

# La frazione

## Confronto tra i testi italiani e finlandesi per la scuola media inferiore

In questo piccolo lavoro cercherò di analizzare a grandi linee i percorsi con cui vengono presentate le frazioni alle scuole medie inferiori nei libri di testo in Italia e in Finlandia. Mi rendo conto che il lavoro è di per sé soggetto a banali generalizzazioni: i percorsi sull'argomento che gli insegnanti scelgono in classe sono molteplici, dettati anche dalle caratteristiche dei propri alunni.

È però possibile delineare molto chiaramente come i libri di testo italiani per le scuole medie propongono l'argomento delle frazioni, perchè non ci sono sostanziali differenze tra un autore e l'altro (almeno per quanto riguarda i testi più diffusi); lo stesso discorso vale per i testi finlandesi che ho consultato, tutti accomunati dallo stesso stile nel presentare questo argomento.

Se la presentazione della frazione è coerente a livello nazionale, si possono invece sottolineare alcune differenze confrontando i due metodi.

### Il percorso italiano a grandi linee

Gli studenti italiani familiarizzano con i numeri decimali e con le frazioni alla fine della scuola elementare. In questo livello scolastico si imparano a svolgere le quattro operazioni con numeri con la virgola, si impara lo spostamento a destra e a sinistra della virgola durante le moltiplicazioni e le divisioni per 10, 100, 1000 ..., viene loro presentato in situazioni concrete il concetto di frazione, ovvero di porzione di un intero (torte, mele etc.), si fa uso del concetto di percentuale.

Alla fine delle elementari si pensa che la maggior parte degli studenti sappia risolvere semplici esercizi su questi temi. Talvolta però le maestre superano gli obiettivi minimi e arrivano addirittura alla somma di frazioni.

Le frazioni alle scuole medie sono uno degli argomenti più importanti, e si introducono nel secondo quadrimestre della prima. Il percorso di aritmetica del primo anno segue a grandi linee l'iter qui sotto riportato:

- ripasso delle quattro operazioni
- considerazioni sulla divisibilità e sui multipli
- tecniche per la determinazione del maggiore divisore e del minore multiplo tra due o più numeri tramite la scomposizione in fattori primi
- le frazioni e le operazioni con le frazioni.

Il punto di arrivo di questo percorso è la risoluzione di espressioni aritmetiche in cui siano inserite le seguenti difficoltà: le parentesi, le operazioni, le frazioni, le potenze.

Un esempio tipico di quello che si chiede ai ragazzi di saper fare alla fine del primo anno può essere questo:

$$\left[ \left( 3 - \frac{27}{8} \cdot \frac{2}{3} \right)^2 - \left( \frac{7}{5} - 1 \right) + \frac{2}{25} \cdot \left( \frac{3}{4} + \frac{7}{6} - \frac{2}{3} \right) \right] : \frac{7}{20} =$$

Credo che sia esperienza di tutti i docenti delle scuole medie la lentezza con la quale i ragazzi imparano a risolvere le espressioni con le frazioni. Pertanto si dedica molto tempo a questo argomento, molti esercizi, ma nonostante ciò riamangono molte vittime sul campo. Gli errori sono di tutti i tipi, ma tra tutti ce n'è uno che vorrei qui sottolineare: i ragazzini di 11-12 anni spesso hanno difficoltà già nella scrittura di una stringa come quella sopra, cioè hanno una grafica ancora disordinata e questo li porta a sbagliare. Però, magari, avevano capito!

Da tantissimi anni in Italia gli specialisti sottolineano che l'addestramento alle espressioni non è particolarmente formativo. Non so spiegarmi bene perchè questo messaggio non passi.

Il tema delle frazioni ricorre anche nella risoluzione di problemi, dove vengono distinti i seguenti casi:

1. Calcolare la frazione di un numero:  
*I  $\frac{3}{7}$  dei 21 alunni della classe IB hanno contratto il morbillo. Quanti sono gli alunni con il morbillo?*
2. Calcolare un numero sapendo che una data frazione di esso ha un valore assegnato:  
*In una classe sono assenti 6 alunni, cioè  $\frac{3}{13}$  del totale. Quanti sono gli alunni in quella classe?*
3. Determinare due numeri conoscendo la loro somma e sapendo che uno di essi è una data frazione dell'altro:  
*Maria e nora possiedono insieme 45 animaletti di pelouche. Nora ne  $\frac{2}{3}$  di quelli di Mara. Quanti animaletti ha ognuna di loro?*
4. Determinare due numeri conoscendo la loro differenza e sapendo che uno di essi è una frazione dell'altro:  
*Trova due numeri sapendo che la loro differenza è 30, e che uno è  $\frac{4}{7}$  dell'altro.*  
(a me colpisce la spiegazione: *per calcolare due numeri conoscendone la differenza e sapendo che uno è una data frazione dell'altro, si divide tale differenza fra i termini della frazione e si moltiplica poi il quoziente ottenuto rispettivamente per il numeratore e per il denominatore*<sup>1</sup>.  
Io non ho studenti in grado di capire una frase così).

Durante la classe prima non viene generalmente trattato approfonditamente il legame che c'è tra la frazione e il numero decimale; si rimanda alla seconda media dove si presentano le modalità per passare dall'una all'altra scrittura, sia nel caso di numeri decimali limitati che illimitati, facendo osservazioni sulla scomposizione in fattori primi dei denominatori. A questo punto del percorso si propongono le approssimazioni per eccesso o per difetto dei numeri decimali (l'argomento viene in genere già parzialmente visto alle scuole elementari).

Durante i successivi due anni i ragazzi svolgono operazioni con le frazioni nell'ambito di diverse "unità di apprendimento". In alcune unità la frazione interviene a complicare il calcolo quando si pensa che i concetti fondamentali dell'argomento siano stati assimilati. Per esempio in terza si insegna ad operare con i numeri relativi: si parte da operazioni con interi relativi e si passa poi a svolgere esercizi analoghi con le frazioni (ancora espressioni); quando si presenta l'algebra prima si impara a sommare monomi simili con coefficienti interi, poi si comincia a farlo anche quando i coefficienti sono frazionari (e di nuovo lunghe espressioni).

### **Alcune considerazioni**

Prima di passare a descrivere brevemente il percorso finlandese vorrei fare un paio di considerazioni:

1. Nell'insegnamento tradizionale delle frazioni c'è un salto improvviso di difficoltà: si passa da esercizi molto semplici in cui si chiede di colorare una parte (tutti la capiscono), alle operazioni con le frazioni per le quali si chiede di mettere in campo più conoscenze: tabelline, multipli, scomposizioni, divisibilità... Ho la convinzione, anche per esperienza personale, che quando si passa da una presentazione molto semplice ad una improvvisamente più complessa non tutti riescono a seguire il salto. Come vedremo sotto i finlandesi continuano per molto tempo a convincere gli studenti sull'opportunità della scrittura frazionaria in contesti problematici diversi. Solo alla fine del percorso svolgono espressioni con frazioni senza specificare da quale situazione queste espressioni siano saltate fuori.
2. Nel passaggio alle quattro operazioni con le frazioni c'è l'inconveniente che l'addizione, cioè

---

<sup>1</sup> Il testo che mi è capitato sottomano per questi esempi è il Flaccavento Romano, attualmente adottato da un terzo degli insegnanti delle scuole medie. Ma è lungi da me l'idea di calunniarlo: non cambia niente prendendo un altro autore, tra quelli più diffusi.

l'operazione più amata dagli studenti, i quali vi ricorrono anche quando ci sarebbero scorciatoie o addirittura quando non è richiesto, diventa l'operazione più difficile da eseguire (a questo proposito è così appropriata la domanda del professor Villani "*perchè per il prodotto di due frazioni si applica la regola di calcolo naturale mentre per la somma non si applica la corrispondente regola naturale?*", in Cominciamo da Zero).

3. Il modo con cui si eseguono le operazioni con le frazioni viene presentato soltanto in prima media. Chi lo capisce, o più semplicemente lo studia, bene, chi rimane indietro si porta avanti una lacuna con la quale dovrà fare i conti a più riprese. I finlandesi, come dirò sotto, spiegano le operazioni con le frazioni tre volte, una volta alla fine delle elementari, un'altra volta in prima media e infine ancora in terza media, ripartendo praticamente dall'abc tutte le volte. Il percorso è piuttosto snello, quindi non porta via molto tempo questa ripetizione.

### **In Finlandia**

Rispetto al primo laboratorio che ho svolto per questo corso, posseggo adesso due libri di testo per le scuole medie e alcuni volumi per la scuola elementare finlandese. Quello che dirò è una sintesi di quello che ho trovato nei vari volumi che sto consultando e che in parte sto sperimentando in classe sulla pelle dei miei studenti, con risultati positivi, secondo me.

La differenza fondamentale nel metodo finlandese è che la frazione è un argomento meno isolato: viene inserito armonicamente nella trattazione di concetti più generali, come i rapporti, le percentuali e la proporzionalità. Le situazioni problematiche proposte sono molto varie, ma sempre vicine al mondo concreto e conosciuto dai ragazzi. L'alunno così riesce a gestire mentalmente il significato di quello che viene richiesto dai problemi e la parte puramente addestrativa è mascherata meglio.

### **La frazione è una divisione**

Partiamo dall'inizio: la scrittura con la linea di frazione viene presentata (questo fin dalle elementari) come un modo per scrivere una divisione, un'alternativa ai due puntini: la corrispondenza della frazione con la scrittura decimale rimane esplicitata molte volte, così come tra una divisione coi due puntini e il suo risultato.

Mi rendo conto che è una banalità. Ma i nostri studenti usano tante frazioni prima di scoprire la relazione che lega questa scrittura con numeri che sono a loro più familiari, quelli con la virgola. Quando si mostra che le frazioni permettono di ottenere tutti i numeri decimali si genera un effetto sorpresa!

### **Le frazioni improprie**

Riguardo alla distinzione tra le frazioni proprie e improprie, viene usata la cosiddetta scrittura mista per rappresentare le frazioni improprie, cioè si tengono gli interi come interi e si affianca la parte dopo la virgola con la frazione propria rimanente. Ad esempio:

(mi dicono colleghi di questo corso che si faceva così anche nei vecchi testi italiani, anche se si aggiungeva un piccolo + tra gli interi e la frazione rimanente).

Sulle frazioni "apparenti" non viene detto niente.

### **Le frazioni equivalenti**

La novità rispetto al nostro metodo si basa sull'introduzione di una parola che non abbiamo nel nostro vocabolario.

In pratica viene insegnato che si ottengono frazioni equivalenti ad una data, attraverso due tipi di operazioni: semplificazioni ed “espansioni”<sup>2</sup>

Si semplifica dividendo numeratore e denominatore per uno stesso numero, in genere si sceglie un divisore intero, ma non è necessario. Il divisore con il quale si semplifica viene indicato in alto a destra della frazione, dietro ad una parentesi (per distinguere da un esponente).

Si “espande” moltiplicando numeratore e denominatore per uno stesso numero. Il numero col quale si allarga viene indicato in alto a sinistra della frazione

(collegli di questo corso di perfezionamento mi dicono che anche studenti rumeni usano questa simbologia per trasformare una frazione in un'altra equivalente).

Io trovo questa scrittura molto efficace coi ragazzi: nella mia prima ho insegnato così la trasformazione di una frazione in un'altra equivalente e sono soddisfatta del risultato. Mi sono accorta invece che nella mia terza, addestrata da altri docenti negli anni precedenti, i ragazzi riconoscono la frazione equivalente solo quando si semplifica.

Ovviamente anche gli italiani “espandono” le frazioni, quando le devono sommare tra loro. Però sono pochissimi gli studenti che si rendono conto che stanno moltiplicando sopra e sotto per uno stesso numero, e quindi per una frazione equivalente ad 1.

Ho intervistato diversi ragazzi di classi diverse i quali mi spiegano che per sommare due frazioni con diverso denominatore loro agiscono tramite i seguenti passaggi:

1. Trovano il minimo comune multiplo tra i denominatori, con le tabelline (nessuno lo fa con il metodo della scomposizione)
2. Dividono il m.c.m. per il numeratore
3. Moltiplicano il numeratore per il quoziente ottenuto.

Detto con le loro parole suona così: si divide sotto e si moltiplica sopra. È difficile conservare in questa sequenza il significato di frazione equivalente.

### **L'ordinamento dei razionali**

Una certa attenzione viene riservata all'ordinamento dei razionali, ma in modo del tutto analogo a come facciamo in Italia, seppure con esercizi un po' meno formali (ma questo è vero per tutti gli argomenti della serie finlandese).

### **I contesti che suggeriscono la scrittura frazionaria**

La differenza più sostanziale del metodo finlandese sta nel fatto che si passa molto tempo a convincere gli alunni che la scrittura sotto forma di frazione è una buona rappresentazione in diverse situazioni in cui intervengano dei rapporti.

Il contesto migliore per capire che c'è una parte che viene rapportata all'intero è quello della probabilità e della statistica, che permette anche di proporre problemi il cui significato è comprensibile da tutti.

Al primo anno delle medie, prima di introdurre le operazioni con le frazioni, si lavora su problemi di questo tipo:

1. *Nella scorsa stagione il calciatore Niino Kivimaki ha realizzato 100 goal su 124 tiri in porta. Calcola la percentuale di successo dei suoi tiri.*
2. *(Immagine di un articolo di giornale) Negli anni ottanta i  $\frac{2}{5}$  dei nuovi nati era il primo figlio della propria madre.*

---

<sup>2</sup> Espandere è un termine che rispecchia la traduzione letterale della parola finlandese usata per questa operazione. Gradirei sentire altre proposte in merito. Forse allargare, ingrandire, o, in antitesi a semplificare, complicare?

*Domanda: alle medie ci sono 450 alunni. Quanti di loro potrebbero essere nati come primogeniti, in base alla notizia data dal giornale?*

La cosa particolare di uno dei due testi che possiedo è che i problemi del tipo riportato precedono l'introduzione alle quattro operazioni con le frazioni. In questi problemi, gli esempi scelti sono ben curati, in modo che il significato concreto sia particolarmente chiaro per ragazzi di questa età; il concetto di rapporto è suggerito dalla situazione e si opera con la frazione sull'intero.

In questo ambito numerosi esercizi riguardano il calcolo della percentuale. Anche qui c'è una notevole differenza con la tradizione editoriale italiana, che al calcolo della percentuale ritaglia un angolino dopo la presentazione delle proporzioni (*questo* sta a *quello* come *x* sta a *cento*). Credo che la maggior parte dei cittadini italiani calcolino le percentuali con le proporzioni, , mentre non credo che sia la strategia più diffusa tra i cittadini finlandesi.

### **Operazioni con le frazioni**

Ovviamente anche i finlandesi ad un certo punto devono arrivare alla fatidica somma di frazioni con il calcolo del m.c.m. In nessuno dei testi consultati ho trovato il trucchetto del calcolo del m.c.m. mediante la scomposizione in fattori primi.

Il calcolo del multiplo comune viene fatto a mente, anche perchè nella maggior parte delle espressioni è facilmente identificabile (questo è vero anche per la maggior parte delle espressioni italiane). Se l'individuazione del minimo multiplo comune è difficoltosa si suggerisce di moltiplicare i numeratori tra loro: forse non è il primo, ma è senz'altro un multiplo comune.

### **Numerosi ripassi**

Sulle operazioni con le frazioni, come ho detto, vengono fatti numerosi ripassi durante gli anni. Io trovo questa una ottima strategia. Penso che sia meno efficace fare un argomento molto bene una volta, con tanti esercizi, piuttosto che farlo più agilmente diverse volte secondo una strategia didattica ricorsiva. Generalmente i calcoli con le frazioni in Italia non rientrano tra gli insegnamenti ricorsivi.

### **Metafora del parco giochi**

Vorrei chiudere raccontando di parchi giochi. I bambini sono fatalmente attratti dal portare i sassi, la terra, la sabbia in cima agli scivoli e farla poi scivolare giù. Ovviamente noi mamme ci opponiamo, o pensiamo male di chi non impedisce al proprio bambino di comportarsi così, perchè si sporcano, sporcano i giochi, sollevano polvere.

Quest'estate sono andata in un parco giochi tedesco. Il castello di legno era attrezzato con ogni sorta di paletta, di secchiello e di carrucola per portare la sabbia da sotto a sopra il castello. Da sopra poi si poteva rovesciare la sabbia con ogni sorta di mulino, tubo, pala rotante, catapulta. Poichè il tutto si svolgeva tra due livelli si sviluppava una collaborazione tra i bambini sotto e quelli sopra, che favoriva la socializzazione, anche tra mamme.

Perchè dico questo? Perchè forse non si può lamentarsi tanto dei piccoli. E forse nemmeno degli studenti che non capiscono. Loro sono un dato di fatto. Credo che nell'insegnamento della matematica si presti poco orecchio alle loro difficoltà. Se la frazione è un incubo per la maggior parte dei nostri studenti, forse c'è qualcosa di oggettivamente difficile per loro.