Studiare matematica: il Progetto Porta dell'Università di Pisa

Pisa – 28 Febbraio 2007

Pietro Di Martino

Dipartimento di Matematica
- Università di Pisa -

Mirko Maracci

Dipartimento di Scienze Matematiche ed Informatiche
- Università di Siena -

Il precorso di Facoltà

A partire dall'a.a. 2003/04:

Precorsi di Matematica, Fisica e Chimica attivati dalla Facoltà di Scienze M.F.N. per gli studenti del primo anno dei CCdL della Facoltà.

Progettato insieme a Rosetta Zan* e Mattia de' Michieli Vitturi**.

* Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

** I.N.G.V. - Pisa

Tre questioni che stanno dietro all'organizzazione di un precorso

1. ***Perché*** organizzare un precorso?

2. ***Con quali obiettivi*** organizzare un precorso?

3. ***Come*** organizzare un precorso?

Perché organizzare un precorso?

Constatazione delle difficoltà incontrate da molti studenti nel passaggio Scuole Superiori-Università.

I dati ufficiali confermano l'esperienza comune: bassa percentuale di studenti che superano l'esame di Istituzioni di Matematiche il I anno.

Due posizioni molto diffuse

Difficoltà = mancanza di conoscenze:

"Gli studenti di ora hanno delle lacune di base enormi."

Assenza di prerequisiti:

"Non ci sono prerequisiti necessari per il corso di matematica; quello che serve viene ripetuto in classe."

“Gli studenti di ora hanno delle lacune di base enormi.”

Difficoltà riconducibili solo/soprattutto alla mancanza di “conoscenze di base”.

Nessun riferimento alle peculiarità del passaggio Scuola Superiore – Università.

▼

Precorso: intervento per <u>colmare lacune</u>

“Non ci sono prerequisiti necessari per il corso di matematica; quello che serve viene ripetuto in classe.”

Corsi sono auto-inclusi (self-contained) e auto-sufficienti; risulta inutile fare precorsi

▼

Precorso: <u>inutile</u>

Un'ipotesi alternativa

- I corsi di Matematica NON sono self-contained: è necessario identificare ed esplicitare dei prerequisiti minimi per i corsi.
- Le difficoltà degli studenti NON sono dovute SOLO a mancanza di conoscenze di base; SONO in parte legate ad aspetti specifici del passaggio Scuola Superiore – Università: noi abbiamo individuato tre aspetti tra loro correlati.

Difficoltà: le tre dimensioni

1. Carenze nelle conoscenze e abilità di base.
2. Carenze in abilità trasversali.
3. Atteggiamento negativo nei confronti della disciplina.

- Insiemi numerici (operazioni e proprietà)
- Algebra (calcolo letterale, soluzione di equazioni e disequazioni)
- Piano cartesiano
- Trigonometria

Difficoltà: le tre dimensioni

1. Carenze nelle conoscenze e abilità di base.
2. Carenze in abilità trasversali.
3. Atteggiamento negativo nei confronti della disciplina.

- Comunicare le proprie conoscenze e idee.
- Gestire diversi sistemi di rappresentazione.
- Argomentare.
- Studiare un testo.
- Prendere appunti.
- Organizzare lo studio.

Difficoltà: le tre dimensioni

1. Carenze nelle conoscenze e abilità di base.
2. Carenze in abilità trasversali.
3. Atteggiamento negativo nei confronti della disciplina.

Convinzione di

non poter riuscire in matematica

o viceversa convinzione di *non poter avere difficoltà*.

Con ***quali obiettivi*** organizzare il precorso?

le tre dimensioni sono strettamente correlate e dunque interventi focalizzati su un'unica dimensione presentano rischi elevati di inefficacia (o scarsa efficacia).

Intervenire sulle tre dimensioni contemporaneamente attraverso attività strutturate e una metodologia che promuova atteggiamenti positivi.

Come organizzare il precorso? La strutturazione degli incontri

1. Lavoro (individuale o collettivo) degli studenti su materiale strutturato.
2. Confronto e discussione a partire dalle attività svolte; docente ~ moderatore.
3. Sintesi organizzata e sistematica del lavoro svolto.

Come organizzare il precorso? La metodologia scelta

- Privilegiare problemi ad esercizi.
- Favorire sia il lavoro individuale che quello collettivo.
- Favorire la discussione tra gli studenti.
- Lasciare TEMPO per riflettere.
- Prestare attenzione ai processi.
- Non ignorare (NON CENSURARE) processi o prodotti scorretti.
- Sintetizzare elementi chiave alla fine.

L’apprezzamento per tale metodologia emerge dalla lettura dei questionari di valutazione…

La buona considerazione data agli studenti e ai loro interventi

L’atmosfera. Siamo qui per imparare ed ogni errore non viene criticato ma spiegato

Ma dai questionari vengono anche suggerimenti…

Estendere i precorsi anche ai mesi di luglio e inizio settembre affinché gli studenti indecisi su che Facoltà scegliere si possano rendere conto a che cosa andranno incontro

I precorsi come ORIENTAMENTO utile per la scelta universitaria.

Ma dai questionari vengono anche suggerimenti…

È un corso molto utile ben organizzato ma troppo breve! Una durata maggiore!

I precorsi sono troppo brevi

NECESSITÀ anche dei ragazzi di avere più TEMPO..

tempo che serve anche a noi sia per farli lavorare che per ascoltarli.

Il Progetto Porta:
Progetto Orientamento Riduzione Tasso Abbandoni

Due fasi previste:

2. Ultimi due anni delle superiori.
3. Primo anno dell'Università.

Obiettivo ridurre le non iscrizioni e gli abbandoni dovuti a:

- Scarsa conoscenza dei corsi di studio universitari.
- Lacune nella preparazione.
- Materie nuove.

Il Progetto Porta:
Progetto Orientamento Riduzione Tasso Abbandoni

Per quanto riguarda Matematica sono stati organizzati due precorsi rivolti a studenti volontari delle ultime due classi delle superiori

Questo ha permesso di sperimentare i precorsi per gli studenti di scuola superiore che devono ancora scegliere il Corso di Laurea e di fare più incontri recuperando entrambi i suggerimenti emersi dai questionari di valutazione.

Il Progetto Porta: i dati

9 le scuole coinvolte delle Province di Pisa, Lucca e Livorno

8 gli incontri pomeridiani per un totale di 24 ore di lezione

Per la partecipazione al Corso le richieste sono state ben di più delle 70 stabilite come tetto massimo

3 studenti non hanno mai partecipato

Importanza di una migliore selezione iniziale

12 studenti hanno partecipato a meno di 3 incontri

Importanza di capire "cosa non ha funzionato"

Il Progetto Porta: i dati

Per gli altri 45 la frequenza media è stata superiore al 65%

29 studenti hanno partecipato ad almeno 6 incontri

6 studenti hanno partecipato a tutti gli 8 incontri

È da sottolineare non solo la frequenza pomeridiana (dopo scuola) ma anche il fatto, voluto, che i ragazzi sapevano che il Corso, a differenza di altri, non dava nessun credito universitario

	CONTENUTI	ABILITÀ TRASVERSALI
1	**NUMERI**	Definire. Dimostrare. Linguaggio e comunicazione. Problem solving
2	**EQUAZIONI E DISEQUAZIONI**	Definire. Dimostrare. Linguaggio e comunicazione. Problem solving
3	**TRIGONOMETRIA**	**SEGUIRE UNA LEZIONE** **PRENDERE APPUNTI**
4	**TRIGONOMETRIA**	**SISTEMARE IL MATERIALE** **STUDIARE**
5	Piano cartesiano	**CAMBIARE RAPPRESENTAZIONE**
6	Equazioni e disequazioni	**DEFINIZIONI**
7	Aritmetica, …	**DIMOSTRAZIONI**
8	Aritmetica, …	**LINGUAGGIO E COMUNICAZIONE**

1 – Insiemi numerici

- Definizione degli insiemi numerici

Qui di seguito sono elencati alcuni termini. Conosci il significato di alcuni di questi? Prova a spiegare il significato di quelli che conosci:

- Numeri naturali
- Numeri interi
- Numeri razionali
- Numeri irrazionali
- Numeri reali
- Valore assoluto

- *Numeri naturali:* sono numeri compresi tra 0 e $+\infty$, interi
- *Numeri interi:* non ammettono cifre decimali, compresi tra $-\infty$ e $+\infty$
- *Numeri razionali:* è un insieme di numeri compresi tra $-\infty$ e $+\infty$ che possono esistere sottoforma di frazione
- *Numeri irrazionali:* sono numeri compresi tra $-\infty$ e $+\infty$ che possono contenere cifre decimali
- *Numeri reali:* comprendono tutti gli altri insiemi.

- *Numeri naturali:* prendendo in considerazione la retta dei numeri, come unità di misura 1, l'insieme dei numeri naturali si colloca a destra dello 0 e sono tutti i numeri distanti l'uno dall'altro di un'unità
- *Numeri interi:* prendendo in considerazione la retta dei numeri, i numeri interi si trovano sia a destra che a sinistra dello 0 ed hanno distanza da quest'ultimo k, dove k appartiene a $\mathbb{N}$
- *Numeri razionali:* l'insieme dei numeri composti da una quantità finita di cifre, o da un numero infinito di cifre che si ripetono periodicamente o da un numero infinito di cifre ma esprimibile sotto forma di frazione
- *Numeri irrazionali:* …
- *Numeri reali:* l'insieme dei numeri comprendenti i numeri razionali e gli irrazionali

- *Numeri razionali:* è l'insieme dei numeri fratti, ovvero formati da un numeratore e un denominatore "divisi" da una linea detta di frazione
- *Numeri irrazionali:* è l'insieme dei radicali, ovvero formati da un radicando sotto una radice
- *Numeri reali:* è l'insieme di tutti i numeri compresi tra $-\infty$ e $+\infty$

- *Numeri naturali:* sono l'insieme dei numeri positivi interi compresi tra 0 e $+\infty$
- *Numeri interi:* sono l'insieme dei numeri naturali più li stessi numeri cambiati di segno e sono compresi tra $-\infty$ e $+\infty$
- *Numeri reali:* sono l'insieme dei numeri razionali, irrazionali e interi

- *Numeri interi:* numeri non frazionari $[-\infty, +\infty]$
- *Numeri razionali:* numeri frazionari
- *Numeri reali:* è l'insieme di $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, I

1 – Insiemi numerici

- Definizione degli insiemi numerici

Qui di seguito sono elencati alcuni termini. Conosci il significato di alcuni di questi? Prova a spiegare il significato di quelli che conosci:

- Numeri naturali
- Numeri interi
- Numeri razionali
- Numeri irrazionali
- Numeri reali
- Valore assoluto

Sei soddisfatto di come sei riuscito a spiegare il significato di tutti quelli che conoscevi già?

- No, perché non conosco le esatte definizioni , per questo non so esprimermi in maniera chiara
- Insomma perché non trovavo i termini giusti
- No perché pur essendo cose che uso quotidianamente non so definirle correttamente
- No, perché i concetti da me conosciuti a riguardo sono più chiari di quanto io riesca a esporre
- Si perché anche chi non è esperto del settore può riconoscere ed individuare i diversi tipi di numeri

1 – Insiemi numerici

- Definizione degli insiemi numerici
- "*Giustificazione*" di regole e convenzioni

- Esegui il prodotto in colonna 22 per 35. Perché, secondo te, la moltiplicazione si esegue in questo modo?

- Perché equivale a sommare il numero 27 con se stesso per 35 volte
- Non ne ho idea. Mi hanno insegnato a fare così dalle elementari
- Perché è il metodo più semplice e veloce per risolvere le moltiplicazioni
- È come fare $27 \cdot 5 + 27 \cdot 30$
- Si spezza la moltiplicazione in modo da poter sommare tante moltiplicazioni più semplici per cui $(ab)\cdot(cd)=(10\cdot a+b)\cdot(10\cdot c+d)=100ac+10ad+10bc+bd$
- Per esercitare la mente

1 – Insiemi numerici

- Definizione degli insiemi numerici
- "*Giustificazione*" di regole e convenzioni

- Esegui il prodotto in colonna 22 per 35. Perché, secondo te, la moltiplicazione si esegue in questo modo?
- Perché *meno per meno fa più?*

- Per definizione (convenzione)
- Moltiplicando un numero negativo un numero pari di volte otteniamo sempre un numero positivo
- È irrilevante il segno dei fattori in una moltiplicazione quando entrambi hanno lo stesso segno
- $(-1) \cdot (-1)=(-1)^2=+1$
- Perché una negazione annulla l'altra
- Perché tra – e + vince il meno, tra + e – vince il meno, tra + e + non ci sono – quindi vince il +, tra – e – vince il + perché altrimenti ci sarebbero 2 – e 1 +, quindi per pareggiarli – per – dà +

1 – Insiemi numerici

- Definizione degli insiemi numerici
- "*Giustificazione*" di regole e convenzioni

- Esegui il prodotto in colonna 22 per 35. Perché, secondo te, la moltiplicazione si esegue in questo modo?
- Perché *meno per meno fa più?*
- Sei d'accordo con la seguente affermazione: *non si può dividere per zero* ? Spiega perché

1 – Insiemi numerici

- Definizione degli insiemi numerici
- "*Giustificazione*" di regole e convenzioni
- Chiusura degli insiemi numerici per alcune operazioni

Dire, giustificando la risposta se la somma di:

- due razionali è razionale
- due irrazionali è irrazionale
- un razionale e un irrazionale è un razionale o un irrazionale

Dire, giustificando la risposta se il prodotto di:

- due razionali è razionale
- due irrazionali è irrazionale
- un razionale e un irrazionale è un razionale o un irrazionale

- La somma di due irrazionali è irrazionale?
- $0,1^{-} + 0,2^{-} = 0,3^{-}$
- Sì perché sommando due numeri infiniti non periodici non può risultare un numero razionale a meno che un numero non sia l'opposto dell'altro
- Il prodotto di due razionali è razionale?
- No, perché può dare 1 n° naturale
- Falso, $3/2 \cdot 2/3=1$
- Sì, perché il prodotto di due frazione è una frazione avente per…
- Il prodotto di due irrazionali è irrazionale?
- Non sempre, sqrt(2)·sqrt(2)=2, sqrt(2)·sqrt(3)=6
  - No, perché il prodotto di due numeri irrazionali è un numero razionale
  - Sì

1 – Insiemi numerici

L'incontro è stato tra i più apprezzati:

"Mi è piaciuta quella sui numeri per le discussioni delle definizioni"

"Mi è piaciuta quella riguardante la teoria dei numeri, perché sono cose alle quali uno non ci pensa, ma nel dimostrarle sono divertenti"

"Il primo incontro è stato realmente fantastico"

Ma c'è anche chi dice:

"Il primo [incontro] mi è piaciuto meno perché era basato unicamente su nostre deduzioni"

2 - Equazioni e disequazioni

- Riflessione critica su nozioni “familiari”: equazione, disequazione, soluzione…
- Riflessione-discussione su “regole” note (algoritmi)
- Risolubilità e risoluzione di un’equazione (o disequazione) a partire dalle proprietà di ordine dei numeri reali e dalle definizioni dei simboli usati (valore assoluto, radice quadrata, etc.)

2 - Equazioni e disequazioni

Prova a spiegare cosa è una equazione e cosa è una disequazione.

Ora scrivi cosa intendi per **soluzione** di un'equazione (o disequazione)

Ora scrivi cosa intendi per equazioni (o disequazioni) **equivalenti**

2 - Equazioni e disequazioni

Trovare, se esistono, valori di x (e di y) che rendono vere e valori di x (e di y) che rendono false le seguenti uguaglianze:

- $x^2 + 3x - 1 = 0$
- $(x + 1)(x - 2)(x - 3) = 0$
- …
- $x + 2y - 1 = 3x - y$
- $x^2 + y^2 = x - y^2$

2 - Equazioni e disequazioni

Siano a; b; c numeri reali arbitrari.

Completa con *maggiore* o *minore* le seguenti proposizioni in modo da renderle vere, quando questo è possibile:

1. Se a è maggiore di b allora $a + c$ è ..... di $b + c$.
2. Se a è maggiore di b allora $1/a$ è ..... di $1/b$ …

Quali delle seguenti implicazioni sono corrette e perché?

1. Se $2/(x - 2) < 3$ allora $2 < 3(x - 2)$.
2. Se $\sqrt{(2x + 1)} > x - 1$ allora $2x + 1 > (x - 1)^2$ …

2 - Equazioni e disequazioni

Costruisci, se possibile, un'equazione di secondo grado, una di terzo e una di quarto che non abbiano soluzioni reali.

Costruisci, se possibile:

1. Un'equazione di quarto grado che abbia tra le sue soluzioni 0 e 1.
2. Una disequazione che abbia come insieme di soluzioni l'intervallo aperto (2; 3).

…

2 - Equazioni e disequazioni

Vogliamo risolvere l'equazione:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

Possiamo supporre $a \neq 0$ (Perché?)

Se $a = 1$ e $b = 0$ la (1) diventa:

$$x^2 + c = 0 \ (2)$$

che ha soluzione: .....

Torniamo al caso generale 1. Tentiamo di trasformare l'equazione 1 in una equazione del tipo 2 senza cambiare l'insieme delle soluzioni.

Cominciamo: $a(x^2 + b/a\ x) + c = 0$ (3)

Vogliamo che il coefficiente di a sia un quadrato, quindi dobbiamo aggiungere .....

3 – Lezione / prendere appunti

Lezione di tipo universitario sulla trigonometria in cui si richiedeva agli alunni di prendere appunti a partire dai quali avrebbero lavorato nell'incontro successivo.

Nel questionario di valutazione finale molti l'hanno giudicato l'incontro meno interessante ma per motivi diversi:

2. Trigonometria noiosa.
3. Prendere appunti troppo stancante.
4. A prendere appunti si impara alle superiori e ormai ognuno ha il suo stile! (ben 4 risposte così)

4 – Studiare sugli appunti

A partire dagli appunti:

- Resoconto **critico** di quello che è stato fatto.
- Esprimere valutazioni di importanza e “giudizi estetici”
- Saper dimostrare risultati nuovi a quelli la cui dimostrazione è stata il *classico*: “analogamente a quanto fatto in precedenza…”

- Tra le definizioni date a lezione ce ne sono alcune che ti sembrano più importanti di altre? Perch`e ti sembrano pi`u importanti?
- Cosa della lezione sulla trigonometria ti è piaciuto di più? Perché?
- Cosa della lezione sulla trigonometria ti è piaciuto di meno? Perché

4 – Studiare sugli appunti

L’attività ha dato qualche problema a chi non era presente la volta precedente ed ha lavorato sugli appunti di altri (cosa comunque che accade piuttosto di frequente all’Università)

C’è chi proprio dallo studio degli appunti “valorizza” l’attività precedente di prendere appunti:

“L’incontro che mi ha soddisfatto maggiormente è quello sullo studio degli appunti, mi ha fatto capire l’importanza degli appunti … e che non li prendo bene”

4 – Studiare sugli appunti

C'è anche chi alla domanda "quali incontri ti hanno soddisfatto/interessato di meno. Perché?" risponde:

"Trigonometria prendere appunti, anche se affrontato in modo più completo l'argomento è per me all'ordine del giorno e per questo mi ha suscitato poco interesse"

E alla domanda "quali incontri ti hanno maggiormente soddisfatto/interessato? Perché?" risponde:

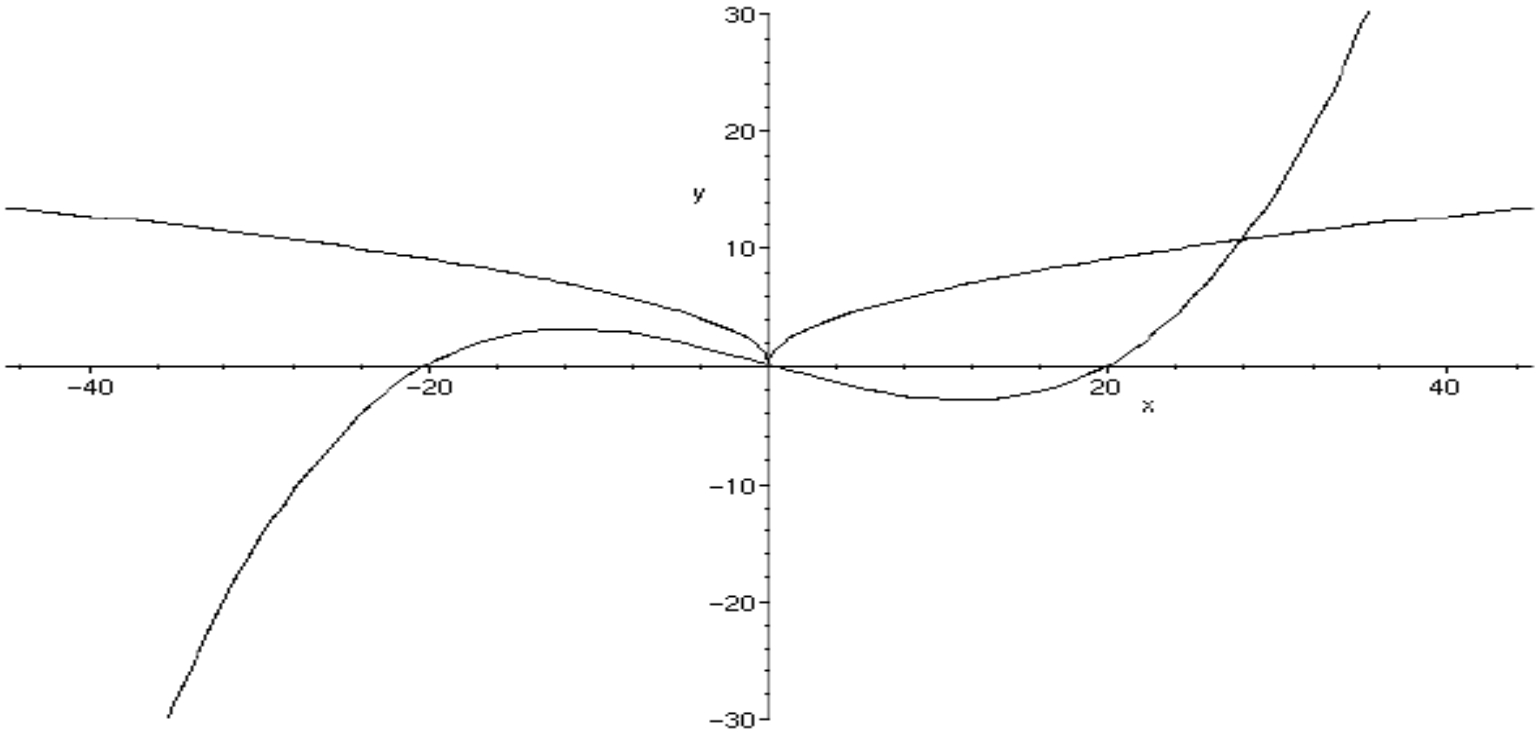
"Trigonometria appunti e studio degli appunti. Ho "scoperto" che prendere appunti su cui dopo studiare è alquanto difficile e richiede un impegno maggiore di quanto mi aspettassi"

5 – Cambio di rappresentazione

- La differenza tra la rappresentazione di un oggetto matematico e l'oggetto stesso.
- Diverse rappresentazioni di un oggetto matematico possono fornire informazioni diverse su uno stesso oggetto.
- Importanza di trattare uno stesso oggetto in diversi sistemi di rappresentazione.

- Importanza di una dialettica tra rappresentazione grafica e algebrico-analitica e il suo ruolo nello studio di equazioni e disequazioni, di funzioni, di curve.

In figura sono rappresentate le curve di equazioni $y = 2\sqrt{|x|}$ (curva $\mathcal{C}_1$) e $y = \frac{1}{1000}(x^3 - 400x)$ (curva $\mathcal{C}_2$).



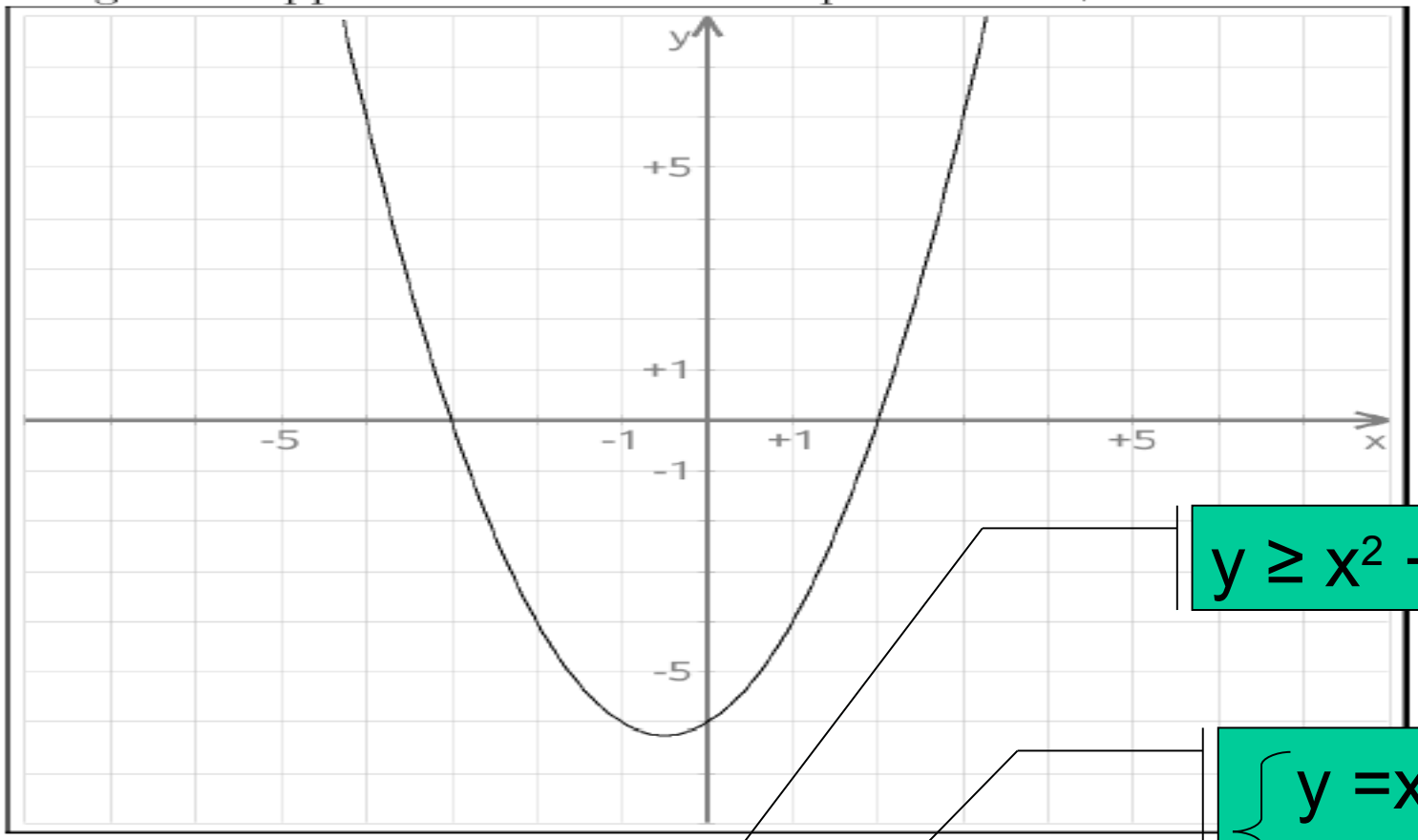
1. L'equazione $2\sqrt{|x|} = \frac{1}{1000}(x^3 - 400x)$ ha soluzione?

   In caso affermativo segna sul grafico (sull'asse x) tutte le soluzioni dell'equazione.

2. La disequazione $2\sqrt{|x|} \geq \frac{1}{1000}(x^3 - 400x)$ ha soluzione?

   In caso affermativo segna sul grafico (sull'asse x) tutte le soluzioni della disequazione.

In figura è rappresentata la curva di equazione $x^2 + x - 6$:



$y \geq x^2 + x - 6$

$$\begin{cases} y = x^2 + x - 6 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

1. Qual è l'insieme di tutte le soluzioni della disequazi

2. Prova a rappresentare sul piano (magari usando colori diversi) l'insieme dei punti (x, y) tali che:

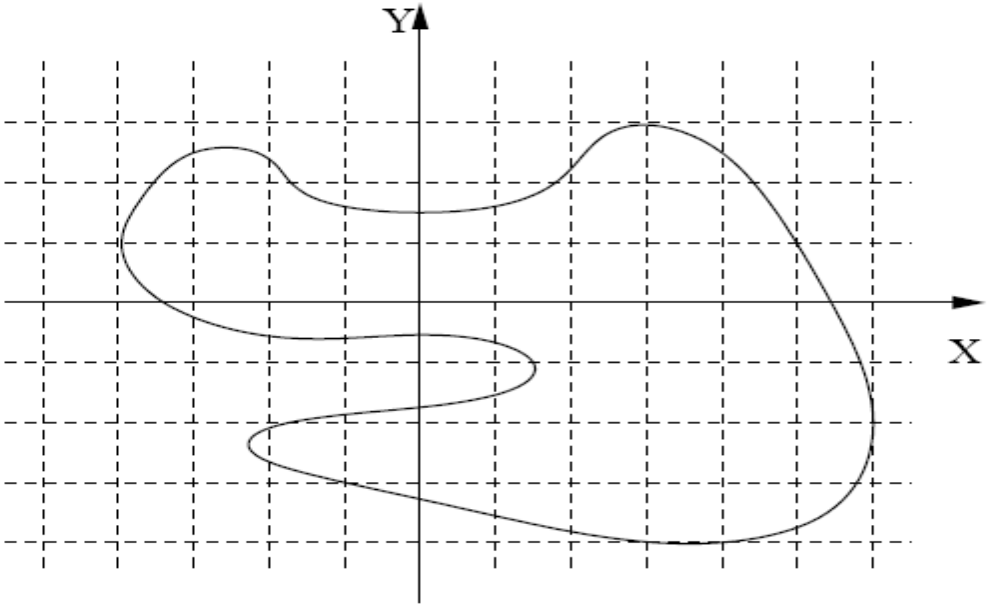
   (a) $y \geq x^2 + x - 6$

   (b) $\begin{cases} y = x^2 + x - 6 \\ y \geq 0 \end{cases}$

   (c) $x^2 + x - 6$

$x^2 + x - 6 \geq 0$

Considera la curva disegnata qui sotto:



- Di un punto del piano sappiamo che ha ascissa 2 e che appartiene alla curva. Quale ordinata può avere?

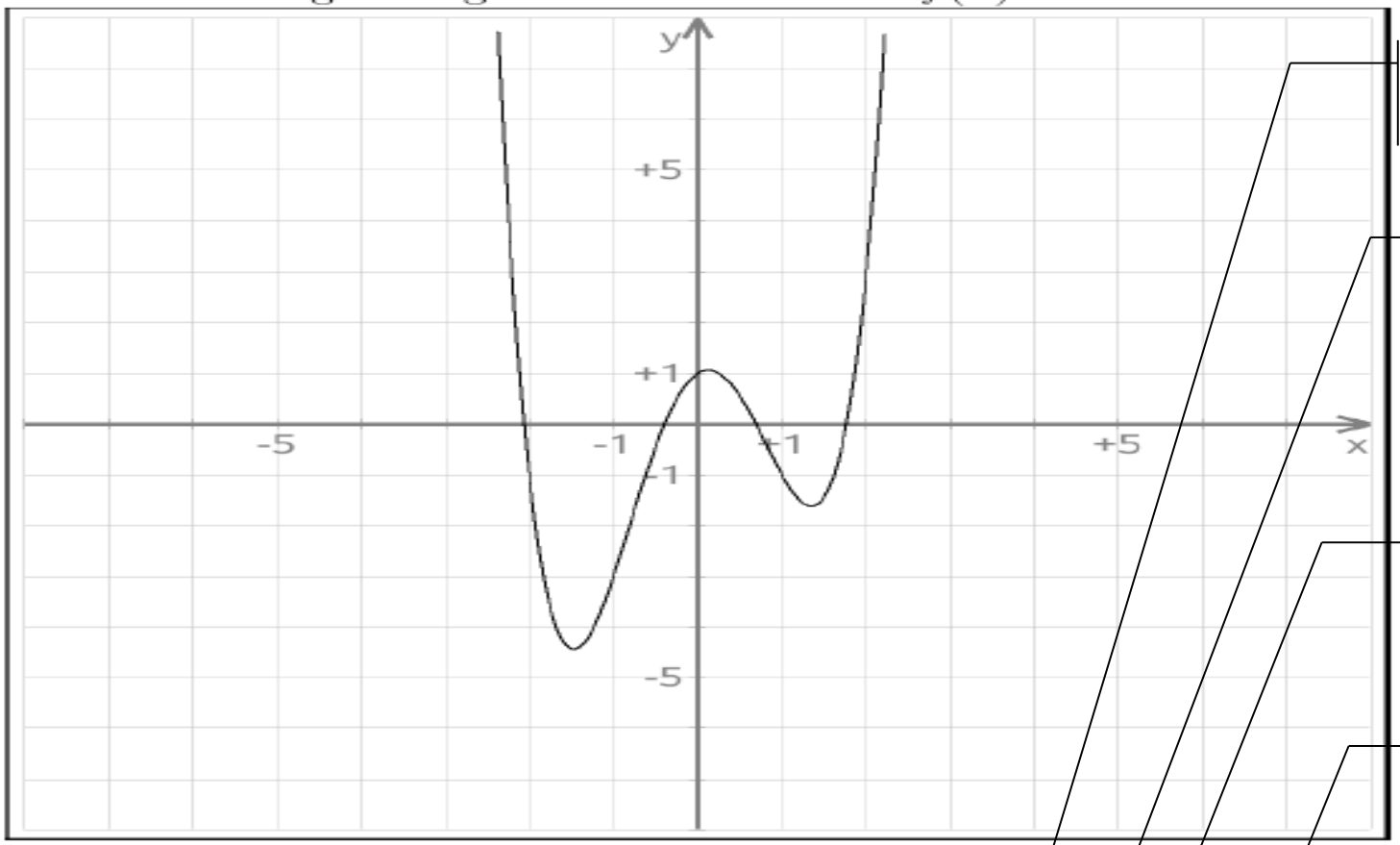
- Un punto del piano di ascissa 3 può appartenere alla curva? Se sì, quale può essere la sua ordinata?

- Un punto del piano di ordinata 1 può appartenere alla curva? Se sì, quale può essere la sua ascissa?

- Quale ascissa possono avere i punti che appartengono alla curva?

- Quale ordinata possono avere i punti che appartengono alla curva?

Considera il seguente grafico della funzione $f(x)$:



$f(x)=k$

$f(x)>k$

$f(x)=x+k$

$f(x)<x+k$

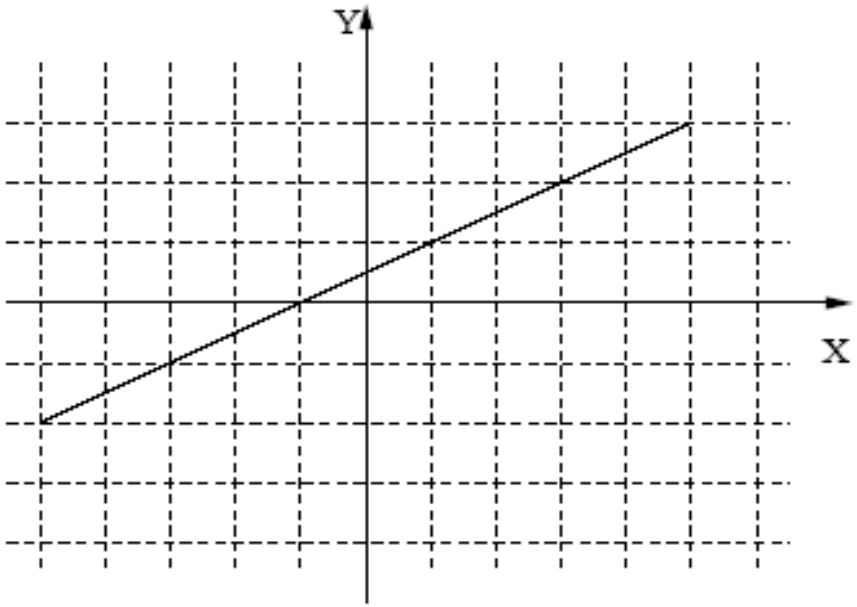
1. Discuti la risolubilità dell'equazione $f(x) = k$ (dove k è un numero reale fissato).

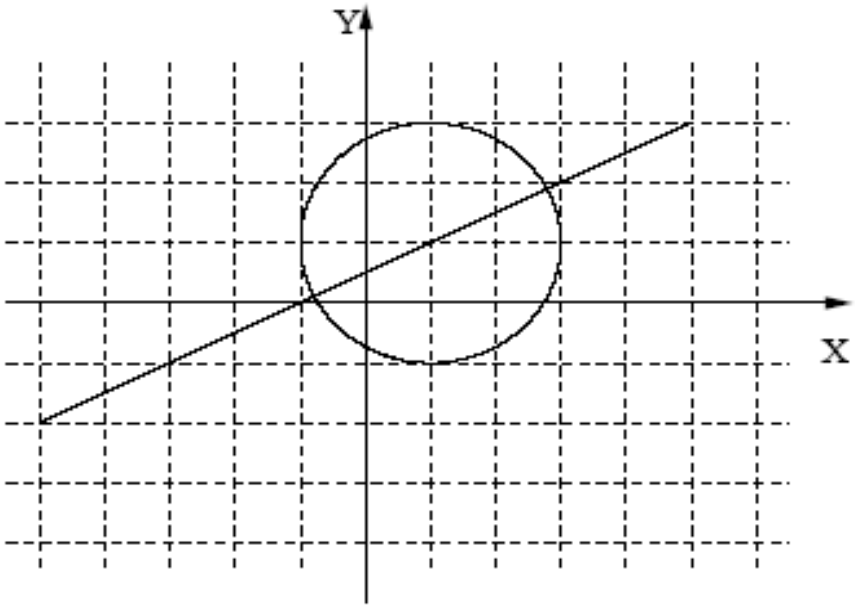
2. Discuti la risolubilità della disequazione $f(x) > k$ (dove k è un numero reale fissato).

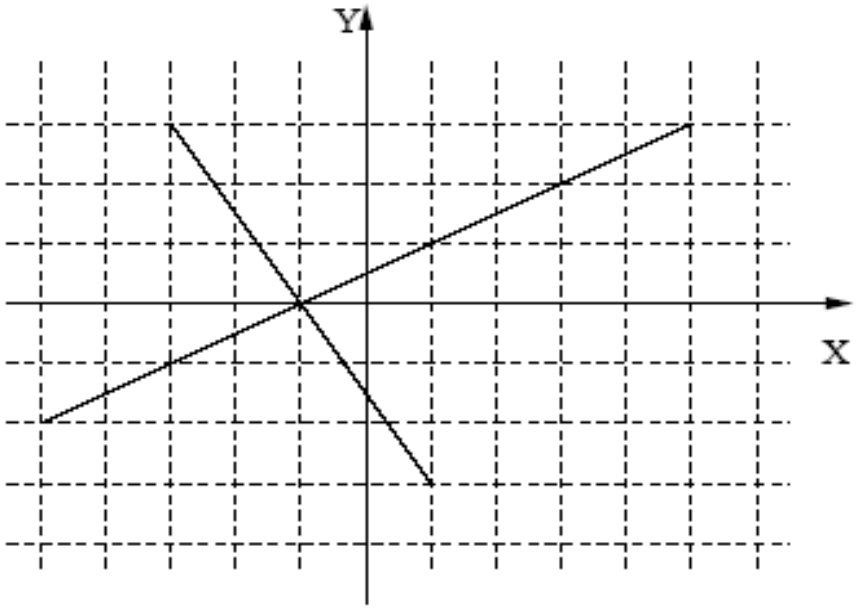
3. Discuti la risolubilità dell'equazione $f(x) = x + k$ (dove k è un numero reale fissato).

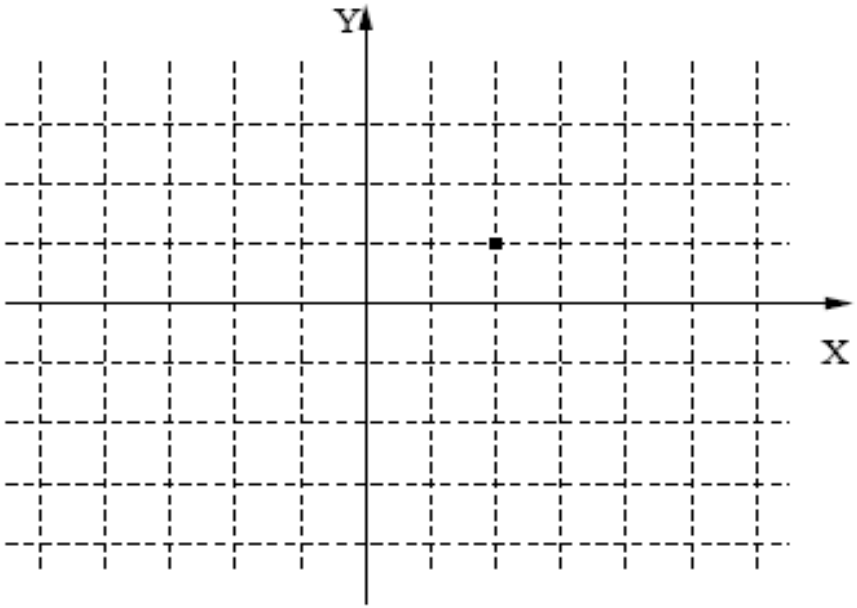
4. Discuti la risolubilità della disequazione $f(x) < x + k$ (dove k è un numero reale fissato).

Prova a scrivere equazioni e disequazioni le cui soluzioni siano proprio i punti del piano che appartengono alle quattro figure rappresentate qui di seguito:









5 – Cambio di rappresentazione

L'attività sui cambi di rappresentazione è stata generalmente molto apprezzata:

"*c'era una parte molto ampia di esercizi, era divertente poi confrontarsi*".

Interessanti le motivazioni di chi non ha valutato positivamente l'attività:

Il quinto incontro è stato quello che mi è piaciuto meno, probabilmente perché l'argomento è stato trattato solo superficialmente, per ora, a scuola.

Quello sui sistemi di rappresentazione perché li avevo studiati approfonditamente a scuola.

6 – Definizioni

Studio di una definizione:

uso di diversi sistemi di rappresentazione.

estensione di definizioni,

termini non definiti,

Argomentazione.

Confronto tra definizioni.

Nozioni: multiplo di un intero, funzione, funzione monotona

Definizioni: le definizioni date

Siano a e b due numeri interi, diciamo che <u>*a è multiplo di b*</u> *se esiste un numero intero k tale che $a = b \cdot k$*

Siano A e B due insiemi, si chiama <u>*funzione di A in B*</u> *ogni legge che ad ogni elemento x di A associa un elemento y di B ed uno solo*

Ti sembra di aver capito la definizione?

Se non l'hai capita:

- Ci sono simboli che non conosci? Quali?
- Ci sono termini che non conosci? Quali?
- Ci sono espressioni che non capisci? Quali?

Scrivi qui di seguito tutto quello che vorresti chiedere al professore che potrebbe aiutarti a capire

Andrea dice: -6 è multiplo di 2 perché $2\cdot(-3)=-6$

Barbara dice: no, perché -6 è più piccolo di 2 e quindi non può essere suo multiplo.

A chi dai ragione e perché?

Valerio dice: 3 non è multiplo di 2 perché $2\cdot0=0$, $2\cdot1=2$, $2\cdot2=4$, $2\cdot3=6$, ecc…

Riccardo dice: 3 è multiplo di 2 infatti: $2 \cdot 3/2 = 3$.

A chi dai ragione e perché?

Consideriamo i due insiemi

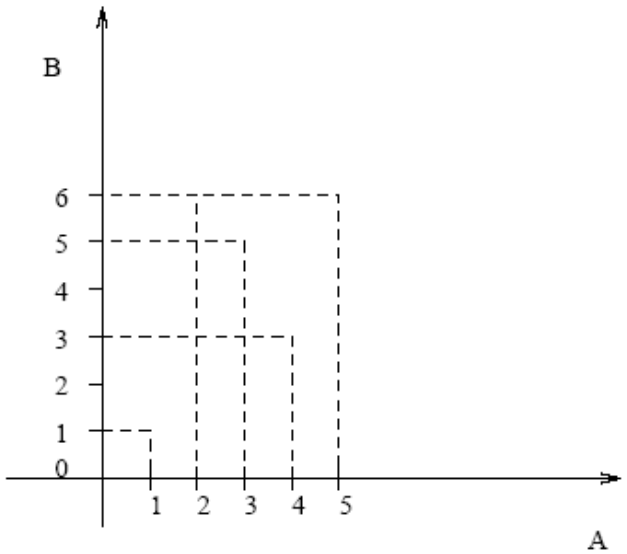
A= {1,2,3,4,5}

B= {0,1,2,3,4,5,6}

Quali dei seguenti grafici, tabelle, diagrammi, espressioni può rappresentare una funzione di A in B secondo la definizione data?

1.
se x è un elemento di A
$f(x) = x^3 + x + 1$

2.



3.

x	g(x)
1	4
2	2
3	0
4	3
5	3

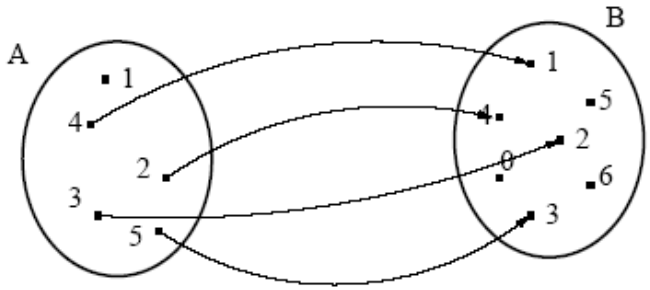
4.

A \ B	0	1	2	3	4	5	6
1	×						×
2			×				
3					×		
4		×					
5				×			

5.
se x è un elemento di A

$$h(x) = \begin{cases} 2x+1 & se\ x \leq 2 \\ 1 & se\ x = 3 \\ x-1 & se\ x \geq 4 \end{cases}$$

6.



Definizioni: confronto definizioni

Marcellini - Sbordone

Diremo che una funzione f è monotòna in un insieme A, se verifica una delle condizioni seguenti ($\forall\ x_1, x_2 \in A$):

(8.3)	f *strettamente crescente:*	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,
(8.4)	f *crescente:*	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$,
(8.5)	f *strettamente decrescente:*	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,
(8.6)	f *decrescente:*	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Una funzione che verifica la (8.3), oppure la (8.5), si dice *strettamente monotòna*.

Apostol

Si dice che una funzione f *è crescente* su un insieme S se $f(x) \leq f(y)$ per ogni coppia di punti x e y tali che $x < y$. Se vale la disuguaglianza stretta $f(x) < f(y)$ per tutti gli $x < y$ in S, allora la funzione è detta *strettamente crescente* su S. Analogamente, f è detta *decrescente* su S se $f(x) \geq f(y)$ per tutti gli $x < y$ in S. Se $f(x) > f(y)$ per tutti gli $x < y$ in S, f è detta *strettamente decrescente* su S. Una funzione è detta *monotòna* su S se è o crescente su S o decrescente su S. Il termine *strettamente monotòna* significa che f è strettamente crescente su S oppure strettamente decrescente su S.

Definizioni: confronto definizioni

Definizione: se $A \subset \mathbb{R}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$, si dice che f è crescente se

$$\forall\ x, y\ \in\ A,\ [x < y \Rightarrow f(x) < f(y)];$$

si dice che f è debolmente crescente (o non decrescente) se

$$\forall\ x, y\ \in\ A,\ [x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)];$$

si dice che f è debolmente decrescente (o non crescente) se

$$\forall\ x, y\ \in\ A,\ [x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)];$$

infine , si dice che f è decrescente se

$$\forall\ x, y\ \in\ A,\ [x < y \Rightarrow f(x) > f(y)];$$

Se f verifica una delle quattro proprietà precedenti, si dice che f è monotòna; se f è crescente o se f è decrescente si dice che f è strettamente monotòna.

Acerbi - Buttazzo

6 - Definizioni

“Mi hanno maggiormente interessato gli incontri sulle definizioni, ed equazioni perché mi sono risultati facili ed interessanti”

“Generalmente mi son piaciute tutte le lezioni, ma ho trovato più particolari quello dei numeri, delle definizioni e quello finale, perché forse la maggior parte delle cose non le ricordavo bene o non le avevo affrontate in profondità a scuola”

7 – Dimostrazioni

Analizzare una dimostrazione, ricostruire una dimostrazione, confrontare argomentazioni, analizzare la consistenza di argomentazioni.

Contesto matematico: aritmetica – multiplo di un intero, irrazionalità di $\sqrt{2}$.

7 – Dimostrazioni

Teorema: La somma di due numeri dispari consecutivi è un multiplo di 4.

2. Siano n e m due numeri dispari consecutivi,
3. possiamo supporre $n < m$,
4. e quindi $m = n + 2$.
5. Possiamo inoltre porre $n = 2k + 1$,
6. quindi
7. Allora (*k* +1
8. Il teore

Con riferimento al p. 2 della dimostrazione, perché si può supporre $n < m$?

Con riferimento al p.1 della dimostrazione, perché n e m sono due dispari consecutivi? cosa "accade" se, ad esempio, uno dei due non è dispari?

TEOREMI E DIMOSTRAZIONI: l'irrazionalità di $\sqrt{2}$

Dimostriamo che il numero $\sqrt{2}$ è irrazionale, cioè non si può scrivere come rapporto tra due numeri interi.

Leggi attentamente

1) Dimostriamo *per*

2) Se $\sqrt{2}$ fosse razio i interi m e n tali che:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \qquad (*)$$

3) Osserviamo che si può sempre supporre c la frazione $\frac{m}{n}$ sia ridotta ai minimi termini.

4) Dall'uguaglianza (*) segue che $m^2 = 2n^2$.

5) Poichè m^2 è pari, anche m è pari e quindi n deve essere dispari.

6) D'altra parte se poniamo $m = 2k$ abbia

7 $^2 = 2k^2$.

8 ^{2} è pari.

9) Quindi anche n è pari.

10) Ma avevamo n dispari.

11) Quindi siamo arrivati ad un assurdo.

Perché (vedi3) si può supporre che *m* e *n* siano primi tra loro?

Perché (vedi5) se m^2 è pari anche *m* è pari?

In quale punto avevamo dedotto che *n* è dispari?

In cosa consiste l'assurdo?

Considera il seguente problema:
Sappiamo che $M = 3^5 \cdot 5^4 \cdot 7^{24} \cdot 13^{18}$. *È vero o no che* $M + 5$ *è multiplo di* 10*?*
La risposta alla domanda è sì e qui di seguito trovi un testo in cui sono riportate le dimostrazioni di questo fatto di due studenti. Le frasi dei due studenti sono state mescolate a casaccio tra loro. Sei in grado di ricostruire i due ragionamenti originari, sapendo che erano diversi ed entrambi matematicamente accettabili?

- Un numero che finisce per 0 è divisibile per 10.
- Quindi $M + 5$ è il prodotto di 5 per un numero pari.
- Se aggiungiamo 5 a un numero che finisce con un 5, la sua ultima cifra diventa 0.
- Quindi $M + 5 = 5(K + 1)$.
- Quindi è multiplo di 10.
- Possiamo scrivere $M = 5K$.
- $K + 1$ è pari, dato che K è dispari.
- M è dispari e multiplo di 5, quindi la sua cifra di destra è un 5.

Il settimo incontro: dimostrazioni

“L’incontro sulle dimostrazioni è stato il più interessante perché non avevo mai fatto un’attività del genere!”

“L’incontro che mi è piaciuto di più è stato quello sulla dimostrazione di teoremi perché mi affascinavano i ragionamenti.”

“L’incontro sulle dimostrazioni è stato il più interessante perché dovevamo porci in prima persona davanti a domande di ragionamento e questo ha reso la lezione anche più divertente.”

L’ottavo incontro: questionario di valutazione

Nell’ultimo incontro, oltre al questionario di valutazione del Corso (strumento fondamentale per raccogliere la voce più importante sul Corso stesso, ovvero quella dei ragazzi) è stato deciso di fare un accenno ad un argomento “nuovo” a scelta degli studenti (in uno dei due corsi crittografia, nell’altro geometrie non euclidee).

QUESTIONARIO DI VALUTAZIONE

A quali incontri hai partecipato?

3. Riguardo agli incontri a cui non hai partecipato, da quali fattori è stata determinata la tua scelta?
4. Perché ti sei iscritto/a per partecipare a questi incontri?
5. Ti sei pentito/a di esserti iscritto/a a questi incontri? Gli incontri hanno soddisfatto le tue aspettative iniziali?
6. Quali incontri ti hanno maggiormente soddisfatto/interessato? Perché?
7. Quali incontri ti hanno soddisfatto/interessato di meno? Perché?
8. Gli incontri fatti ti hanno fatto cambiare qualche idea riguardo alla matematica?
9. Cosa ricorderai di questa esperienza?
10. Tornassi indietro la rifaresti? Perché?
11. Ti sentiresti di consigliarla ad altri ragazzi della tua età? Perché?
12. Da 0 a 10 che voto daresti all'esperienza fatta? (Puoi anche dare voti diversi su aspetti diversi) Puoi motivare questo voto?
13. Infine che suggerimenti daresti per migliorarla?

2. Perché ti sei iscritto/a per partecipare a questi incontri?

Si possono riconoscere alcune tipologie di risposta:

- Per un orientamento migliore
- Per migliorare la propria preparazione
- Per una generica utilità futura
- Per interesse agli argomenti
- Per curiosità sull' "atmosfera" universitaria
- Perché molti dalla propria scuola hanno avuto bisogno all'Università di frequentare i precorsi
- *"Per vedere la preparazione della Prof che ho avuto in questi anni"*

Un caso, a nostro modo di vedere, di orientamento positivo nonostante il rifiuto di fare matematica

“Il 2, 3, 4 incontro mi sono piaciuti, le lezioni erano simili a quelle solite, non svolte come dibattiti”

“Il primo mi è piaciuto meno perché era basato unicamente su nostre deduzioni”

“Ricorderò che in matematica esistono troppe formule”

“Tornassi indietro lo rifarei perché mi ha fatto capire che il mio futuro non si baserà sulla matematica”

3. Ti sei pentito/a di esserti iscritto/a a questi incontri? Gli incontri hanno soddisfatto le tue aspettative iniziali?

Nessuno si è pentito della scelta fatta e tutti si dichiarano soddisfatti o molto soddisfatti ma alcuni avevano aspettative diverse:

"Le mie aspettative erano quelle di approfondire e sono state mantenute; pensavo però di studiare anche cosa a me nuove, cosa che non è accaduta."

"Non mi aspettavo degli incontri di tipo dibattito, ma diciamo di tipo un po' più scolastico. Veramente la sorpresa è stata positiva, perché dopo tutto le cose di cui parliamo le abbiamo già studiate a scuola."

6. Gli incontri fatti ti hanno fatto cambiare qualche idea riguardo alla matematica?

La maggioranza dice di sì, di aver cambiato opinione, ma si ritrovano tutte le possibilità:

"No, più o meno è rimasta immutata."

"Ho sempre ritenuta che la matematica sia un'interessante e complicata materia, questo corso non ha fatto altro che rafforzare questa mia opinione."

"Sì che è molto più complicata di quanto pensassi, ma anche più interessante."

7. Cosa ricorderai di questa esperienza?

“L’approfondimento di cose spesso date per scontato”

“I 10 minuti di pausa”

“La mia prima volta in un’aula universitaria”

“Ricorderò di chiedermi il perché di ogni cosa nel corso dei miei studi futuri”

“Nello specifico non lo so, sicuramente avrò un ricordo positivo”

“Il più possibile!”

“In una sola parola tutto”

9. Ti sentiresti di consigliarla ad altri ragazzi della tua età? Perché?

"Sì, è sempre un'esperienza! Se risulterà positiva vorrà dire che c'è un profondo interesse, se negativa avrà fatto capire che non è la strada giusta da seguire. Perché non capire cosa vogliamo fare nella vita?"

"La consiglierei perché può in qualche modo aiutare a superare certi pregiudizi tipicamente liceali sul vedere la matematica come 'materia che insegna a fare i conti' "

11. Infine che suggerimenti daresti per migliorarla?

I suggerimenti sono stati di diverso tipo:

• Sull'organizzazione:

- Organizzare più incontri ma che durino meno delle 3 ore
- Pensare a più sedi per evitare che alcuni debbano venire da lontano
- Fare più corsi di questo tipo per dare la possibilità a più persone di seguirli o per poter fare più cose

• Sui contenuti:

- Dedicare più tempo ai numeri
- Non dedicarsi all'attività di prendere appunti
- Insistere con più forza su aspetti tralasciati al Liceo
- Aggiungere nozioni sullo sviluppo attuale della matematica: dove siamo arrivati?

Grazie

Rispondi ora alle seguenti domande:

a) Cosa vuol dire dimostrare per assurdo?

b) Ti ricordi altre dimostrazioni per assurdo?

c) Perchè (vedi 3) si può supporre che m e n siano primi tra loro?

d) Perchè (vedi 4) si può scrivere $m^2 = 2n^2$?

e) Perchè (vedi 5) se m^2 è pari anche m è pari?

f) Perchè (vedi 6) si può porre $m = 2k$?

g) Da cosa si ricava (vedi 7) che $2n^2 = 4k^2$?

h) Perchè (vedi 8) allora n^2 è pari?

i) Perchè (vedi 9) allora n è pari?

j) Hai già usato nella dimostrazione il ragionamento al punto precedente?

k) Al punto 10 si ricorda che n è dispari. In quale punto l'avevamo dedotto? Perchè?

l) In cosa consiste l'assurdo?

m) Perchè il teorema è dimostrato?

Problema 2.

Quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false? spiega perché.

1. Se m e n sono multipli di 3 allora anche $m+n$ è multiplo di 3.

2. se m è multiplo di 3 e n è multiplo di 2 allora $m+n$ è multiplo di 5.

3. Se m e n sono multipli di 2 allora o m è multiplo di n oppure n è multiplo di m.

4. Se m e n sono multipli di 2 allora $m+n$ è multiplo di 4.