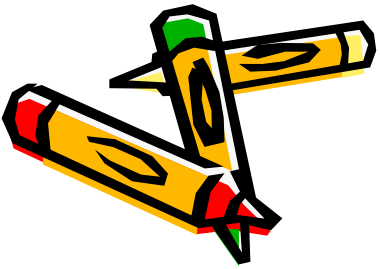
INTERESSANTI E STIMOLANTI … ognuno può esporre una propria riflessione con l'aiuto degli altri e dell'insegnante (Andrea 2°)

IL QUADERNINO

Attività di sistematizzazione tramite la stesura del "**quadernino**" dove gli alunni riportano le definizioni, gli assiomi, le giustificazioni delle costruzioni e i teoremi concordati in classe durante le discussioni collettive

Può esser assegnato come compito per casa, ma deve essere controllato costantemente dall'insegnante soprattutto nei primi tempi

Richiede una riflessione personale ed uno sforzo di rielaborazione che risulta di grande utilità agli allievi



IL QUADERNINO

Attività di sistematizzazione tramite la stesura del "**quadernino**" dove gli alunni riportano le definizioni, gli assiomi, le giustificazioni delle costruzioni e i teoremi concordati in classe durante le discussioni collettive

Può esser assegnato come compito per casa, ma deve essere controllato costantement soprattutto nei primi tempi

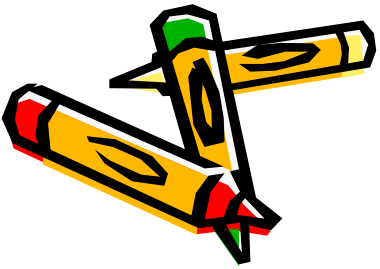
Richiede una riflessione personal rielaborazione che risulta di grande u

… Ognuno propone la propria dimostrazione e quella che garba di più si metterà sul quadernino (Lorenzo 2°)

DIMOSTRAZIONI LASCIATE PER CASA
… cerco di concludere il problema nel migliore dei modi, mi diverto perché cerco dappertutto: quadernini, libri vecchi, etc … per dimostrare il quesito posto … (Samuele 3°)

ESEMPI DI QUADERNINI di geometria

- ✓ QUADERNINO DI FEDERICO
- ✓ ELENCO DI MATTEO
- ✓ ELENCO DI JULETA



ANCORA SULLA VERBALIZZAZIONE

Dopo l'attività di discussione a volte è previsto un compito di verbalizzazione per la volta seguente del tipo "cosa ho capito e cosa non ho capito oggi"

OBIETTIVI DELLE VARIE ATTIVITA' DI VERBALIZZAZIONE

- acquisire una capacità espressiva in ambito matematico
- sviluppo del controllo concettuale di un ragionamento
- riorganizzazione del pensiero in sequenza

LA VERBALIZZAZIONE

EFFICACE perché permette di formulare ipotesi da dimostrare, IMPEGNATIVE perché serve impegno per notare alcune caratteristiche che ha una figura geometrica o un'espressione algebrica, INCERTA perché non sappiamo se una congettura è vera prima di averla dimostrata (Andrea 2°)

IMPORTANTI perché scrivendo queste relazioni vengono fuori i veri problemi cioè i punti che uno non ha capito e quindi AIUTANO nello stesso tempo a capire i punti non appresi in precedenza (Guglielmo 3°)

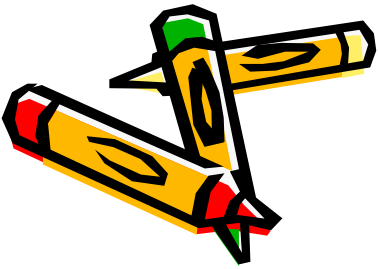
Riassumiamo le nostra conoscenze e tutto ciò ha effetti POSITIVI e UTILI in quanto per farle bene dobbiamo per forza aver capitol'argomento trattato in quanto bisogna rispiegarlo nella maniera più chiara e precisa possibile … ci possono essere cose che pensiamo di aver compreso, ma quando andiamo a riguardarle ci rendiamo conto di non aver capito del tutto alcuni particolari che inizialmente ci sembravano di poco conto ma che invece erano essenziali … (Elisabetta 4°)

… alcune volte capisco cose che neanche pensavo … (Andrea 3°)

… può essere un compito molto noioso, ma alla fine utile per imparare (Stefano 3°)

NUOVO RUOLO DELL'INSEGNANTE

Impegno dell'insegnante ad iniziare un percorso didattico che vede gli allievi sempre più partecipi e responsabili del loro apprendimento ricordando che richiedere maggiore responsabilità agli allievi non significa diminuire la propria: il ruolo di guida dell'insegnante nella spinta alla verbalizzazione e durante le discussioni risulta assai più complesso e delicato che non quello di semplice trasmettitore di sapere



DIFFICOLTA'

Per gli alunni

Produrre elaborati scritti → fanno resistenza di fronte ad un compito inusuale e decisamente faticoso ma possono essere motivati se i loro report diventano il punto di partenza delle discussioni collettive e diventano anche un mezzo per comunicare all'insegnante le loro difficoltà

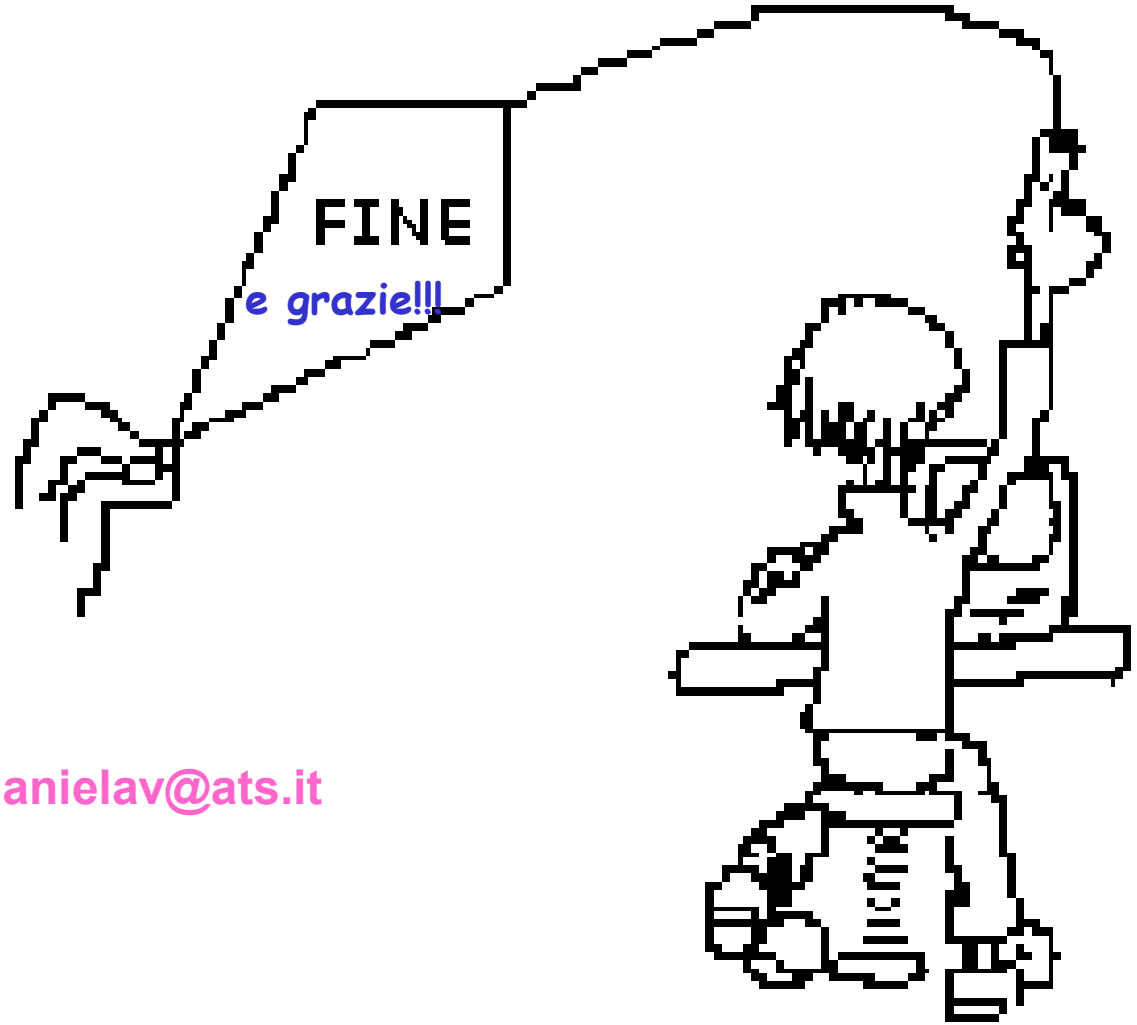
Per gli insegnanti

Mantenere un certo distacco durante le discussioni → Il comportamento dell'insegnante deve essere in equilibrio tra una funzione di stimolo a procedere nella direzione voluta e la necessità di lasciare il tempo agli allievi di appropriarsi dei problemi posti; la cosa più difficile è forse la gestione del silenzio insieme con il reggere alla tentazione di rielaborare le risposte solo accennate dagli allievi

VALUTAZIONE

Si moltiplicano le occasioni di comunicazione 'informale'e diminuiscono drasticamente quelle 'formali' finalizzate alla valutazione orale

Volendo valutare lo sviluppo delle capacità logico deduttive considerando un problema risolto quando i ragazzi sono capaci di comunicare agli altri e all'insegnante la loro soluzione, ad un certo punto dell'anno, quando il contratto didattico è condiviso dalla classe, potranno essere valutati i report dei ragazzi che tengono anche traccia dello sviluppo dei loro processi cognitivi



e grazie!!!

danielav@ats.it