CORSO DI PERFEZIONAMENTO IN
«STRATEGIE DIDATTICHE PER PROMUOVERE UN ATTEGGIAMENTO POSITIVO VERSO LA MATEMATICA E LA FISICA»

STUDIARE MATEMATICA: IL PROGETTO P.O.R.T.A. DELL'UNIVERSITÀ DI PISA

Equazioni e disequazioni: proposte integrative

Relazione di Lucia Berni

1 Introduzione

Il progetto P.O.R.T.A. (Progetto Orientamento Tasso Abbandoni) nasce dall'esperienza dei precorsi organizzati dall'Università di Pisa.
I precorsi, organizzati con l'obiettivo di aiutare gli studenti a superare le difficoltà del passaggio Scuola Superiore – Università, hanno una durata di poche settimane e una partecipazione di 100-150 studenti per classe. Gli studenti partecipanti hanno evidenziato che:

- un intervento più efficace dovrebbe essere più diluito nel tempo (tempo che serve agli studenti per riflettere sui concetti appresi, tempo che serve per il dialogo studenti-docenti);
- tali incontri potrebbero essere utili anche come orientamento.

Il progetto P.O.R.T.A. nasce da queste considerazioni con il fine di ridurre le non iscrizioni e gli abbandoni relativi ai corsi di studio universitari, non iscrizioni e abbandoni dovuti spesso a:

- scarsa conoscenza dei corsi di studio universitari;
- lacune nella preparazione;
- approccio con materie nuove.

Il progetto P.O.R.T.A. è rivolto agli studenti delle ultime due classi della Scuola Superiore.

Nell'ambito del progetto P.O.R.T.A. sono stati organizzati, dalla Facoltà di Matematica dell'Università di Pisa nell'a.s. 2006/2007, due precorsi rivolti a studenti volontari delle ultime due classi delle Scuole Superiori.
Sono state coinvolte nove scuole delle province di Pisa, Lucca e Livorno con un tetto massimo stabilito di 70 alunni (le richieste hanno superato abbondantemente il tetto massimo). Sono stati effettuati 8 incontri pomeridiani per un totale di 24 ore di lezione. Proprio per avere maggiore certezza della motivazione degli studenti partecipanti, si è stabilito che il corso, a differenza di altri, non desse crediti universitari.
Gli argomenti affrontati e la metodologia usata sono volti a intervenire sulle difficoltà che si ritrovano nel passaggio Scuola Superiore – Università ovvero:

- carenze nelle conoscenze e abilità di base;
- carenze in abilità trasversali;
- atteggiamento negativo nei confronti della disciplina.

In dettaglio, gli argomenti affrontati sono stati i seguenti:

CONTENUTI	ABILITÀ TRASVERSALI
NUMERI	Definire. Dimostrare. Linguaggio e comunicazione. Problem solving
EQUAZIONI E DISEQUAZIONI	Definire. Dimostrare. Linguaggio e comunicazione. Problem solving
TRIGONOMETRIA	**SEGUIRE UNA LEZIONE PRENDERE APPUNTI**
TRIGONOMETRIA	**SISTEMARE IL MATERIALE**

	STUDIARE
Piano cartesiano	**CAMBIARE RAPPRESENTAZIONE**
Equazioni e disequazioni	**DEFINIZIONI**
Aritmetica, …	**DIMOSTRAZIONI**
Aritmetica, …	**LINGUAGGIO E COMUNICAZIONE**

La metodologia scelta è quella di:
- privilegiare problemi ed esercizi;
- favorire sia il lavoro individuale che quello collettivo;
- favorire la discussione tra gli studenti;
- lasciare tempo per riflettere;
- prestare attenzione ai processi;
- non ignorare (non censurare) processi o prodotti scorretti;
- sintetizzare elementi chiave alla fine.

2 Scopo della relazione

Questo mio lavoro è volto a fare qualche proposta riguardo all'argomento "equazioni e disequazioni".
Cercherò di focalizzare i vari obiettivi che il materiale proposto agli studenti dovrebbe centrare e presenterò una tipologia di materiale (volto ad integrare quello esistente) per ciascuno dei suddetti obiettivi.
Farò riferimento al materiale usato nell'attività del progetto P.O.R.T.A. al capitolo "equazioni e disequazioni" riportato in appendice.
È da tenere in conto il fatto che io non conosco il risultato dell'attività svolta salvo alcune impressioni riportate dagli autori.

3 Difficoltà di approccio, misconoscenze, ecc. degli studenti riguardo alle equazioni (disequazioni)

- Un'equazione (disequazione) è spesso interpretata dagli studenti semplicemente come la richiesta di trovare le soluzioni: non facilmente riescono a leggerla in altro modo. Spesso non leggono neppure i testi.
- Di fronte ad un'equazione (disequazione) si nota che gli studenti hanno la preoccupazione di sapere a memoria i vari algoritmi risolutivi. Essi non hanno strumenti per ricostruirli perché non si sono preoccupati del processo logico che ha portato a trovare tali algoritmi.
- Da quanto sopra emerge la difficoltà di definire cos'è una soluzione dell'equazione (disequazione).
- Difficilmente gli studenti riflettono sul fatto che la possibilità di manipolare l'espressione di un'equazione (disequazione) è legata alle proprietà numeriche dell'insieme in cui si opera.

4 Obiettivi che il materiale proposto deve centrare

Occorre recuperare il **significato di equazione** (disequazione): gli studenti devono essere indotti a pensare all'equazione (disequazione) come a una condizione che definisce un possibile sottoinsieme numerico (l'insieme delle soluzioni) nell'ambito dell'insieme numerico in cui essa viene espressa.
Occorre recuperare il **significato di soluzione**: spesso gli studenti sono così preoccupati di "trovare" le soluzioni in base ai loro algoritmi che non si curano di **cosa significhi**, per una soluzione, **"soddisfare" un'equazione** (disequazione) al punto che, se si dà loro l'equazione

(disequazione) già scomposta in fattori semplici, si mettono a manipolarla per ritrovare (se possibile) la forma consueta che consenta loro di applicare un algoritmo noto.
È perciò necessario indurli a frenare questo loro primo impulso e orientarli nel **valutare criticamente il problema che è posto loro davanti dall'equazione** (disequazione). Ad esempio si può chiedere loro di valutare se l'equazione (disequazione) data può avere o meno soluzioni e in che sottoinsieme numerico. Solo partendo dallo sviluppo del loro senso critico si può aspirare a che essi raggiungano la consapevolezza che la possibilità di trovare un modo di risolvere un'equazione (disequazione) sia legata al padroneggiare le proprietà dell'insieme numerico in cui si opera e non alla capacità di ricordare a memoria l'algoritmo risolutivo (quando esiste).
Occorre recuperare il significato logico della "**manipolazione**" di un'equazione (disequazione) fatta in base alle proprietà dell'insieme numerico in cui si opera (principi di equivalenza), ma anche in base all'esigenza di trovare una forma dell'equazione (disequazione) che ci consenta di dire qualcosa sulle soluzioni.

5 Materiale integrativo proposto

Introdurrò le mie proposte motivandole e dando un esempio dell'esercizio-tipo ad esse associato.

5.1 Significato di equazione (disequazione)

Spesso, nello studio della matematica, le equazioni (disequazioni) non vengono presentate all'inizio come formulazione di un problema con tutte le sue condizioni. Forse è proprio questo che induce gli studenti a vedere l'equazione (disequazione) come un oggetto che va a finire solo in un algoritmo.

La proposta che segue è finalizzata a far leggere agli studenti l'equazione (disequazione) come la traduzione di un problema evidenziando la necessità di individuarne il campo di risolubilità e come questo si ripercuota sull'insieme delle soluzioni.

Riuscire a leggere un'equazione (disequazione) come la traduzione di un problema può indurre gli studenti a prendere l'abitudine di non dare tutto per scontato partendo convinti di saper già come operare, "in automatico", ma impone loro la necessità di porsi degli interrogativi in una forma più consapevole. Infatti, di solito, determinare il campo di esistenza è spesso solo una formalità di cui non sempre gli studenti sono in grado di tener conto.

Esercizi proposti

1° tipo

a. Sia dato il seguente problema: trovare il valore del lato del quadrato di area 9.
Qual è l'equazione che traduce il problema? Qual è l'insieme numerico nel quale devo cercare le soluzioni?

b. Sia dato il seguente problema: trovare un numero reale il cui quadrato sia uguale a 9.
Qual è l'equazione che traduce il problema? Qual è l'insieme numerico nel quale devo cercare le soluzioni?

2° tipo.

a. Considera la disequazione: $\frac{1}{x^2} > 1$

Essa esprime il seguente problema: trovare, in unità di misura del Sistema Internazionale, a quale distanza due cariche elettriche positive di 1 Coulomb ciascuna si respingono con una forza superiore a $9 \cdot 10^9$ Newton.
Qual è l'insieme numerico nel quale devo cercare le soluzioni? Trova le soluzioni.

b. <u>Considera ora il seguente problema</u>**:** quali sono i numeri reali x tali che l'inverso del loro quadrato sia maggiore di 1?.

La disequazione di cui sopra è traduzione anche di questo problema. Qual è l'insieme numerico in cui devo cercare le soluzioni? Trova le soluzioni.

<u>Considerazioni</u>

Quando le equazioni sono traduzioni di problemi, l'insieme numerico nel quale si devono cercare le soluzioni (insieme di risolubilità) viene spesso ad essere un sottoinsieme del campo di esistenza dell'equazione trovata a causa delle condizioni al contorno imposte dal problema.
Perciò, solitamente, un problema è correttamente tradotto da un sistema. È precisamente quello che avviene nei due casi "a" degli esercizi proposti sopra. Dunque le richieste inerenti ai problemi sopra esposti possono essere formulate anche in altro modo.

5.2 Significato di soluzione; equivalenza di due equazioni (disequazioni)

<u>Esercizi proposti</u> (in riferimento all'esercizio 1 dell'attività 1)
(da <u>premettere</u> all'es. 1 dell'attività 1, infatti qui si forniscono già valori significativi, mentre negli esercizi successivi si lascia la ricerca ai ragazzi))

1. *"La soluzione deve rendere vera l'uguaglianza (disuguaglianza)"*
   - Esempio
   Considera la seguente disequazione in cui $x \in \mathbb{R}$:
   $\sqrt{2x-1} > x-6$
   verifica per sostituzione quale, o quali, dei seguenti valori soddisfano la disequazione richiesta: $x = 5;\ \ x = 0;\ \ x = 13.$
   - Altro esempio:
   Considera la seguente equazione in cui $x \in \mathbb{R}$:
   $$\frac{x^2+x-2}{x+2} = 0$$
   verifica per sostituzione quale, o quali, dei seguenti valori soddisfano la disequazione richiesta: $x = 1,\ x = -1,\ x = -2$

   Questo tipo di attività può essere utile a capire "operativamente" che significa soluzione.

2. *"Incentivo a non ricorrere all'algoritmo risolutivo"*
   Proporrei varie forme di equazioni per le quali sia loro <u>evidente</u> che non possono usare gli algoritmi risolutivi a loro noti:
   - Trova un valore di $x \in \mathbb{R}$ che rende vera la seguente equazione: $2^{x+1}=32$.
     (inviterei gli studenti a non usare i logaritmi)
   - Trova un valore di $x \in \mathbb{R}$ che rende vera la seguente equazione[1]: $(x-3)(x^5+3x^3+1)=0$:
   - Siano *m* ed *n* due numeri interi. Trova una coppia di valori *m, n* che rendano vera la seguente equazione: $(n-5)(m-8)=10$. Esistono altre coppie di numeri interi che soddisfano l'equazione data ? E' possibile trovarle tutte ?

[1] Fa parte della tipologia $P(x)\ (x-a) = 0$ che è già stata messa nella raccolta degli esercizi, ma espliciterei meglio il $P(x)$ in modo che sia subito evidente che non possono "svolgerla".

Esercizi proposti (*in riferimento agli esercizi 1 e 2 dell'attività 1*)

3. *"Prodotto di monomi"*

   Prima attività:

   - Trova i valori di $x \in \mathbb{R}$ che rendono vera la seguente uguaglianza: $(x-1)=0$
   - Trova i valori di $x \in \mathbb{R}$ che rendono vera la seguente uguaglianza: $3(x-1)=0$
     Qual è la proprietà dei numeri reali cui fai riferimento?
   - Trova i valori di $x \in \mathbb{R}$ che rendono vera la seguente uguaglianza: $3(x-1)(x+1)=0$
     Qual è la proprietà dei numeri reali cui fai riferimento?
   - Trova i valori di $x \in \mathbb{R}$ che rendono vera la seguente uguaglianza: $3(x^2-1)=0$
     Qual è la proprietà dei numeri reali cui fai riferimento?

   Tra le quattro equazioni scritte sopra, ce ne sono alcune equivalenti tra loro. Quali? Che significa equivalenti?

   Seconda attività:

   - Trova i valori di $x \in \mathbb{N}$ che rendono vera la seguente uguaglianza: $(x-1)=0$
   - Trova i valori di $x \in \mathbb{N}$ che rendono vera la seguente uguaglianza: $3(x-1)=0$
     Qual è la proprietà dei numeri interi cui fai riferimento?
   - Trova i valori di $x \in \mathbb{N}$ che rendono vera la seguente uguaglianza: $3(x-1)(x+1)=0$
     Qual è la proprietà dei numeri interi cui fai riferimento?
   - Trova i valori di $x \in \mathbb{N}$ che rendono vera la seguente uguaglianza: $3(x^2-1)=0$
     Qual è la proprietà dei numeri interi cui fai riferimento?

   Tra le quattro equazioni scritte sopra, ce ne sono alcune equivalenti tra loro. Quali? Che significa equivalenti?

   Lo scopo di questi esercizi è duplice:

   - arrivare a comprendere che avere un'equazione (disequazione) ad una incognita scomposta in fattori semplici è già il prodotto finale dell'algoritmo risolutivo (devo solo applicare le proprietà dei numeri dell'insieme di definizione dell'incognita per trovare l'insieme delle soluzioni);
   - riconoscere due equazioni equivalenti in base al fatto che esse hanno lo stesso insieme delle soluzioni.

Esercizi proposti (*in riferimento all'esercizio 2 dell'attività 1*)

4. *"Equivalenza inconsueta"*

   Un modo inconsueto di operare, ma che può aiutare a riflettere sull'equivalenza di due equazioni (disequazioni) indipendentemente dalla necessità di operare su di esse con i principi di equivalenza, può essere il seguente:

   - Date le seguenti due disequazioni: $(x-3)(x+2)>0 \quad (x-5)>0$ esiste un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ nel quale esse sono equivalenti?
   - Date le seguenti due disequazioni: $(x-3)(x+2)>0 \quad (x-5)<0$ esiste un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ nel quale esse sono equivalenti?
   - Date le seguenti disequazioni individua il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ in cui ciascuna di esse è soddisfatta:
     $x>2$ e $-x>-2$
     Esse sono o non sono equivalenti? Perché?

5.3 Proprietà dei numeri reali e principi di equivalenza (Attività 2)

<u>Esercizi proposti</u> *(in riferimento all'esercizio 5 dell'attività 2)*

5. "La retta orientata"

Prima di proporre "tranelli" proporrei un'attività volta a "visualizzare" le proprietà dei numeri reali che ci consentono di "manipolare" le equazioni e, soprattutto, le disequazioni. Anche se gli studenti del quarto e quinto anno delle scuole superiori dovrebbero aver raggiunto il grado di astrazione proposto dalle domande dell'esercizio 5 Attività 2, non c'è da stupirsi che spesso non sia così.
Se è vero che la visualizzazione potrà essere loro proposta in fase di correzione, è anche vero che favorire la loro autonomia e stimolarli a ragionare prima di dare risposte affrettate non è da sottovalutare.

1. Disegna, sulla *retta* orientata, due numeri reali diversi da zero a e b tali che $0<a<1$ e $b>1$.
   Successivamente disegna:
   - $1/a$ e $1/b$
   - $-a$ e $-b$
   - a^2 e b^2
2. Disegna, sulla retta orientata, due numeri reali diversi da zero a e b tali che $a>1$ e $-1<b<0$.
   Successivamente disegna:
   - a^2 e b^2
   - $-a^2$ e $-b^2$
   - a^3 e b^3

5.4 **Considerazioni personali sul processo logico legato alla ricerca *dell'insieme delle soluzioni: proposte relative all'attività 2 e all'attività 3***

Le attività 1 e 2 si propongono, credo, di far riflettere gli studenti sul fatto che i principi di equivalenza derivino dalle proprietà dei numeri reali e che, partendo da esse io possa cercare di ricondurre l'equazione (disequazione) ad una forma nota.
Per quella che è la mia esperienza, ritengo che gli alunni, sebbene l'abbiano studiato e magari lo sappiano anche ripetere, non siano consapevoli del tutto di questo modo di operare: a mio parere, tale consapevolezza si matura nel corso degli anni.

Ritengo che, sia pure non del tutto consapevolmente, essi attraversino uno scalino intermedio che proporrei di introdurre negli esercizi. Cerco di spiegarmi con degli esempi.

Esempio:
Trova i valori reali di x che rendono vera la seguente uguaglianza: $x^2+1=0$
Prima di passare alla manipolazione dell'equazione in $x^2=-1$ per poi dedurre, dalle proprietà dei numeri reali, che non esistono soluzioni, esiste un processo mentale che porta ad analizzare, nell'ambito del campo di esistenza, i valori assunti dal primo membro e quelli assunti dal secondo membro dell'equazione proposta: il primo membro assume valori positivi $\forall x \in R$, il secondo è nullo $\forall x \in R$.

Esempio:
Trova i valori reali di x che rendono vera la seguente uguaglianza: |x|=x
Anche in questo caso è più immediato, da parte degli studenti, operare sulle proprietà dei numeri reali dell'insieme dei valori assunti dai due membri piuttosto che manipolare l'equazione data per mezzo delle proprietà dei numeri reali. Ovvero: è più semplice capire che $|x|\geq 0$ e quindi che l'equazione ha senso solo per $x\geq 0$ piuttosto che separare l'equazione data nei due sistemi:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x = x \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x = -x \end{cases}$$

perché, a mio avviso, gli studenti trovano difficoltoso leggere nel $-x$ del secondo sistema un numero positivo e, in ogni caso, questo formalismo li confonde e li distoglie dalla mèta.

Allora può essere utile sviluppare queste considerazioni sui valori assunti, nell'ambito del proprio campo di esistenza, dal primo e dal secondo membro di un'equazione (disequazione) (oppure dal numeratore e denominatore di una frazione, oppure dai fattori di un prodotto).
Forse sono questioni di lana caprina ma credo che valga la pena cercare di individuare il processo logico seguito dagli studenti piuttosto che proporre loro il nostro *ex cathedra*. Senza contare che questo tipo di ragionamento sarà di aiuto al momento di passare alle funzioni.
È importante che essi maturino la convinzione che la possibilità di avere soluzioni è legata alla possibilità che i due membri dell'equazione (disequazione) abbiano un insieme di definizione comune e che, in quest'ambito, i valori da loro assunti verifichino l'equazione (disequazione).

In riferimento all'esercizio 6 (e 7) dell'attività 2.
La seguente implicazione è corretta?

$$\frac{2}{x-2} < 3 \quad \textit{allora} \quad 2 < 3(x-2)$$

Esaminando l'insieme immagine del primo membro io posso dedurre subito che esiste un ambito in cui esso è minore di zero e posso dire subito che in questo ambito la disequazione è verificata mentre nella seconda disequazione proposta questo sottoinsieme delle soluzioni non c'è più e così posso subito concludere che l'implicazione è falsa.

Esercizi proposti

Considera la seguente disequazione con $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{x-1} < x-3$

- determina il campo di esistenza del primo membro
- determina i possibili valori assunti, nell'ambito del suo campo di esistenza, dal primo membro
- determina il campo di esistenza del secondo membro
- determina i possibili valori assunti, nell'ambito del suo campo di esistenza, dal secondo membro
- puoi dire qualcosa sull'insieme numerico delle x che rendono vera la disequazione?

Questo tipo di esercizi di ragionamento dovrebbe indicare agli studenti se i principi di equivalenza da essi applicati per trasformare l'equazione (disequazione) in una di forma nota sono stati applicati correttamente. Non sempre possono essere considerazioni definitive.

Se applichiamo le stesse richieste al caso: $\sqrt{x-1} > x-2$ potremo solo dire che, per $1 \leq x < 2$ essa è certamente verificata e che non ha soluzioni per $x<1$.

Questo modo di operare può essere utile, a mio avviso, per riconoscere subito se un'equazione (disequazione) non è risolubile e per fare "previsioni" sull'insieme delle soluzioni. Ma è soprattutto utile quando, trovandosi di fronte ad un caso <u>non</u> affrontabile con un algoritmo noto, si può almeno indicare in quale sottoinsieme possono trovarsi le eventuali soluzioni, o addirittura trovare le soluzioni, ad esempio: $(x-3)(x^4+x^2+1) > 0$ *[vera per* $x > 3$*].*
È comunque un modo di procedere che obbliga gli studenti a riflettere prima di agire, nonché li dovrebbe rendere capaci di dire se il risultato cui sono arrivati è plausibile oppure no.

6 Appendice

PROGETTO PORTA: equazioni e disequazioni

Attività 1

Prova a spiegare cosa è una equazione e cosa è una disequazione:
……………

Esercizio 1

Trovare, se esistono, valori di x che rendono vere e valori di x che rendono false le seguenti uguaglianze:

1. $x^2 + 3x - 1 = 0$
2. $2x + x = x + 5 + x$
3. $(x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) = 0$
4. $x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x = 0$
5. $\sqrt{x} = x - 2$

Esercizio 2

Trovare, se esistono, valori di x e y che rendono vere e valori di x e y che rendono false le seguenti uguaglianze:
1. $x + 2y - 1 = 3x - y$
2. $x^2 + y^2 = x - y^2$

Ora scrivi cosa intendi per soluzione di un'equazione (o disequazione):
……………

Ora scrivi cosa intendi per equazioni (o disequazioni) equivalenti:
……………

Esercizio 3

Costruisci, se possibile, un'equazione di secondo grado, una di terzo e una di quarto che non abbiano soluzioni reali:
……………

Esercizio 4

Costruisci, se possibile:
1. Un'equazione di quarto grado che abbia tra le sue soluzioni 0 e 1.
2. Una disequazione che abbia come insieme di soluzioni l'intervallo aperto (2*;* 3).
3. Una disequazione che abbia come insieme di soluzioni l'intervallo aperto (–1*;* 2) unito la semiretta (5*;*+*1*).

……………

Attività 2

Esercizio 5

Siano *a; b; c* numeri reali arbitrari. Completa con *maggiore* o *minore* le seguenti proposizioni in modo da renderle vere, quando questo è possibile:

1. Se a è maggiore di b allora $a + c$ è .... di $b + c$.

2. Se $a + c$ è maggiore di $b + c$ allora a è .... di b.

3. Se a è maggiore di b allora $a \cdot c$ è .... di $b \cdot c$.

4. Se $a \cdot c$ è maggiore di $b \cdot c$ allora a è .... di b.

5. Se a è maggiore di b allora $\frac{1}{a}$ è .... di $\frac{1}{b}$.

6. Se a è maggiore di b allora a^2 è .... di b^2.

7. Se a^2 è maggiore di b^2 allora a è .... di b.

8. Se a è maggiore di b allora a^3 è .... di b^3.

9. Se a^3 è maggiore di b^3 allora a è .... di b.

10. Se n è un numero naturale e a è maggiore di b allora a^n è .... di b^n.

Esercizio 6

Quali delle seguenti implicazioni sono corrette e perché?

1. Se $\frac{2}{x-2} < 3$ allora $2 < 3(x-2)$.

2. Se $\sqrt{2x+1} > x-1$ allora $2x + 1 > (x-1)^2$.

3. Se $2\sqrt{x} > x$ allora $4x > x^2$.

4. Se $\frac{1}{x} \leq x$ allora $1 < x^2$.

Esercizio 7

Consideriamo la seguente disequazione:

$$\sqrt{x+2} > x$$

Proviamo a risolverla:

$x \geq -2$

Se $x \geq 0$ allora:

$$\begin{cases} x + 2 > x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - x - 2 < 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$x^2 - x - 2 < 0 \qquad \Delta = 1 + 8 = 9 \qquad x_{1,2} = \frac{1+3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$-1 < x < 2$

Se $x < 0$ sempre verificata.

LA SOLUZIONE è . . .

Esercizio 8

Quali relazioni sussistono tra le soluzioni delle seguenti coppie di equazioni (o insiemi di equazioni?

1.	$x^2 - x = x+1$	e	$x^2 - 2x + 1 = 0$
2.	$5x^2 - 3x = \dfrac{x}{3}$	e	$15x^2 - 10x = 0$
3.	$\dfrac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 1 - x} = 0$	e	$x^3 + 2x + 3 = 0$ $x^2 + 1 - x = 0$
4.	$\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2 - 5}$	e	$x + 1 = x^2 - 5$
5.	$(x^3 + x)(x^2 - 3x + 1) = 0$	e	$x^3 + x = 0$ $x^2 - 3x + 1 = 0$
6.	$x(x^3 - 3) = (x^3 - 3)(x^2 + 1)$	e	$x = x^2 + 1$

Attività 3

Esercizio 9

Vogliamo risolvere l'equazione:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

Possiamo supporre $a \neq 0$ (Perché?)
Se $a = 1$ e $b = 0$ la 4 diventa:

$$x^2 + c = 0 \qquad (2)$$

che ha soluzione: ....
Torniamo al caso generale 4. Tentiamo di trasformare l'equazione 4 in una equazione del tipo 2 senza cambiare l'insieme delle soluzioni. Questo perché le equazioni del tipo 2 abbiamo visto che sappiamo come risolverle.
Cominciamo:

$$a(x2 + \frac{b}{a}x) + c = 0 \qquad (3)$$

Vogliamo che il coefficiente di a sia un quadrato, quindi dobbiamo aggiungere ....
E naturalmente dobbiamo aggiungere e togliere per avere un'equazione equivalente (cioè con lo stesso insieme di soluzioni) a quella da cui siamo partiti.
Quindi la 3 diventa: ....
E alla fine troviamo:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Quindi possiamo concludere: ....

Esercizio 11

Risolvere in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni:

- $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$
- $\dfrac{2x - 1}{x + 1} = 0$
- $\dfrac{x}{x^2 - 1} + \dfrac{3x}{x + 1} = 0$
- $|x| = 3$
- $|x^2 - 1| = 1$
- $\left|\dfrac{x^2 + x - 2}{x + 3}\right| = \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 3}$