Università di Pisa

Corso di Perfezionamento

Strategie didattiche per promuovere un atteggiamento positivo verso la matematica e la fisica

Relazione sull'attività di Tirocinio presso la Settimana Matematica

Margherita Ascoli*

* mar.ascoli@gmail.com

Indice

descrizione attività

Ho svolto l'attività di tirocinio all'interno della Settimana Matematica. Sono andata, insieme ad altre quattro perfezionande, al laboratorio 4, dal titolo: "Impossibilità di un sistema democratico". Abbiamo assistito alla lezione iniziale ed alle successive attività, seguendo sia i contenuti che il lavoro nei gruppi di ragazzi.

Il lavoro si è svolto su tre pomeriggi: all'inizio del primo pomeriggio il prof. Paolo Acquistapace ha tenuto la lezione dal titolo "L'impossibilità di un sistema elettorale democratico"; in seguito ha proposto quattro gruppi di lavoro ai ragazzi fornendo del materiale da leggere per ciascun gruppo.

Nel secondo e terzo giorno i ragazzi hanno lavorato per piccoli gruppi sul materiale proposto, leggendo gli articoli forniti dal docente, commentandoli tra loro ed ogni tanto chiedendo spiegazioni al docente o al tutor (oppure a noi perfezionande). Noi abbiamo cercato di fotocopiare i loro appunti sia della lezione che del lavoro di gruppo. Nell'ultima ora i ragazzi hanno esposto quanto appreso. Secondo la mia osservazione hanno lavorato con impegno, leggendo gli articoli e provando a concretizzare quanto leggevano anche con esempi creati da loro.

L'ultimo pomeriggio noi perfezionande abbiamo anche creato un momento in cui parlare con i ragazzi della esperienza fatta e chiedere loro come si erano trovati e cosa pensavano delle lezioni seguite. Gli insegnanti universitari sono stati fatti uscire prima di questo colloquio.

Prima di tutto vorrei fare un piccolo resoconto di quanto scaturito proprio da questa conversazione finale, fatta prima della esposizione, da parte dei ragazzi, dei loro lavori di gruppo.

conversazione con i ragazzi

Inizialmente abbiamo sollecitato i ragazzi a parlare, chiedendo loro come si erano trovati con il lavoro del laboratorio e come gli era apparso il Dipartimento di Matematica in questa settimana nella quale lo avevano frequentato.

I ragazzi hanno iniziato rispondendo che la lezione al mattino era stata più difficile rispetto al laboratorio. Poi hanno parlato non solo della matematica e delle lezioni, ma proprio della paura di affrontare una facoltà come quella di matematica e non riuscire poi ad andare avanti, la paura del fallimento. Molti hanno detto "A scuola la matematica mi riesce, ma qui è più difficile". Oppure "A scuola mi torna, ma dicono che la matematica universitaria sia completamente diversa: se poi non mi piace?", "Se poi non ci riesco?", "Se non capisco nulla per tanti mesi e butto via tanto tempo?". Dubbi certamente legittimi, ma che forse mi aspettavo fossero minori per questi ragazzi, che avevano appena frequentato la "settimana matematica".

I ragazzi hanno detto che la lezione del mattino era più difficile del laboratorio frequentato (laboratorio 4), ma l'effetto di questa constatazione era diverso da persona a persona. Ad alcuni pareva negativo o perché avrebbero preferito seguire qualcosa di più matematico (pare che nel laboratorio sui numeri transfiniti avessero fatto molte lezioni di teoria…) oppure perché in un argomento così "a cavallo" tra la matematica e un'altro argomento (qui giurisprudenza, teorie sociali e quant'altro) c'era il rischio che preferissero l'altro argomento (come nel caso della ragazza interessata ad iscriversi a giurisprudenza o del ragazzo interessato sia a matematica che a filosofia). Per altri invece il modo di procedere del laboratorio, con lezioni meno cattedratiche e con il lavoro di gruppo, era sembrato molto positivo, perché gli piaceva "sporcarsi le mani" con le cose… (anche se qualcuna tra noi avanzava il dubbio che chi parlava così avesse in realtà dimostrato meno impegno degli altri).

Inoltre nel corso di questa discussione ho rilevato atteggiamenti diversi presenti nei ragazzi: ad una la matematica piace perché le riesce e perché ci sono delle leggi da applicare: lei le applica e tutto va bene (visione strumentale). Ad un'altra ragazza piace invece anche il discorso della elasticità e della creatività (visione relazionale) che sono necessari[1] per studiare matematica, però è impaurita da tutte queste qualità richieste: "…e se poi scopro che non ce le ho?". Anche la ragazza che fa danza si preoccupa di questo: "creatività ed elasticità sono alcune delle qualità che fanno un buon ballerino; se io non ce le ho nella danza

[1] a detta dei laureati, che loro avevano incontrato la mattina stessa (vedi pagina seguente)

devo rinunciare, e allora anche se ho passione e mi iscrivo a matematica forse non ce la faccio?! Come posso sapere se possiedo queste qualità rispetto alla matematica?"
Quello delle cose dette dai laureati, nell'incontro con loro che si è svolto in una di queste mattine, è un discorso ricorrente in questi ragazzi.
Io non ero presente, ma pare che abbiano detto che la matematica universitaria è cosa completamente diversa da quella del liceo, non ha niente a che fare con quello che hanno visto fin ora. La reazione di alcuni ragazzi è: "E allora come posso sapere se mi piace?". Inoltre hanno detto che per i 3 o 5 mesi iniziali non si capisce nulla. Questo porta i ragazzi ad immaginare di non capire nulla per tanto tempo, così tanto da non sapere se sia normale oppure se loro abbiano sbagliato facoltà: "Ma allora se cambio idea io perdo un anno!".

I laureati hanno poi parlato della creatività ed elasticità necessarie ad applicarsi a questo studio; probabilmente ciò era detto come cosa positiva, rispetto allo studio della matematica che spesso viene visto dai più come una cosa arida: ma ciò ha invece fatto preoccupare questi ragazzi per via delle qualità che forse non possiedono… Alla fine, dopo che alcune di noi perfezionande ha già espresso questo concetto, un ragazzo ci dice che chi ha passione ed è disposto a lavorare "con il suo tempo ce la farà".
Mi sembra quindi di poter concludere che le conversazioni con i laureati hanno anche degli aspetti negativi. E' certamente un bene che i ragazzi i quali hanno interesse a frequentare la facoltà di matematica sappiano che non è tutto semplice, che ci sono difficoltà e differenze, rispetto al liceo, che non si immaginano. Ma forse si potrebbe mettere anche l'accento su quanto di piacevole abbiamo trovato in questo studio, noi laureati in questa materia, che ci ha spinto ad andare caparbiamente avanti e non mollare e ci ha portato alla "meta". Che poi è forse quello che loro facevano quando parlavano di creatività: bisogna che questo discorso "passi"meglio, sennò si rischia di scoraggiare persone davvero interessate.
In conclusione, si è capito che tra i ragazzi presenti al laboratorio 4 non erano molti quelli che stavano davvero considerando l'idea di frequentare il corso di laurea in

matematica, però a tutti la matematica piaceva in modo particolare e mi sembra che tutti abbiano apprezzato l'opportunità che gli è stata offerta di lavorare in modo diverso per qualche giorno.
Passerò adesso ai contenuti della lezione sui sistemi elettorali.

lezione

Con quali i meccanismi vengono prese le decisioni che riguardano tutti? Per la difficoltà di mettere d'accordo molte persone sulle decisioni comuni, si sono adottati in molti paesi dei sistemi elettorali.
Vediamo la cosa da un punto di vista matematico.
Un meccanismo elettorale equivale a delle regole per stabilire come assegnare dei seggi in numero determinato, a partire dalle preferenze espresse (voto) da un numero determinato di votanti. Quindi, a partire dai dati:

V = # votanti

S = # seggi da attribuire

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ candidati (o partiti),

si deve stabilire quanti seggi attribuire all'i-esimo partito, rispettando i vincoli:

$S(X_1)+S(X_2),\ldots,+S(X_n) = S$, ovvero il totale dei seggi deve essere S,

$V(X_1)+V(X_2),\ldots+V(X_n) = V$, ovvero il totale dei voti è uguale al numero dei votanti, se non ci sono voti nulli o schede bianche come supporremo nel seguito (si può fare anche un modello con i voti nulli e le schede bianche, ma non ce ne occuperemo).
E' ovvio che se ci sono molti votanti e pochi seggi le decisioni sono efficienti ma poco democratiche, mentre se ci sono tanti votanti e pochi seggi le scelte sono più democratiche ma meno facili da prendersi (se i seggi sono molti abbiamo nuovamente molte persone che devono mettersi d'accordo). Solitamente, il numero dei votanti è molto maggiore del numero dei seggi, che bisogna attribuire con criteri certi.
Nel tempo, sono stati elaborati vari sistemi per fare questa attribuzione dei seggi: nessuno di questi è perfetto. Andiamo a vedere quali sono i principali, con le loro regole ed i loro maggiori difetti, evidenziati da esempi.

Sistema Proporzionale:

In questo sistema si chiede che il numero dei seggi assegnati ad un partito sia proporzionale al numero dei voti che esso ha ricevuto, secondo il rapporto che si ha tra il totale dei seggi ed il totale dei voti. Cioè:

$$S(X_i):V(X_i)=S:V$$

$$S(X_i) = V(X_i) \cdot S/V$$

Ma la frazione S/V è in generale <u>non intero</u> ed è un numero piccolo, quindi come si devono attribuire i seggi se viene frazionario anche il numero $S(X_i)$? Non si può dare mezza sedia ad un candidato e mezza sedia ad un altro!

Ci sono quindi vari sistemi per definire $S(X_i)$ in modo che sia sempre un intero. Utilizzando la parte intera di un numero:

$$[x] = \text{parte intera di } x = \text{massimo intero} \leq x,$$

definiamo:

$$S(X_i) = [V(X_i) \cdot S/V]$$

In tale modo però si avrà:

$$S(X_1)+ S(X_2)+\ldots.+ S(X_n) < S,$$

e rimane il problema di assegnare i seggi residui (resti), che saranno in numero uguale a:

$$\text{resti} = S -[S(X_1)+ S(X_2)+\ldots.+ S(X_n)]= S - \sum S(X_i)$$

Un modo è quello di attribuire i resti alle parti frazionarie più grosse:
si danno i seggi ai partiti X_i che hanno la parte frazionaria:

$$V(X_i) \cdot S/V - S(X_i) = V(X_i) \cdot S/V - [V(X_i) \cdot S/V]$$

più grande.

Ma anche questo modo non dà sempre un buon risultato: può accadere che il partito con la parte frazionaria maggiore avesse preso un solo voto!

Proporzionale puro, corretto, con quota… ci sono vari modi di attribuire i seggi residui e nessuno è perfetto.

Andiamo a vedere gli altri sistemi, inventati dopo il proporzionale per dare una maggiore "governabilità".

Sistema Maggioritario:

Con questo sistema si divide il territorio in S zone, dette circoscrizioni, nel seguito indicate con I, II, III, etc. In ognuna si assegna un solo seggio, al partito con più voti.

Ci possono essere dei paradossi. Ad esempio, con la distribuzione dei voti nella tabella seguente, X_2 ha più voti di tutti però non ha nessun seggio!

	X_1	X_2	X_3	Il seggio va a:
I	50	40	10	X_1
II	45	35	20	X_1
III	10	35	55	X_3
Il totale dei voti di ognuno è:	105	110	85	

Si può avere un altro paradosso che deriva dalla formazione delle circoscrizioni. Ad esempio nella situazione schematizzata sotto si hanno due divisioni diverse in circoscrizioni relative però ad una sola votazione. Così, di fatto:

S=9, numero di seggi da assegnare e dunque numero di collegi,

45 = numero di sotto-collegi, nei quali:

V(A)>V(B) in 24 sotto-collegi,

V(A)<V(B) in 21 sotto-collegi.

Quindi la maggioranza dei voti, in questa distribuzione di voto, è comunque del partito A. Ma la differente divisione in collegi può ribaltare le cose: vedere le figure sotto, indicate con: prima divisione, seconda divisione.

Nel primo caso si ha S(A)=8, S(B)=1, mentre nel secondo si ha S(A)=2, S(B)=7. Perciò con la seconda divisione in collegi il partito B prende 7 seggi mentre il partito A ne prende soltanto 2, e questo si ottiene cambiando solo forma ai collegi! I collegi, cioè quelli che comunemente vengono chiamati circoscrizioni elettorali e che sono cambiate anche in Italia con l'ultima legge elettorale…

prima divisione: seconda divisione:

A	A	B	B	A
A	B	B	A	A
B	B	A	A	B
B	B	A	A	B
A	B	A	B	A
A	A	A	B	A
B	A	A	B	B
B	B	A	A	B
A	A	A	B	B

A	A	B	B	A
A	B	B	A	A
B	B	A	A	B
B	B	A	A	B
A	B	A	B	A
A	A	A	B	A
B	A	A	B	B
B	B	A	A	B
A	A	A	B	B

Sistema Misto:

Il sistema misto consiste nell'assegnare un numero di seggi $p \cdot S$ con il sistema proporzionale e i rimanenti $(1-p) \cdot S$ seggi con il sistema maggioritario. Ad esempio i seggi della camera dei deputati prima dell'ultima legge elettorale si eleggevano con il sistema misto, con p=25% dei seggi con il proporzionale e (1-p)=75% con il maggioritario.

Questo potrebbe essere un modo per prendere il meglio (o il peggio) dai due sistemi.

Analizzando la legge elettorale del 2005 possiamo vedere che può essere autocontradditoria, a seconda di come escono i numeri, le preferenze di voto. D'altronde la legge è presumibilmente scritta da persone esperte di giurisprudenza e non di matematica.

Proprietà

Allora ci si può chiedere, in generale, quali regole, quali proprietà, vorremmo che fossero rispettate nei sistemi elettorali. I matematici hanno formalizzato le seguenti regole, scelte secondo idee di elementare giustizia. Sono regole "ragionevoli":

SIMMETRIA:

Il numero dei seggi assegnati a ciascun partito non dipende dall'ordine di presentazione.

MONOTONIA RISPETTO AI VOTI:

A parità del numero dei votanti V, se un partito X aumenta i suoi voti, allora S(X) non può scendere.

Non c'è bisogno di commento.

MONOTONIA RISPETTO AI SEGGI:

A parità di V e di preferenze $V(X_1)$, $V(X_2)$,…., $V(X_n)$ attribuite, se S aumenta allora nessun partito può perdere seggi.

Ad esempio, Pisa aveva tempo fa più di 100000 abitanti, poi è scesa sotto questa soglia ed ha dieci consiglieri in meno nel consiglio comunale. Se dovesse ritornare sopra questa soglia, nessun partito si aspetta, a parità di voti, di perdere consiglieri: ma in realtà non è così… vedremo più avanti il "paradosso dell'Alabama".

MAGGIORANZA:

Se un partito X ottiene più di V/2 voti, allora $S(X) \geq S/2$.

SUPERADDITIVITÀ:

Se X_1 e X_2 decidono di unirsi, allora a parità di voti (cioè se $V(X_1 \cup X_2) = V(X_1)+V(X_2)$), deve essere $S(X_1 \cup X_2) \geq S(X_1)+S(X_2)$.

Cioè se il totale dei voti che si ottengono tra il partito X_1 ed il partito X_2 è lo stesso, i seggi che ottiene l'unione devono essere o di più o uguali a quelli dei due partiti da soli. Oppure, se un partito si divide in due, allora può perdere seggi ma non guadagnarli. Questa regola serve per favorire le coalizioni.

CONSISTENZA:

Se X_1 ed X_2 ricevono $S(X_1)$ ed $S(X_2)$ seggi, allora per qualsiasi altra votazione in cui X_1 ed X_2 ottengono lo stesso numero di voti e complessivamente un numero $S(X_1)+S(X_2)$di seggi, allora i seggi attribuiti ad X_1 ed X_2 sono sempre $S(X_1)$ ed $S(X_2)$.

Questa proprietà equivale a dire che se il numero dei voti che due partiti hanno preso in due diverse elezioni è lo stesso, e se il totale dei seggi che insieme hanno preso è lo stesso, allora non può essere che uno dei due partiti abbia aumentato i suoi seggi a scapito dell'altro. In pratica, dice che la distribuzione dei seggi tra due partiti non dipende da come sono distribuiti i restanti voti tra gli altri partiti.

Parlando poi dei resti per il sistema proporzionale, si possono fare alcune richieste sulla assegnazione dei seggi, che corrispondono alle seguenti proprietà:

Hare minimum:

$$S(X_i) \geq \left[\frac{S}{V} \cdot V(X_i) \right]$$

I seggi attribuiti al partito X_i, devono essere maggiori o uguali alla parte intera del prodotto tra il numero dei voti ricevuti e il rapporto che si ha tra il totale dei seggi ed il totale dei voti, come avevamo già visto.
Questa condizione, come la seguente, sono state scritte da un signore inglese di nome Hare Thomas (1806-1891), dal quale prendono il nome.

Hare maximum:

$$S(X_i) \leq \left[\frac{S}{V} \cdot V(X_i) \right] + 1$$

Qui si afferma che i seggi attribuiti al partito X_i, non devono essere maggiori del numero successivo alla parte intera di cui sopra. Anche qui è logico richiedere questa condizione.

Droop minimum:

$$S(X_i) \geq \left[\frac{S+1}{V} \cdot V(X_i) \right]$$

Questa condizione prende il nome dal suo inventore, Henry Richmond Droop (1831-1884). Su di essa si devono dare alcune spiegazioni: se si devono dividere V voti su S candidati, un candidato vince se prende V/S voti, ma in realtà basta che prenda V/(S+1) voti. Infatti, sia X_i tale candidato: se fosse $V(X_i)= V/(S+1)$ eppure il candidato non vincesse, vorrebbe dire che gli S seggi sono assegnati ad altri S candidati e che ognuno di loro ha preso più voti del candidato X_i, cioè che ci sono S candidati con una votazione maggiore della sua, cioè di $V(X_i)=V/(S+1)$. Compreso il candidato di cui si parla sono S+1 candidati per cui si può scrivere la formula:

$$\sum_1^{S+1} V\left(X_{k_j}\right) > (S+1)\cdot V(X_i) = (S+1)\frac{V}{S+1} > V$$

che però è impossibile, perché avremmo la somma di una parte dei voti espressi che è maggiore strettamente del totale dei voti. Perciò se il candidato X_i prende V/(S+1) deve vincere un seggio: non ci possono essere altri S candidati (di qualsiasi partito) che prendono tutti più voti di lui ed occupano gli S seggi.

Allora, se $V(X_i) > \frac{V}{S+1}$, il partito X_i prende 1 seggio,

se $V(X_i) > K\cdot\frac{V}{S+1}$, ci devono essere K persone elette nel partito X_i , che in tale modo prende K seggi. Tale condizione può essere espressa come:

$$V(X_i)\cdot\frac{S+1}{V} > K \qquad \Rightarrow \text{ il partito } X_i \text{ conquista K seggi.}$$

A partire da questo, si dice che un sistema elettorale rispetta il Droop minimum se:

$$S(X_i) \geq \left[\frac{S+1}{V}\cdot V(X_i)\right],$$

che si legge così: i candidati assegnati al partito X_i devono essere maggiori o uguali alla parte intera del numero $\frac{S}{V+1}\cdot V(X_i)$. Un sistema può rispettare o meno il Droop minimum.

Per fare un esempio, supponiamo che 3 seggi debbano essere attribuiti da 40 elettori che possono scegliere tra un certo numero di candidati. Un candidato, non appena raggiunge il quorum di 11 voti, può ritenersi eletto in quanto, evidentemente, non è possibile che ci siano altri tre candidati che lo superino. Abbiamo visto sopra, in generale, che se si supera il rapporto V/S+1 di voti, si è sicuri di essere eletti. Questo quoziente nell'esempio è 40:(3+1)=40:4=10. ecco perché, per determinare i seggi nel caso di una votazione secondo le quote Droop, si assegna ad ogni partito un numero di seggi pari alla parte intera del quoziente $\frac{S+1}{V}\cdot V(X_i)$, poi gli eventuali seggi rimasti si assegnano ai partiti con la parte decimale maggiore in tali quozienti. Si noti che questo discorso non può valere se tutti i quozienti $\frac{S+1}{V} \cdot V(X_i)$ sono interi: in tal caso il numero totale sarebbe eccedente (nell'esempio, se 4 candidati ricevessero ciascuno 10 voti, sarebbero eletti in 4 anziché 3)e si deve prevedere una correzione.

La richiesta del Droop minimum è più stretta dell'Hare minimum e quindi chi la soddisfa, soddisfa a maggior ragione anche Hare.

Un procedimento che rispetti l'Hare maximum ed il Droop minimum ed inoltre sia monotono rispetto ai seggi è detto *legge elettorale proporzionale corretta*.

Paradosso dell'Alabama:

Quando negli Stati Uniti d'America il numero dei membri della Camera dei Rappresentanti fu aumentato (passò da 299 membri a 300 membri: il numero di seggi tende nel tempo sempre ad aumentare e mai a calare…) successe qualcosa che non era stato previsto, e che contrasta con la proprietà di monotonia. I seggi attribuiti ad ogni Stato erano proporzionali alla popolazione di quello Stato: l'Alabama prima ne aveva 8, ma quando il totale dei seggi passò a 300 l'Alabama ricevette 8-1=7 seggi. Ne perdette 1, contro il principio di monotonia rispetto ai seggi.

Ordinare n candidati:

Un altro problema collegato alle elezioni è quello che si trova cercando di ordinare n candidati, come ad esempio succede nelle gare sportive. Anche qui ci sono dei votanti (i giurati) ed i meccanismi per fare le graduatorie possono essere di vario tipo. Lo stesso problema si può presentare anche cercando di fare una graduatoria dei piatti preferiti in un gruppo di amici.

Un primo tipo di meccanismo che viene in mente è il "girone all'italiana".

Girone all'italiana:

Esso consiste nel far combattere tutti gli avversari in coppia uno contro l'altro, ad eliminazione diretta.

Però se, tra tre candidati A, B, C, per caso accade che:

A batte B,	B batte C,	C batte A,	(detto con terminologia matematica:
A>B,	B>C,	C>A),	si ha un assurdo: il vincitore non c'è!

C'è poi il metodo di Condorcet, nel quale ogni votante esprime una preferenza che ordina le n alternative.

Metodo di Condorcet:
Ogni votante esprime qui la sua graduatoria e un candidato vince se è anteposto a tutti gli altri da una maggioranza della popolazione.
Usando questo metodo però ci possono essere dei profili, intesi come distribuzione di preferenze (il risultato della votazione) nei quali si arriva all'assurdo. Il paradosso di Condorcet consiste appunto in un profilo secondo il quale non è possibile dare la vincita ad un candidato sulla base del metodo di Condorcet.
Per ovviare a questo problema, è possibile contare i primi posti, i secondi etc. delle preferenze assegnando un "peso", cioè un punteggio, diverso a seconda delle posizione. Tale metodo è detto conteggio di Borda.

Conteggio di Borda:
Ogni votante esprime la sua graduatoria, la sua preferenza:

1°, 2°, 3°, …, (n-1)°, n° e si danno i punti così:

n-1, n-2, n-3, … 1, 0.

Poi si fa la somma dei voti per il punteggio e si mette 1° in graduatoria quello che ha più punti.
Con questo metodo si evita il paradosso di Condorcet: c'è sempre un vincitore, anche se sono possibili situazioni di parità. Però ha un difetto notevole, anche se non immediatamente visibile, che si rivela nel caso in cui uno dei soggetti da mettere in graduatoria si ritiri dopo la votazione: in tal caso può essere che i risultati riguardanti gli <u>altri</u> candidati vengano totalmente cambiati. Quindi dalla presenza o assenza di una scelta, irrilevante e marginale rispetto a loro, può dipendere la relativa posizione di altre due scelte, magari più consistenti come votazione numerica.

Sembra proprio che ogni sistema abbia i suoi paradossi. Riguardo a tutto questo, è bene conoscere un enunciato del teorema di Kennneth J. Arrow, pubblicato nel 1951: Teorema di Arrow- Per ordinare con il voto n candidati, l'unico sistema che

rispetti tutte le regole ragionevoli che scegliamo è quello che dà un risultato costante qualunque siano i voti espressi (=dittatura!).
Un enunciato più preciso, per il quale dovremmo definire meglio le proprietà, come si può vedere nella appendice1, può essere:

Teorema di Arrow:

Se ci sono almeno tre alternative tra cui scegliere, non esiste una funzione di scelta sociale (sistema di votazione) che rispetti il principio di unanimità, sia indipendente dalle alternative irrilevanti e non sia dittatoriale.
In altre parole: se un sistema elettorale rispetta il principio di unanimità ed è indipendente dalle alternative irrilevanti, allora è dittatoriale.

Infine, quale è la matematica coinvolta nello studio dei sistemi elettorali? Quali problemi può sollevare? Ecco:

Teoria degli insiemi	
Teoria assiomatica	
Metodi combinatori	(per prevedere possibili scenari e paradossi)
Metodi di ottimizzazione	(chi ci guadagna se…)
Teoria dei giochi	(giochi, ma anche economia, politica,guerre!)
Metodi statistici	(non solo sondaggi…)
Crittografia	(il voto elettronico è sicuro?)

argomenti dei gruppi

Alla fine della lezione, il professore che conduceva il laboratorio ha assegnato gli argomenti destinati ai gruppi, poi liberamente scelti da un numero di partecipanti variabile:

gruppo 1): partecipanti: 0

Ripartizione dei seggi "residui" nei sistemi proporzionali: analisi, esempi, paradossi (controesempi).

gruppo 2A): partecipanti: 3

Analisi della legge elettorale per la Camera. Formalizzazione (dal linguaggio burocratico a quello matematico), analisi critica (prevede tutti i casi?)

gruppo 2B): partecipanti: 3

Analisi della legge elettorale per i Comuni con meno di 15000 abitanti. Formalizzazione (dal linguaggio burocratico a quello matematico), analisi critica (prevede tutti i casi?)

gruppo 3): partecipanti: 4

Relazioni tra le proprietà "generali": implicazioni, contraddittorietà, esempi.

gruppo 4): partecipanti: 6

Analisi delle graduatorie fra n candidati: esempi e paradossi (controesempi).

Il professore ha fornito del materiale a ciascun gruppo (vedi bibliografia).

lavoro nei gruppi ed esposizioni

Adesso farò qualche osservazione sul modo di lavorare all'interno dei vari gruppi (per quanto ho visto e per quanto risulta dai loro appunti che abbiamo raccolto) e sulle loro esposizioni; le trascrizioni delle loro esposizioni saranno *scritte con un font diverso*.

A mio parere i ragazzi presenti al laboratorio 4 hanno dimostrato di saper lavorare con un minimo di autonomia su un argomento nuovo, anche se bisogna ammettere che la matematica presente non era difficile.

Nelle loro relazioni finali hanno commesso piccoli errori, ma hanno comunque evidenziato alcune carenze dei sistemi elettorali e matematizzato il problema a partire dalla lettura della legge e degli articoli che gli erano stati consegnati. Hanno anche cercato di raccogliere dei dati per vedere se trovavano dei paradossi.

gruppo 1): nessuno ha scelto questo argomento.

gruppo 2A): I ragazzi di questo gruppo sono andati dal professore a chiedere delucidazioni perché hanno trovato, da soli, che la legge ha un problema di cui a lezione non avevamo parlato. Infatti questa legge presuppone che

$S_i = \left[\frac{V_i}{\left[\frac{V}{S} \right]} \right] \leq V_i \frac{S}{V}$, perché in caso contrario il totale dei seggi assegnati è maggiore del numero dei seggi da assegnare.

Però questa disuguaglianza, a seconda dei numeri che ci troviamo davanti, può anche essere falsa e allora ci troveremo davanti a un paradosso.

Nella loro esposizione i ragazzi di questo gruppo hanno analizzato gli articoli della legge, l' hanno scritta in forma matematica secondo formule e poi hanno cercato i problemi cui si può andare incontro applicandola e li hanno trovati. All'inizio, la ragazza che esponeva ha fatto un piccolo errore: doveva scrivere la metà dei voti V, ma si è messa a calcolarla come il 50% e lo ha scritto come $\frac{50 \cdot 100}{V}$, invece che $\frac{V \cdot 50}{100}$ oppure $\frac{V}{2}$. Probabilmente l'emozione… Poi hanno trattato gli argomenti, nel seguito della loro esposizione, come segue.

Elezione del sindaco:

n = numero dei candidati a sindaco,

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ candidati a sindaco,

C = numero dei consiglieri comunali,

vale la condizione: $\frac{3}{4} C \leq n \leq C$.

Penso che qui i ragazzi abbiano commesso un errore perché il testo delle legge recita: "ciascuna candidatura alla carica di sindaco è collegata ad una lista di candidati alla carica di consigliere comunale, comprendente un numero di candidati non superiore al numero dei consiglieri da eleggere e non inferiore ai tre quarti". Perciò il numero che deve essere tra ¾ C e C non è quello dei candidati a sindaco, ma quello dei candidati consiglieri della lista collegata ad un candidato sindaco, numero che non è stato "matematizzato", cioè loro non gli hanno assegnato alcun simbolo. Andiamo avanti:

V = numero dei voti,

W = numero dei votanti,

Ogni elettore esprime 1 solo voto: V=W.

Viene eletto X_i *tale che tale che* $V(X_i)>V(X_j)\ \forall j=1,\dots,n,\ j\neq i$.

Se $V(X_i)=V(X_j) > V(X_k)$ *per due* i,j *e per* $k\neq i,j$ *e* $k=1,\dots,n$, *allora* X_i *e* X_j *vanno al ballottaggio. Però se c'è la parità tra più di due candidati, non si sa che cosa fare: è una eventualità che la legge non prevede.*

Elezione del presidente della provincia:

vince il candidato con la maggioranza assoluta: $V(X_i) \geq \left[\frac{V}{2}\right]+1$.

Se non c'è nessun X_i *che soddisfa la condizione, ci sarà almeno* $V(X_i) \geq V(X_j) > V(X_k)$ *per due* i,j, $i\neq j$, $k\neq i,j$ *e* $k=1,\dots,n$: *allora i candidati* X_i *e* X_j *vanno al ballottaggio.*

Elezione del consiglio comunale e consiglio provinciale:

Metodo dei quozienti: se k = numero dei seggi, per attribuire i seggi si fa una tabella con il numero dei voti di ogni lista, e si divide ogni valore per 1 nella prima riga, per 2 nella seconda e così via.

$V(X_1)/1$	$V(X_2)/1$	…	$V(X_i)/1$	…	$V(X_n)/1$
$V(X_1)/2$	$V(X_2)/2$	…	$V(X_i)/2$	…	$V(X_n)/2$
$V(X_1)/3$	$V(X_2)/3$	…	$V(Xi)/3$	…	$V(X_n)/3$
…	…	…	…	…	…

Si scelgono tra questi i k quozienti più alti ed i k seggi vanno alle liste corrispondenti.

E' questo il metodo alla base delle elezioni nel consiglio comunale e provinciale, però prima si tolgono una certa parte dei seggi che si attribuiscono ad una lista particolare, che ha preso il massimo dei voti.

Così, nel caso del Comune, sono i 2/3 di tutti i seggi che vanno attribuiti a priori alla lista che ha espresso il sindaco: solo dopo si procede con il metodo dei quozienti tra le altre liste. Se c'è pareggio, si va a sorteggio.

Nel consiglio provinciale invece se la lista collegata con il presidente del consiglio provinciale non raggiunge il 60% dei voti, gli si danno ugualmente il 60% dei seggi e dopo si procede con il metodo dei quozienti tra le altre liste. Inoltre se qui c'è il pareggio, non ci sono istruzioni su come procedere.

In base a questa legge, c'è però un caso in cui <u>non si può procedere</u> con le assegnazioni: se una lista prende il 100% dei voti. Infatti in tal caso si danno a questa lista 2/3 o il 60% dei seggi, ma il restante dovrebbero essere attribuiti alle altre liste con il metodo dei quozienti che però non è applicabile, perché i voti attribuiti alle altre liste sono 0 e perciò i quozienti sono tutti 0. A chi dare i seggi?

gruppo 2B): il ragazzo che è stato scelto da questo gruppo per l'esposizione ha manifestato attitudine per fare l'attore: l'esposizione infatti è iniziata con la lettura-burla di un pezzetto della legge per la Camera, per far vedere quanto è complicata la legge, lettura piuttosto esagerata. Poi sono entrati nel merito:

V = voti,

S = seggi,

$q_n = [V/S]$ quoziente nazionale,

V_i = voti della coalizione i-esima,

$S_i = [V_i/q_n]$ seggi assegnati alla coalizione i-esima.

Ci sono casi in cui la legge non funziona: ad esempio, se $S = 60$, $V = 100$ allora $[100/60]=1$. Se poi per $i=1,2$ si ha $V_i = 50$, allora $S_i = [V_i/q_n]$

= [50/1] = [50] ed allora S_1+S_2 = 100: non fa 60, ma lo supera!! Questo tipo di problemi è più difficile che si presenti se i numeri sono più grandi, ma può comunque accadere. Questo ci dice che a volte la legge potrebbe non dare risultato.

Per fare altri esempi di problemi che può dare una legge simile: se c'è un resto di 0,99, ci dovrebbe essere secondo il buon senso un seggio residuo da assegnare, mentre non ci dovrebbe essere se il resto è 0,01. Eppure se ci sono 16 seggi residui e i partiti sono quattro, i seggi vanno 4 ad ogni partito indipendentemente da quali siano stati i resti.

Leggendo la legge si vede che in una circoscrizione C si ha

$q_C = [V_C/S_C]$ quoziente della circoscrizione, e

$S=[V_C/S_C]$ seggi della circoscrizione, ma quest'ultimo numero può essere maggiore del numero nazionale che viene assegnato e questo non va bene!

Quelle utilizzate nella legge sono metodologie non certe. Il risultato in circoscrizione e quello, sempre nella circoscrizione ma su base nazionale, possono essere diversi ed allora si procede a livellamenti per farli tornare.

gruppo 3): nell'esposizione il gruppo 3 ha inizialmente elencato le varie proprietà fondamentali. Hanno precisato che se vale la monotonia si deve decidere quale far valere tra le proprietà di Hare maximum e superadditività perché insieme non possono valere.

Le leggi proporzionali possono essere: pura, corretta, corretta con il metodo d'Hondt.

Nella proporzionale pura si assegnano i seggi a seconda della cifra delle unità del numero $S_i=S\cdot V_i/V$ (1,6 ne prende uno) e poi si guarda la prima cifra decimale.

Nel metodo dei quozienti, si assegnano i seggi ai partiti che presentano i quozienti maggiori tra i seguenti:

$V(X_1)/1$	$V(X_2)/1$	…	$V(X_i)/1$	…	$V(X_n)/1$
$V(X_1)/2$	$V(X_2)/2$	…	$V(X_i)/2$	…	$V(X_n)/2$
$V(X_1)/3$	$V(X_2)/3$	…	$V(Xi)/3$	…	$V(X_n)/3$
…	…	…	…	…	…

Questo sistema non rispetta l'Hare maximum ma la superadditività sì.

gruppo 4): Ho seguito questo gruppo in modo particolare. Ho letto il materiale che gli era stato dato. Una parte di questo gruppo ha fatto uno schema generale d'analisi dell'articolo [8], intanto due di loro hanno tentato di raccogliere dei dati. Si sono organizzati per raccogliere le preferenze dei 17 studenti presenti tra quattro materie (italiano, matematica, storia, fisica) e hanno provato a vedere quale è il risultato di questo profilo secondo il metodo di Contorcet e poi del conteggio di Borda.

Il risultato del sondaggio è stato questo:

	quante volte primo	quante volte secondo	quante volte terzo	quante volte quarto
Italiano	3	6	4	4
Matematica	8	7	1	1
Fisica	2	4	4	7
Storia	4	0	8	5

Poi hanno tolto 1 materia dalle scelte possibili (come se un "candidato" si fosse ritirato) e rifatto il conto delle stesse preferenze, per vedere se il risultato delle graduatorie fosse stato stravolto o meno da questa assenza. Ma il risultato è stato lo stesso e perciò hanno deciso di usare proprio l'esempio del testo per la loro esposizione.

Esposizione: *100 elettori esprimono le loro preferenze su tre candidati A, B e C. Il profilo che ne risulta è il seguente:*

	1° posto	2° posto	3° posto
35%	A	B	C
33%	C	A	B
32%	B	A	C

I ragazzi spiegano dunque così la cosa:

Qui si ha un 35% per cui A>B, che unito ad un 32% per cui A>C dà il 67% dei votanti per cui A è preferito, e quindi con il metodo di Condorcet vince il candidato A, perché vince il candidato che precede gli altri candidati secondo la maggior parte dei votanti.

Però, secondo la definizione, il metodo di Condorcet si applica così: <u>A>B per il 68%</u>, B>A per il 32%, <u>A>C per il 67%</u>, C>A per il 33%, C>B per il 33%, <u>B>C per il 67%</u>. Perciò, non è stato applicato correttamente dal gruppo di ragazzi.

Se però analizziamo il seguente profilo:

	1° posto	2° posto	3° posto
35%	A	B	C
33%	C	A	B
32%	B	C	A

il candidato A continua a vincere, come prima, se si utilizza la maggioranza semplice, invece con il metodo di Condorcet accade che non c'è nessun vincitore, perché A vince con B e perde con C, B vince con C ma perde con A, C vince con A ma perde con B. Quindi non si ha un ordinamento, ma A>B>C>A che è paradossale: è il paradosso di Condorcet.

Questo perché, sempre secondo la definizione di metodo di Condorcet si ha: <u>A>B per il 68%</u>, B>A per il 32%, A>C per il 35%, <u>C>A per il 65%</u>, C>B per il 33%, <u>B>C per il 67%</u> e quindi se si indica chi vince con il simbolo>, si ha: A>B>C>A, una situazione circolare in cui non si può dire chi vinca.

Per evitare queste situazioni si ha il metodo di Borda: si dà un punteggio decrescente (n-1, n-2, etc.) alle varie posizioni in cui un candidato si può presentare nelle preferenze espresse con le votazioni e poi si fa la somma. Una variante può essere quella invece di dare n-1, n-2, etc., di dare punteggi frazionari: 1, 1/2, 1/3, 1/4, etc. in

entrambi i casi, maggiormente in quello frazionario, viene favorito il primo classificato e vengono ridotte le distanze tra gli ultimi classificati, riducendo il rischio che le scelte irrilevanti condizionino i rapporti tra altre scelte.
In conclusione, una funzione di scelta sociale è un metodo elettorale che rispetta le tre leggi seguenti:

Principio di unanimità
1- se tutte le preferenze individuali preferiscono A a B, allora A deve prevalere su B nella preferenza collettiva;

Indipendenza dalle alternative irrilevanti
2- la posizione di A e B nel profilo collettivo deve essere indipendente dalle alternative irrilevanti;

Non-dittatorialità
3- la funzione deve essere non dittatoriale.

Teorema di Arrow: non è possibile avere una scelta sociale che rispetta tutte e tre queste regole.
Altra formulazione: se una funzione di scelta sociale rispetta le prime due leggi, allora è un metodo dittatoriale.
I risultati del censimento sulle preferenze tra quattro materie (italiano matematica, fisica, storia) sono stati quelli che seguono.
Con il maggioritario: vince matematica (47%), 2° storia(23%), 3° italiano(18%) e 4° fisica(12%). Eppure non è una maggioranza assoluta.
Con il metodo di Condorcet: 1° matematica, 2° italiano, 3° storia e 4° fisica.
Con il metodo di Borda (con il punteggio classico) viene lo stesso risultato del metodo di Condorcet.

In conclusione anche questi ragazzi hanno lavorato, mi pare, piuttosto bene, anche se il loro lavoro non è del tutto privo di errori.

Appendice- Il Teorema di Arrow

Il teorema di Arrow° richiede le seguenti definizioni e proprietà:

Dati un insieme finito K di alternative (usiamo x,y e z come variabili per elementi di K) e un insieme C di n individui ciascuno dei quali propone un ordinamento di K, si deve definire una funzione, che chiameremo *legge di benessere sociale*, che associa a ciascuna n-upla di graduatorie individuali (ordinamenti di K) una graduatoria collettiva.

A1. **Proprietà di completezza**: In corrispondenza di ogni n-upla di graduatorie individuali, la legge di benessere sociale deve indicare una ed una sola graduatoria sociale.

A2. **Proprietà di sovranità dei cittadini**: Per ogni coppia x,y di elementi distinti di K esiste una n-upla di graduatorie individuali tale che ad essa è associata una graduatoria collettiva in cui x è preferito ad y. (Si indica con xPy).

A3. **Proprietà di correlazione positiva**: Se, per una certa n-upla di graduatorie individuali, la legge di benessere sociale associa una graduatoria collettiva in cui xPy, allora, per tutte le altre n-uple di graduatorie individuali che differiscono dalla precedente solo perché in alcune graduatorie individuali x ha migliorato la sua posizione, nella graduatoria collettiva deve essere xPy.

A4. **Proprietà di invarianza delle alternative irrilevanti**: Se, per una certa n-upla di graduatorie individuali, la legge di benessere sociale associa una graduatoria collettiva in cui xPy, allora, per tutte le altre n-uple di graduatorie individuali in ciascuna delle quali la relazione di preferenza tra x e y non è mutata, nella graduatoria collettiva deve continuare a essere xPy.

A5. **Proprietà di non dittatorialità**: La legge di benessere sociale non associa ad ogni n-upla di graduatorie individuali quella di un particolare individuo: non esiste h tale che, per ogni x ed y, se xP_hy allora xPy.

Possiamo ora enunciare il

° come enunciato nell'articolo [10] della bibliografia

Teorema di Arrow: Non esiste alcuna legge di benessere sociale che soddisfa simultaneamente tutti gli assiomi A1, A2, A3, A4, A5. (se soddisfa A1, A2, A3, A4, allora è dittatoriale).

Bibliografia

[1] Testo della legge per l'elezione del sindaco e del consiglio comunale nei comuni sino a 15000 abitanti; [gruppo 2A]

[2] *Legge elettorale con paradosso*, articolo di Aline Pennini, Federica Ricca e Bruno Simeone sul paradosso della legge per la Camera; [gruppo 2B]

[3] Testo della legge per la Camera; [gruppo 2B]

[4] *Sistemi elettorali e leggi proporzionali pure*, articolo di Dario Palladino (Università di Genova); [gruppo 3]

[5] *Sistemi elettorali leggi miste e considerazioni generali*, articolo di Dario Palladino (Università di Genova); [gruppo 3]

[6] *Sistemi di scelte sociali considerazioni generali*, articolo di Dario Palladino (Università di Genova); [gruppo 3]

[7] *Sistemi elettorali proporzionali, la <soluzione> italiana*, articolo di Claudio Bernardi e Marta Meneghini, dal Bollettino U.M.I. (7) 4-A (1990); [gruppo 3]

[8] *Matematica e votazioni*, articolo di Umberto Cerruti, da "Blog matematico"; [gruppo 4]

[9] *Sistemi elettorali e leggi proporzionali corrette*, articolo di Dario Palladino (Università di Genova); [gruppo 4]

[10] *Sistemi di scelte sociali il teorema di Arrow*, articolo di Dario Palladino (Università di Genova); [gruppo 4]

[11] *La matematica delle elezioni*, paragrafo 2, articolo di Rudy d'Alembert, Alice Ridde, Piotr R. Silverbrahms; [gruppo 4]